4.13. EKSTREMI REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

ODREĐIVANJE EKSTREMA.
INTERVALI MONOTONOSTI FUNKCIJE.
MODELIRANJE NEKIH EKSTREMALNIH ZADAĆA.

4.13.1. STACIONARNA TOČKA

- Fermatov poučak iz točke 4.12. može se formulirati i ovako:
- *Ako realna funkcija f ima lokalni ekstrem u točki* x_0, *onda ili funkcija f nema derivaciju u toj točki ili vrijedi* $f'(x_0) = 0$.
- To znači da sve kandidate za lokalne ekstreme *u točkama u kojima funkcija f ima derivaciju* treba tražiti među svim onim rješenjima jednadžbe $f'(x) = 0$ koja pripadaju prirodnoj domeni funkcije f.
- Svako rješenje jednadžbe $f'(x) = 0$ koje pripada prirodnoj domeni funkcije f naziva se *stacionarna točka*.
- Svaki lokalni ekstrem (u kojemu funkcija ima derivaciju) je stacionarna točka, ali svaka stacionarna točka ne mora biti lokalni ekstrem.
- Npr. $f(x) = x^3$ ima stacionarnu točku $x_0 = 0$, ali ta točka nije lokalni ekstrem funkcije f.

4.13.2. DOVOLJAN UVJET ZA POSTOJANJE EKSTREMA

- Je li neka stacionarna točka x_0 doista točka u kojoj *derivabilna* funkcija f ima lokalni ekstrem, moguće je provjeriti na dva uobičajena načina:
- **1.način:**
- Odrediti *bilo koji otvoreni* interval $\langle a,b\rangle \subseteq D(f)$ takav da je $x_0 \in \langle a,b\rangle$, da je f derivabilna na $\langle a,b\rangle$ i da vrijedi $f\,'(x) \neq 0$, $\forall x \in \langle a,b\rangle \setminus \{x_0\}$.
- Odrediti predznak funkcije $f\,'$ na intervalima $\langle a,x_0\rangle$ i $\langle x_0,b\rangle$.
- Ako se ti predznaci podudaraju, x_0 **nije** lokalni ekstrem.
- Ako su ti predznaci različiti, onda f ima lokalni ekstrem u točki x_0, i to:
- **lokalni minimum** ako funkcija $f\,'$ na intervalu $\langle a,x_0\rangle$ ima predznak -, a na intervalu $\langle x_0,b\rangle$ predznak +;
- **lokalni maksimum** u suprotnom slučaju (tj. ako funkcija $f\,'$ na intervalu $\langle a,x_0\rangle$ ima predznak +, a na intervalu $\langle x_0,b\rangle$ predznak -).

4.13.2. DOVOLJAN UVJET ZA POSTOJANJE EKSTREMA

- 2. **način**(f''-test)
- **Korak 1.** Odrediti $f'' := (f')'$.
- **Korak 2.** Za svaku stacionarnu točku x_0 izračunati $f''(x_0)$.
- Ako je $f''(x_0) > 0$, onda f ima **lokalni minimum** u točki x_0.
- Ako je $f''(x_0) < 0$, onda f ima **lokalni maksimum** u točki x_0.
- Ako je $f''(x_0) = 0$, potrebna su dodatna ispitivanja (nije moguće izvesti točan zaključak samo na temelju predznaka druge derivacije).
- **Važna napomena**: Prvi način "funkcionira" i u slučaju točaka u kojima f nema derivaciju (npr. $x = 0$ za funkciju $f(x) = |x|$), dok je drugi način pogodniji u slučaju jednostavnijih funkcija (polinomi, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija itd.).

4.13.3. ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

- Koristeći prvu derivaciju funkcije, moguće je odrediti na kojim *otvorenim intervalima* zadana funkcija strogo raste, a na kojima strogo pada. (Intervale na kojima je funkcija konstantna uobičajeno zasebno izdvajamo.)
- Pritom se nužno govori o *otvorenim intervalima* jer *bilo koju* derivaciju funkcije u točki, prema definiciji, razmatramo upravo na takvim intervalima.
- **Pravilo 1.** Funkcija f strogo raste na svim *otvorenim intervalima* sadržanima u presjeku svoje prirodne domene i skupa svih realnih rješenja nejednadžbe $f'(x) > 0$.
- **Pravilo 2.** Funkcija f strogo pada na svim *otvorenim intervalima* sadržanima u presjeku svoje prirodne domene i skupa svih realnih rješenja nejednadžbe $f'(x) < 0$.

