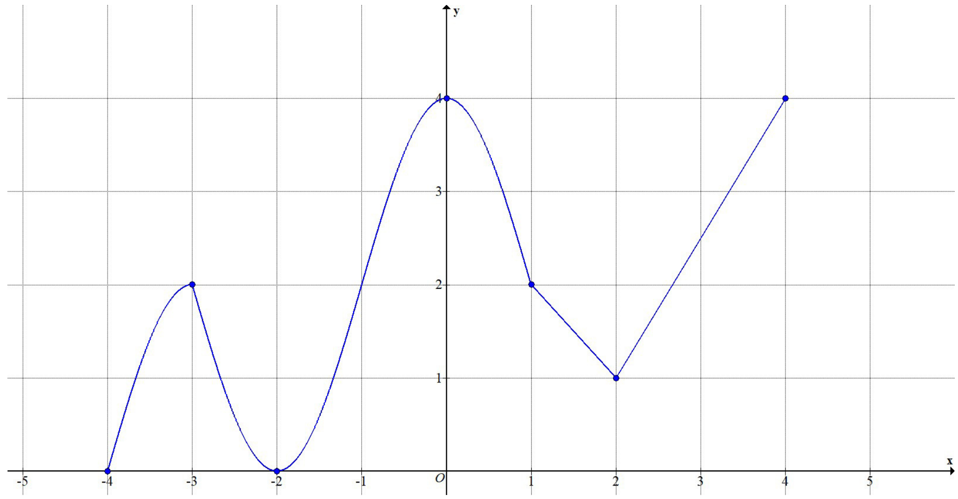
1. Na slici 1. prikazan je graf funkcije $f:[-4,4]\to[0,4]$.



Slika 1.

Odredite:

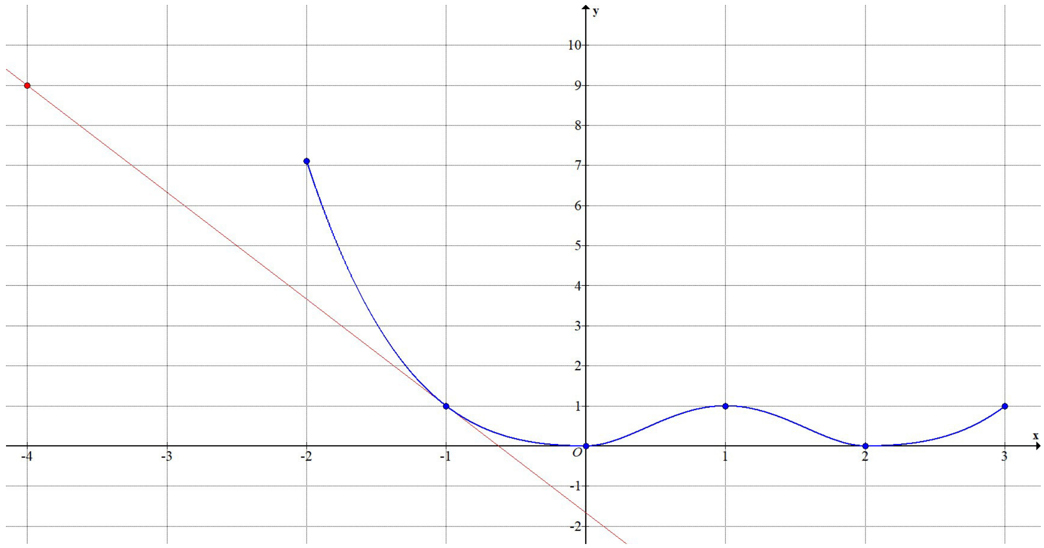
a) domenu funkcije *f*;
b) skup svih nultočaka funkcije *f*;
c) skup svih točaka u kojima *f* nema (obostranu) derivaciju;
d) sve intervale strogoga rasta funkcije *f*;
e) sve intervale strogoga pada funkcije *f*;
f) sve točke lokalnoga minimuma;
g) sve točke lokalnoga maksimuma;
h) sve točke globalnoga minimuma;
i) sve točke globalnoga maksimuma;
j) **najmanju** vrijednost funkcije *f* na njezinoj domeni.
k) **najveću** vrijednost funkcije *f* na njezinoj domeni.

Sve tvrdnje precizno obrazložite.

2. Na slici 2. plavom bojom je prikazan graf funkcije $g:[-2,3]\to[0,7]$. Odredite:

a) sve točke lokalnih ekstrema funkcije *g*;
b) sve točke globalnih ekstrema funkcije *g*;
c) **najmanju vrijednost** funkcije *g* na njezinoj domeni;
d) **najveću** vrijednost funkcije *g* na njezinoj domeni;
e) $\sum_{i=-1}^{2} g'(i)$.

Sve tvrdnje precizno obrazložite.



Slika 2.

