4.12. OSNOVNI TEOREMI DIFERENCIJALNOGA RAČUNA

CAUCHYJEV, FERMATOV, ROLLEOV I LAGRANGEOV TEOREM

4.12.1. STROGI LOKALNI MINIMUM

- Neka je f funkcija definirana na *otvorenom* intervalu $\langle a,\ b\rangle$.
- Kažemo da funkcija f ima **strogi lokalni minimum** u točki $c \in \langle a,\ b\rangle$ ako postoji *otvoreni* interval $\langle \check{c},\ \hat{c}\rangle$ sa sljedećim svojstvima:
- a) $\langle \check{c},\ \hat{c}\rangle \subseteq \langle a,\ b\rangle$;
- b) $c \in \langle \check{c},\ \hat{c}\rangle$;
- c) za svaki $x \in \langle \check{c},\ \hat{c}\rangle \setminus \{c\}$ vrijedi nejednakost:
    - $f(x) > f(c)$

4.12.2. STROGI LOKALNI MAKSIMUM

- Neka je f funkcija definirana na *otvorenom* intervalu $\langle a,\ b\rangle$.
- Kažemo da funkcija f ima **strogi lokalni maksimum** u točki $c \in \langle a,\ b\rangle$ ako postoji *otvoreni* interval $\langle \check{c},\ \hat{c}\rangle$ sa sljedećim svojstvima:
- a) $\langle \check{c},\ \hat{c}\rangle \subseteq \langle a,\ b\rangle$;
- b) $c \in \langle \check{c},\ \hat{c}\rangle$;
- c) za svaki $x \in \langle \check{c},\ \hat{c}\rangle \setminus \{c\}$ vrijedi nejednakost:
  - $f(x) < f(c)$

4.12.3. NAPOMENA

- Strogi lokalni minimum i strogi lokalni maksimum realne funkcije na nekom otvorenom intervalu zajedničkim imenom nazivamo **strogi lokalni ekstremi** realne funkcije.
- To su, dakle, najmanja, odnosno najveća vrijednost funkcije na nekom (proizvoljno malom) otvorenom intervalu sadržanom u domeni cijele funkcije.

4.12.4. STROGI GLOBALNI EKSTREMI

- Neka je f realna funkcija definirana na skupu $S \subseteq \mathbb{R}$.
- Kažemo da funkcija f ima **strogi globalni minimum** u točki $c \in S$ ako za svaki $x \in S \setminus \{c\}$ vrijedi nejednakost:
  - $f(x) > f(c)$
- Kažemo da funkcija f ima **strogi globalni maksimum** u točki $c \in S$ ako za svaki $x \in S \setminus \{c\}$ vrijedi nejednakost:
  - $f(x) < f(c)$
- Strogi globalni minimum i strogi globalni maksimum zajedničkim imenom nazivamo **strogi globalni ekstremi**.

