4.13. EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

ODREĐIVANJE EKSTREMA.
INTERVALI MONOTONOSTI FUNKCIJE.
MODELIRANJE NEKIH EKSTREMALNIH ZADAĆA.

4.13.1. STACIONARNA TOČKA

- Fermatov poučak iz točke 4.12. može se formulirati i ovako:
- *Ako realna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki x_0, onda ili funkcija f nema derivaciju u toj točki ili vrijedi $f\,'(x_0) = 0$.*
- To znači da sve kandidate za lokalne ekstreme *u kojima funkcija ima derivaciju* treba tražiti među svim onim rješenjima jednadžbe $f\,'(x) =$ $= 0$ koja pripadaju prirodnoj domeni funkcije f.
- Svako rješenje jednadžbe $f\,'(x) = 0$ koje pripada prirodnoj domeni funkcije f naziva se *stacionarna točka.*
- Svaki lokalni ekstrem (u kojemu funkcija ima derivaciju) je stacionarna točka, ali svaka stacionarna točka ne mora biti lokalni ekstrem.
- Npr. $f(x) = x^3$ ima stacionarnu točku $x_0 = 0$, ali ta točka nije lokalni ekstrem funkcije f.

4.13.2. DOVOLJAN UVJET ZA POSTOJANJE EKSTREMA

- Je li neka stacionarna točka x_0 doista točka u kojoj *derivabilna* funkcija f ima lokalni ekstrem, moguće je provjeriti na dva uobičajena načina:
- **1.način:**
- Odrediti *bilo koji otvoreni* interval $\langle a,\ b\rangle \subseteq D(f\ )$ takav da je $x_0 \in \langle a,\ b\rangle$, da je f derivabilna na $\langle a,\ b\rangle$ i da vrijedi $f'(x) \neq 0,\ \forall x \in \langle a,\ b\rangle \backslash \{x_0\}$.
- Odrediti predznak funkcije $f\ '$ na intervalima $\langle a,\ x_0\rangle$ i $\langle x_0,\ b\rangle$.
- Ako se ti predznaci podudaraju, x_0 **nije** lokalni ekstrem.
- Ako su ti predznaci različiti, onda f ima lokalni ekstrem u točki x_0, i to:
- **lokalni minimum** ako funkcija f' na intervalu $\langle a,\ x_0\rangle$ ima predznak -, a na intervalu $\langle x_0,\ b\rangle$ predznak $+$;
- **lokalni maksimum** u suprotnom slučaju (tj. ako funkcija f' na intervalu $\langle a,\ x_0\rangle$ ima predznak $+$, a na intervalu $\langle x_0,\ b\rangle$ predznak -).

4.13.2. DOVOLJAN UVJET ZA POSTOJANJE EKSTREMA

- **2. način(f''-test)**
- **Korak 1.** Odrediti $f'' := (f')'$.
- **Korak 2.** Za svaku stacionarnu točku x_0 izračunati $f''(x_0)$.
- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda f ima **lokalni minimum** u točki x_0.
- Ako je $f''(x_0) < 0$, onda f ima **lokalni maksimum** u točki x_0.
- Ako je $f''(x_0) = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja (nije moguće izvesti točan zaključak samo na temelju predznaka druge derivacije).
- **Važna napomena**: Prvi način "funkcionira" i u slučaju točaka u kojima f nema derivaciju (npr. $x = 0$ za funkciju $f(x) = |x|$), dok je drugi način pogodniji u slučaju jednostavnijih funkcija (polinomi, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija itd.).

4.13.3. ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

- Koristeći prvu derivaciju funkcije, moguće je odrediti na kojim *otvorenim intervalima* zadana funkcija strogo raste, a na kojima strogo pada. (Intervale na kojima je funkcija konstantna uobičajeno zasebno izdvajamo.)
- Pritom se nužno govori o *otvorenim intervalima* jer *bilo koju* derivaciju funkcije u točki, prema definiciji, razmatramo upravo na takvim intervalima.
- **Pravilo 1.** Funkcija f strogo raste na svim *otvorenim intervalima* sadržanima u presjeku svoje prirodne domene i skupa svih realnih rješenja nejednadžbe $f'(x) > 0$.
- **Pravilo 2.** Funkcija f strogo pada na svim *otvorenim intervalima* sadržanima u presjeku svoje prirodne domene i skupa svih realnih rješenja nejednadžbe $f'(x) < 0$.

4.13.3. ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

- Dakle, da bismo odredili intervale strogoga rasta i intervale strogoga pada neke funkcije, trebamo riješiti *nejednadžbe* $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$, te pogledati presjek skupa svih rješenja svake pojedine nejednadžbe i prirodne domene zadane funkcije.
- Prvi presjek je skup na kojemu je f strogo rastuća funkcija.
- Drugi presjek je skup na kojemu je f strogo padajuća funkcija.
- U provedbi ovoga postupka preporučuje se koristiti prvi od dvaju načina za određivanje lokalnih ekstrema. Tako se praktički istim postupkom mogu zajednički odrediti i svi intervali monotonosti i svi lokalni ekstremi.
- Intervale strogoga rasta i intervale strogoga pada (zajedno s eventualnim intervalima na kojima je funkcija konstantna) jednim imenom nazivamo **intervali monotonosti**.

4.13.4. ODREĐIVANJE EKSTREMA NEPREKIDNE FUNKCIJE DEFINIRANE NA SEGMENTU

- Jedno od svojstava neprekidne funkcije definirane na segmentu je:
- *Svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima svoju najmanju*, *odnosno svoju najveću vrijednost* (vidjeti točku 4.6.)
- Te vrijednosti postižu se ili u stacionarnim točkama funkcije f ili u nekom od krajeva segmenta.
- Zbog toga prigodom određivanja *globalnih ekstrema* neprekidne funkcije f definirane na segmentu $[a, b]$ postupamo kao i prigodom određivanja lokalnih ekstrema, pri čemu dodatno moramo izračunati $f(a)$ i $f(b)$, te ih usporediti s vrijednostima funkcije f u stacionarnim točkama.
- U ovom slučaju **nije potrebno** primjenjivati dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije (iz točke 4.13.2.).

4.13.5. MODELIRANJE NEKIH EKSTREMALNIH ZADAĆA

- U mnogim praktičnim problemima problem iskazan riječima treba modelirati odgovarajućim *matematičkim modelom*, pa ga riješiti koristeći uobičajene tehnike diferencijalnoga računa.
- Pritom osobito treba pripaziti na *interpretaciju* (*značenje*) *varijabli* (nepoznanica) i *njihovo područje vrijednosti* jer neke varijable (npr. vrijeme) ne mogu biti strogo negativne.