4.13.3. ODREĐIVANJE INTERVALA MONOTONOSTI

- Dakle, da bismo odredili intervale strogoga rasta i intervale strogoga pada neke funkcije, trebamo riješiti *nejednadžbe* $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$, te pogledati presjek skupa svih rješenja svake pojedine nejednadžbe i prirodne domene zadane funkcije.
- Prvi presjek je skup na kojemu je f strogo rastuća funkcija.
- Drugi presjek je skup na kojemu je f strogo padajuća funkcija.
- U provedbi ovoga postupka preporučuje se koristiti prvi od dvaju načina za određivanje lokalnih ekstrema. Tako se *praktički istim* postupkom mogu zajednički odrediti i svi intervali monotonosti i svi lokalni ekstremi.
- Intervale strogoga rasta i intervale strogoga pada (zajedno s eventualnim intervalima na kojima je funkcija konstantna) jednim imenom nazivamo **intervali monotonosti**.

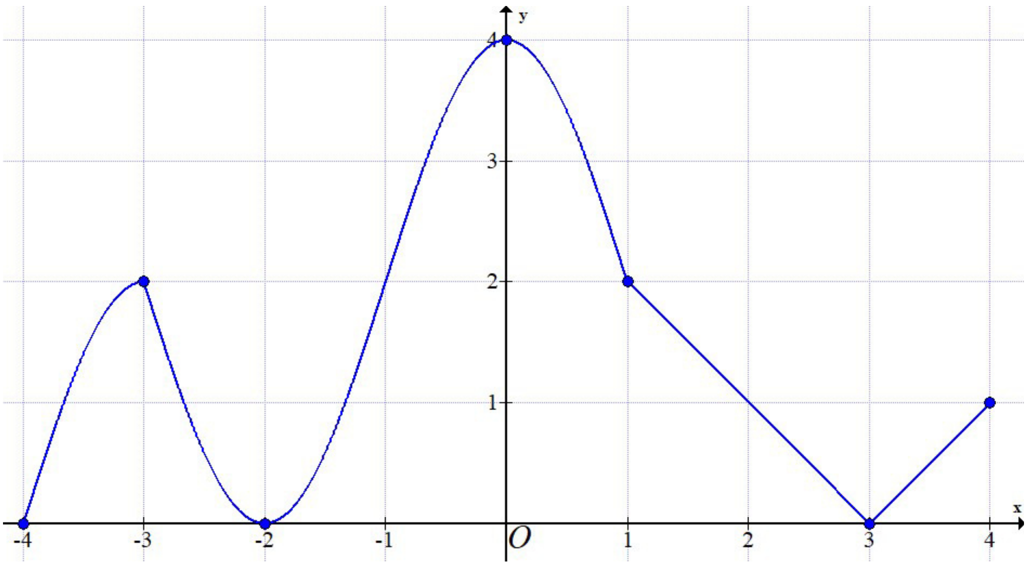
4.13.4. ODREĐIVANJE EKSTREMA NEPREKIDNE FUNKCIJE DEFINIRANE NA SEGMENTU

- Jedno od svojstava neprekidne funkcije definirane na segmentu je:
- *Svaka neprekidna funkcija definirana na segmentu ima svoju najmanju*, *odnosno svoju najveću vrijednost* (vidjeti točku 4.6.)
- Te vrijednosti postižu se ili u stacionarnim točkama funkcije f ili u nekom od krajeva segmenta.
- Zbog toga prigodom određivanja *globalnih ekstrema* neprekidne funkcije f definirane na segmentu $[a, b]$ postupamo kao i prigodom određivanja lokalnih ekstrema, pri čemu dodatno moramo izračunati $f(a)$ i $f(b)$, te ih usporediti s vrijednostima funkcije f u stacionarnim točkama.
- U ovom slučaju **nije potrebno** primjenjivati dovoljne uvjete za postojanje ekstrema funkcije (iz točke 4.13.2.).

4.13.5. MODELIRANJE NEKIH EKSTREMALNIH ZADAĆA

- U mnogim praktičnim problemima problem iskazan riječima treba modelirati odgovarajućim *matematičkim modelom*, pa ga riješiti koristeći uobičajene tehnike diferencijalnoga računa.
- Pritom osobito treba pripaziti na *interpretaciju* (*značenje*) *varijabli* (nepoznanica) i *njihovo područje vrijednosti* jer neke varijable (npr. vrijeme) ne mogu biti strogo negativne.

1. Na slici 1. prikazan je graf funkcije f na njezinoj domeni.



Slika 1.

Odredite:

a) domenu funkcije f;
b) skup svih nultočaka funkcije f;
c) skup svih točaka u kojima f nema (obostranu) derivaciju;
d) sve intervale strogoga rasta funkcije f;
e) sve intervale strogoga pada funkcije f;
f) sve točke lokalnoga minimuma;
g) sve točke lokalnoga maksimuma;
h) sve točke globalnoga minimuma;
i) sve točke globalnoga maksimuma;
j) **najmanju** vrijednost funkcije f na njezinoj domeni.
k) **najveću** vrijednost funkcije f na njezinoj domeni.