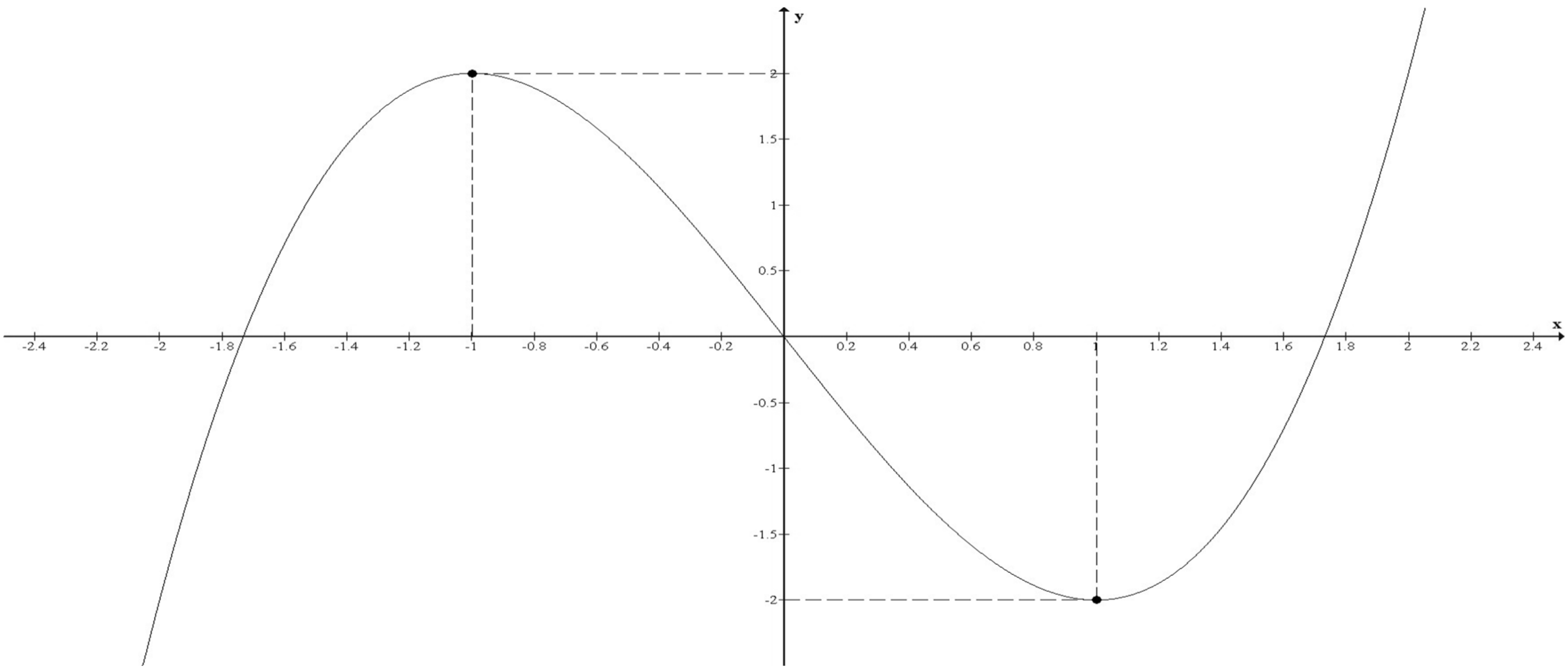
4.12.5. NAPOMENA

- Treba biti vrlo oprezan u korištenju termina *strogi lokalni* i *strogi globalni ekstrem*. Naime, strogi lokalni ekstrem ne mora biti i strogi globalni ekstrem (vidjeti sliku 1.), a strogi globalni ekstrem ne mora biti strogi lokalni ekstrem (vidjeti sliku 2.)
- Zbog toga ćemo ubuduće uvijek isticati o kojoj vrsti ekstrema se radi: lokalnom minimumu, globalnom minimumu, lokalnom maksimumu ili globalnom maksimumu.