3. Odredite sve intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$;

b) $g(t) = \dfrac{t^2 - 2 \cdot t + 2}{t - 1}$;

c) $h(u) = u^2 \cdot e^{-u}$.

4. Odredite sve intervale monotonosti i sve globalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = \sqrt{2 \cdot x - x^2}$;

b) $g : [-1,1] \to \mathbb{R},\ g(t) = 2 \cdot t^3 + 3 \cdot t^2$;

c) $h : [-1,4] \to \mathbb{R}, h(u) = 2 \cdot u^3 - 3 \cdot u^2 - 12 \cdot u$.

5. Od kartona površine 108 cm^2 treba napraviti kutiju što većega volumena. Kutija je kvadar kojemu je osnovka kvadrat i otvorena je s gornje strane. Odredite optimalni volumen kutije.

6. Od čelika treba napraviti lonac u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane tako da volumen lonca bude 5 litara. Pri kojim će dimenzijama lonca (iskazanima u cm s točnošću od 10^{-2}) za njegovu izradu biti utrošeno najmanje čelika? (Debljinu ruba lonca zanemarujemo.)

Rezultati zadataka

1.

a) $D(f)=[-4,4]$;

b) $N(f)=\{-4,-2\}$;

c) $S=\{-4,-3,1,2,4\}$;

d) $\langle -4,-3\rangle, \langle -2,0\rangle$ i $\langle 2,4\rangle$;

e) $\langle -3,-2\rangle$ i $\langle 0,2\rangle$;

f) $(-2,0)$ i $(2,1)$;

g) $(-3,2)$ i $(0,4)$;

h) $(-4,0)$ i $(-2,0)$;

i) $(0,4)$ i $(4,4)$;

j) 0;

k) 4.

2.

a) $(0,0),\ (1,1)$ i $(2,0)$;

b) $(-2,7),\ (0,0)$ i $(2,0)$;

c) 0;

d) 7;

e) $\sum_{i=-1}^{2} f'(i)=\frac{9-1}{-4-(-1)}+0+0+0=-\frac{8}{3}$.

3.

a) Lako odredimo $f'(x)=6\cdot(x^2+x-2)$, pa iz $f'(x)=0$ dobivamo $x_1=-2,\ x_2=1$. Nadalje, $f''(x)=12\cdot x+6$, pa su $f''(x_1)<0$ i $f''(x_2)>0$. Stoga f ima lokalni minimum $f(1)=-2$ za $x=1$, a lokalni maksimum $f(-2)=25$ za $x=-2$.

b) Lako odredimo $g'(t)=\frac{t\cdot(t-2)}{(t-1)^2}$, pa iz $g'(t)=0$ dobivamo $t_1=0,\ t_2=2$. Odaberemo $t_3=-1$, $t_4=0.5,\ t_5=1.5$ i $t_6=3$, pa dobijemo $g'(t_3)>0,\ g'(t_4)<0,\ g'(t_5)<0$ i $g'(t_6)>0$. Odatle zaključujemo da g ima lokalni maksimum $g(0)=-2$ za $t=0$, a lokalni minimum $g(2)=2$ za $t=2$.

c) Lako odredimo $h'(u)=u\cdot(2-u)\cdot e^{-u}$. Iz $f'(u)=0$ dobivamo $u_1=0,\ u_2=2$. Odaberemo $u_3=-1$, $u_4=1$ i $u_5=3$, pa dobijemo $h'(u_3)<0,\ h'(u_4)>0$ i $h'(u_5)<0$. Odatle zaključujemo da h ima lokalni minimum $h(0)=0$ za $u=0$, a lokalni maksimum $h(2)=4\cdot e^{-2}$ za $u=2$.

4. **a)** Lako odredimo $f'(x)=\frac{1-x}{\sqrt{2\cdot x-x^2}}$. Iz $f'(x)=0$ slijedi $x=1$. Budući da je $D(f)=[0,2]$, računamo $f(0)=f(2)=0$ i $f(1)=1$. Dakle, *f* ima globalni minimum 0 za $x=0$ i $x=2$, te globalni maksimum 1 za $x=1$. Iz dobivenoga razultata zaključujemo da *f* strogo raste na $\langle 0,1\rangle$, a strogo pada na $\langle 1,2\rangle$.

b) Lako odredimo $h'(t)=6\cdot t\cdot(t+1)$. Iz $h'(t)=0$ slijedi $t_1=-1,\ t_2=0$. Računamo: $h(-1)=0,\ h(0)=0,\ h(1)=5.$ Zaključujemo da *h* ima globalni minimum 0 za $t=0$ i globalni maksimum 5 za $t=1$. Odatle slijedi da *h* strogo pada na $\langle -1,0\rangle$, a strogo raste na $\langle 0,1\rangle$.

c) Lako odredimo $p'(u)=6\cdot(u+1)\cdot(u-2)$. Iz $p'(u)=0$ slijedi $u_1=-1,\ u_2=2$. Računamo: $p(-1)=7,\ p(2)=-20,\ p(4)=32.$ Zaključujemo da *p* ima globalni minimum –20 za $u=2$ i globalni maksimum 32 za $u=4$. Odatle slijedi da *p* strogo raste na $\langle -2,-1\rangle$ i $\langle 2,4\rangle$, a strogo pada na $\langle -1,2\rangle$.