4.12.5. NAPOMENA

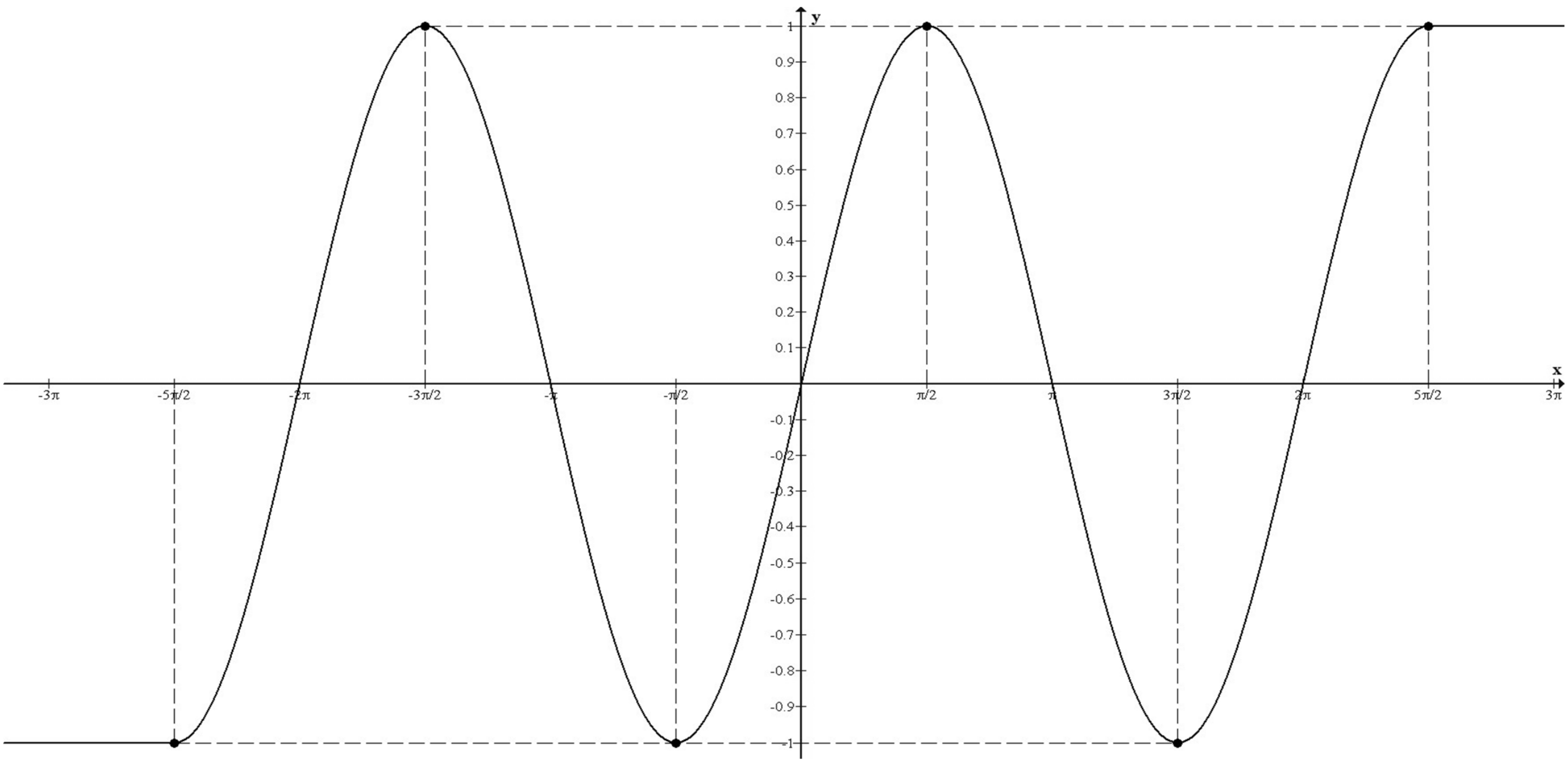
- Formalno, „obični” lokalni/globalni ekstrem definira se tako da se u definicijama strogoga lokalnoga/globalnoga ekstrema znakovi $>$ i $<$ zamijene znakovima $\geq$ i $\leq$.
- U takvim slučajevima mogu nastupiti dodatne poteškoće. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x) = 1$ imala bi i lokalni i globalni ekstrem u svakoj točki svoje prirodne domene.
- Zbog toga ćemo u daljnjem pod pojmom *lokalni ekstrem* podrazumijevati strogi lokalni ekstrem.

4.12.6. SLIKA 1.



y
x
2
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.4
-2.2
-2
-1.8
-1.6
-1.4
-1.2
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
2
2.2
2.4

4.12.7. SLIKA 2.



y
x
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
-0.1
-0.2
-0.3
-0.4
-0.5
-0.6
-0.7
-0.8
-0.9
-1
-3π
-5π/2
-2π
-3π/2
-π
-π/2
π/2
π
3π/2
2π
5π/2
3π

4.12.8. FERMATOV TEOREM

- Neka je f realna funkcija definirana na **otvorenom** intervalu $\langle a, b\rangle$.
- Ako f na intervalu $\langle a, b\rangle$ ima „obični" (ne nužno strogi) lokalni minimum u točki c_1 i/li „obični" (ne nužno strogi) lokalni maksimum u točki c_2, te ako postoje derivacije $f'(c_1)$ i/ili $f'(c_2)$, tada je nužno

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0.$$

4.12.9. KOMENTAR FERMATOVA TEOREMA

- Fermatov teorem daje *nužne uvjete* za određivanje *lokalnih ekstrema* realne funkcije definirane na *otvorenom* intervalu.
- Prema tom teoremu, kandidate za lokalne ekstreme funkcije f treba tražiti ili među točkama *iz prirodne domene funkcije f* u kojima ne postoji derivacija te funkcije ili među onim rješenjima jednadžbe

$$f'(x) = 0$$

- koja *pripadaju prirodnoj domeni funkcije f.*

4.12.10. DOKAZ FERMATOVA TEOREMA

Pretpostavimo da f ima obični lokalni minimum u točki c_1. Tada:

$$L_1 = \lim_{x \to c_1 -} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \le 0 \text{ jer je brojnik} \ge 0, \text{ a nazivnik} < 0.$$

$$L_2 = \lim_{x \to c_1 +} \frac{f(x) - f(c_1)}{x - c_1} \ge 0 \text{ jer je brojnik} \ge 0, \text{ a nazivnik } > 0.$$

Iz pretpostavke da postoji $f'(c_1)$ slijedi da mora biti $L_1 = L_2$.

Odatle slijedi $L_1 = L_2 = 0$, odnosno $f'(c_1) = 0$.

Analogno se dokazuje tvrdnja u slučaju običnoga lokalnoga maksimuma.

4.12.11. ROLLEOV TEOREM

- Neka je f realna funkcija definirana na *segmentu* $[a, b]$ takva da ima sljedeća svojstva:
- 1.) f je neprekidna na $[a, b]$;
- 2.) f ima derivaciju u svakoj točki iz intervala $\langle a, b\rangle$;
- 3.) $f(a) = f(b)$.
- Tada postoji barem jedna točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da je $f'(c) = 0$.

4.12.12. KOMENTAR ROLLEOVA TEOREMA

- Rolleov teorem se geometrijski može interpretirati ovako:
- *Svaka funkcija neprekidna na segmentu i takva da u krajnjim točkama segmenta poprima jednake vrijednosti ima barem jednu točku u kojoj je tangenta na graf te funkcije usporedna s osi apscisa.*

4.12.13. DOKAZ ROLLEOVA TEOREMA

- Tvrdnja slijedi korištenjem svojstva da svaka funkcija neprekidna na segmentu ima globalni minimum i globalni maksimum, te Fermatova teorema.
- Ako je $f = \text{const.}$, tvrdnja je trivijalna.
- Ako je $f \neq \text{const.}$, onda u nekoj točki $c \notin \{a,\ b\}$ funkcija f poprima svoju najveću ili najmanju vrijednost na segmentu $[a,\ b]$.
- U toj točki c vrijedi jednakost $f'(c) = 0$.

4.12.14. CAUCHYJEV TEOREM O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI

- Neka su f i g realne funkcije definirane na segmentu $[a, b]$ i takve da imaju sljedeća svojstva:
- 1.) f i g su neprekidne na $[a, b]$;
- 2.) f i g imaju derivaciju u svakoj točki iz intervala $\langle a, b\rangle$;
- 3.) za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $g'(x) \neq 0$.
- Tada postoji barem jedna točka $c \in \langle a, b\rangle$ takva da vrijedi jednakost

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

4.12.15. SKICA DOKAZA CAUCHYJEVA TEOREMA

- Iz $g^{'}(x) \neq 0$ slijedi $g(a) \neq g(b)$.
- Naime, ako bi bilo $g(a) = g(b)$, onda bismo primjenom Rolleova teorema dobili da vrijedi $g^{'}(c) = 0$ za barem jedan $c \in \langle a, b \rangle$, što je proturječje.
- Preostaje primijeniti Rolleov teorem na funkciju

$$G(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot \left(g(x) - g(a)\right).$$

- pa odatle izravno slijedi tvrdnja teorema.

4.12.16. LAGRANGEOV TEOREM O SREDNJOJ VRIJEDNOSTI

- Neka je f realna funkcija neprekidna na segmentu $[a,\ b]$ i takva da ima derivaciju u svakoj točki intervala $\langle a,\ b\rangle$.
- Tada postoji barem jedna točka $c \in \langle a,\ b\rangle$ takva da vrijedi jednakost:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

4.12.17. NAPOMENA

- Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti poseban je slučaj Cauchyjeva teorema o srednjoj vrijednosti.
- Preciznije, ako u Cauchyjevu teoremu o srednjoj vrijednosti odaberemo $g(x) = x$, dobivamo Lagrangeov teorem.

4.12.18. KOMENTAR LAGRANGEOVA TEOREMA

- Lagrangeov teorem tvrdi:
- Povučemo li pravac p kroz točke $A = (a, f(a))$ i $B = (b, f(b))$, onda postoji barem jedna točka $c \in \langle a, b\rangle$ u kojoj je tangenta t povučena na graf funkcije f u točki $C = (c, f(c))$ usporedna s pravcem p.
- Pritom su uvjeti neprekidnosti funkcije f na $[a, b]$, odnosno *derivabilnosti* te funkcije na $\langle a, b\rangle$ nužni jer ako barem jedan od tih uvjeta nije ispunjen, teorem općenito ne mora vrijediti.

4.12.19. NAPOMENA

- Niti jedan od prethodna dva teorema srednje vrijednosti (Cauchyjev, Lagrangeov) ne daje efektivan algoritam kako odrediti barem jednu točku c čije smo postojanje utvrdili.
- Zbog toga se u *numeričkoj matematici* razvijaju posebne metode i tehnike određivanja tih točaka.