5. Neka su x duljina brida osnovke kutije i y visina kutije (obje iskazane u cm). Kutiju tvore četiri pravokutnika čije su stranice duge x i y, te jedan kvadrat kojemu je duljina osnovice x. Njihova ukupna površina iznosi:

$$P=x^2+4\cdot x\cdot y\,.$$

Prema uvjetu zadatka, vrijednost te površine treba biti 108 cm^2, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$x^2+4\cdot x\cdot y=108\,.$$

Volumen kutije računamo prema izrazu $V=x^2\cdot y$. Vrijednost toga izraza treba maksimizirati, pa dobivamo sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned}&\max.\ V=x^2\cdot y\\&\text{pod uvjetima}\\&x^2+4\cdot x\cdot y=108,\\&x,y>0.\end{aligned}$$

Svedimo taj problem na problem optimizacije funkcije jedne realne varijable. Iz uvjeta $x^2+4\cdot x\cdot y=75$ izrazimo y:

$$y=\frac{108-x^2}{4\cdot x}\,,$$

pa taj izraz uvrstimo u izraz za volumen V:

$$V = x^2 \cdot \left(\frac{108 - x^2}{4 \cdot x}\right) = -\frac{1}{4} \cdot x^3 + 27 \cdot x.$$

Odredimo globalni maksimum ove funkcije uvažavajući uvjet $x > 0$. Prva i druga derivacija funkcije $V = V(x)$ su:

$$V' = -\frac{3}{4} \cdot x^2 + 27,$$
$$V'' = -\frac{3}{2} \cdot x.$$

Odredimo stacionarnu točku funkcije V uvažavajući uvjet $x > 0$. Imamo:

$$\begin{aligned}
&V'(x) = 0,\\
&-\frac{3}{4} \cdot x^2 + 27 = 0,\\
&-\frac{3}{4} \cdot x^2 = -27, \quad / : \left(-\frac{3}{4}\right)\\
&x^2 = 36, \quad / \sqrt{}\\
&x = 6.
\end{aligned}$$

Očito je $V''(6) = -\frac{3}{2} \cdot 6 = -9 < 0$, pa zaključujemo da za $x = 6$ funkcija V ima lokalni maksimum.

Pokažimo da je taj maksimum ujedno i globalni maksimum funkcije V na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. Uzimajući npr. $x = 1$ i $x = 7$ lako vidimo da vrijede nejednakosti $V'(1) > 0$, $V'(7) < 0$, pa V raste na intervalu $\langle 0, 6 \rangle$, a pada na intervalu $\langle 6, +\infty \rangle$. Zbog toga za $x = 6$ funkcija V ima globalni maksimum na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

Preostaje izračunati optimalnu visinu kutije:

$$y = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3.$$

Dakle, optimalne dimenzije kutije (iskazane u cm) su $(x^*, y^*) = (6, 3)$. Optimalni volumen kutije iznosi $V^* = (x^*)^2 \cdot y^* = 6^2 \cdot 3 = 108 \text{ cm}^3$.

6. Neka su r polumjer osnovke lonca i h njegova visina. Oplošje lonca je $O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$, a obujam $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$. Zbog toga tražimo najmanju vrijednost funkcije

$$O(r, h) = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

uz uvjete

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 5000,$$
$$r, h > 0.$$

Iz prvoga je uvjeta

$$h = \frac{5000}{r^2 \cdot \pi},$$

pa problem svodimo na traženje najmanje vrijednosti funkcije $O(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{5000}{r}$ na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$.

Lako se dobiva $O'(r) = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3 - 10000}{r^2}$, te $O''(r) = \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3 + 20000}{r^3} > 0$ za svaki $r > 0$.

Iz $O'(r) = 0$ slijedi $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11.68$ cm, pa je $h = \frac{5000}{r^2 \cdot \pi} = \sqrt{\frac{5000}{\pi}} = r \approx 11.68$ cm.

Preostaje pokazati da O postiže globalni minimum za $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11.68$. Odaberemo $r_1 = 1$ i $r_2 = 12$, pa lako utvrdimo: $O'(1) < 0$ i $O'(12) > 0$. To znači da funkcija O strogo pada na intervalu $\left\langle 0, \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \right\rangle$, a strogo raste na intervalu $\left\langle \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}, +\infty \right\rangle$. Dakle, za izračunani r se postiže globalni minimum, a to smo i željeli pokazati.