Sve tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenja:

a) $D(f) = [-4, 4]$;
b) $N(f) = \{-4, -2, 3\}$;
c) $S = \{-4, -3, 1, 3, 4\}$;
d) $\langle -4, -3 \rangle, \langle -2, 0 \rangle$ i $\langle 3, 4 \rangle$;
e) $\langle -3, -2 \rangle$ i $\langle 0, 3 \rangle$;
f) $(-2, 0)$ i $(3, 0)$;
g) $(-3, 2)$ i $(0, 4)$;
h) $(-4, 0), (-2, 0)$ i $(3, 0)$;
i) $(0, 4)$;
j) 0;
k) 4.

2. Na slici 2. plavom bojom je prikazan graf funkcije g na njezinoj domeni. Odredite:

a) domenu funkcije g;
b) sliku funkcije g;
c) sve točke lokalnih ekstrema funkcije g;
d) sve točke globalnih ekstrema funkcije g;
e) **najmanju vrijednost** funkcije g na njezinoj domeni;
f) **najveću** vrijednost funkcije g na njezinoj domeni;
g) $\sum_{i=-1}^{2} g'(i)$.

Sve tvrdnje precizno obrazložite.

Slika 2.

Rješenja:

a) $D(g) = [-2, 3]$;

b) $\text{Im}(g) = [0, 7]$;

c) $(0,0)$, $(1,1)$ i $(2,0)$;

d) $(-2,7)$, $(0,0)$ i $(2,0)$;

e) 0;

f) 7;

g) $\sum_{i=-1}^{2} f'(i) = \frac{9-1}{-4-(-1)} + 0 + 0 + 0 = -\frac{8}{3}$.

3. Odredite sve intervale monotonosti i sve lokalne ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 5$;

Rješenje: Lako odredimo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 2 \cdot x - 12 \cdot 1 + 0 = \\ &= 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 12 = \\ &= 6 \cdot (x^2 + x - 2). \end{aligned}$$

Iz $f'(x) = 0$, odnosno $x^2 + x - 2 = 0$ dobivamo $x_1 = -2,\ x_2 = 1$.

U ovom je slučaju jednostavnije primijeniti $f''-$ test. Najprije imamo:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6 \cdot 2 \cdot x + 6 \cdot 1 = \\ &= 12 \cdot x + 6 \end{aligned},$$

pa su:

$$\begin{aligned} f''(x_1) &= f''(-2) = \\ &= 12 \cdot (-2) + 6 = \\ &= -18 < 0, \\ f''(x_2) &= f''(1) = \\ &= 12 \cdot 1 + 6 = \\ &= 18 > 0 \end{aligned}.$$

Zbog toga f ima lokalni minimum

$$f(1) = 2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 12 \cdot 1 + 5 = -2$$

za $x = 1$, a lokalni maksimum

$$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 5 = 25$$

za $x = -2$. Sada lako zaključujemo da f raste na intervalima $\langle -\infty, -2 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, a pada na intervalu $\langle -2, 1 \rangle$.

b) $g(t)=\dfrac{t^2-2\cdot t+2}{t-1}$;

Rješenje: Odredimo:

$$\begin{aligned} g'(t)&=\frac{\left(t^2-2\cdot t+2\right)'\cdot(t-1)-\left(t^2-2\cdot t+2\right)\cdot(t-1)'}{(t-1)^2}=\\ &=\frac{(2\cdot t-2)\cdot(t-1)-\left(t^2-2\cdot t+2\right)\cdot(1-0)}{(t-1)^2}=\\ &=\frac{2\cdot t^2-4\cdot t+2-t^2+2\cdot t-2}{(t-1)^2}=\\ &=\frac{t^2-2\cdot t}{(t-1)^2}=\\ &=\frac{t\cdot(t-2)}{(t-1)^2}.\end{aligned}$$

Iz $g'(t)=0$, odnosno $t\cdot(t-2)=0$, dobivamo $t_1=0,\ t_2=2$.

Prirodna domena zadane funkcije je $D(g)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Podijelimo je na ukupno četiri dijela, pa odredimo predznak funkcije g' na svakom dijelu:

-∞		0		1		2		+∞
g'	+		-		-		+	

Primijetimo da je, zbog nejednakosti $(t-1)^2\geq 0,\ \forall t\in\mathbb{R},$ predznak vrijednosti $g'(t)$ jednak predznaku umnoška $t\cdot(t-2)$.

Odaberemo $t_3=-1,\ t_4=0.5,\ t_5=1.5$ i $t_6=3$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} &g'(-1)>0,\\ &g'(0.5)<0,\\ &g'(1.5)<0 \text{ i}\\ &g'(3)>0.\end{aligned}$$

Odatle zaključujemo da g ima lokalni maksimum

$$g(0)=\frac{0^2-2\cdot 0+2}{0-1}=-2$$

za $t = 0$, a lokalni minimum

$$g(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 2}{2 - 1} = 2$$

za $t = 2$.

Pitanje (prividni paradoks): Vrijednost maksimuma je u ovom podzadatku strogo manja od vrijednosti minimuma. Je li riječ o pogreški u postupku ili...?

c) $h(u) = u^2 \cdot \mathrm{e}^{-u}$.

Rješenje: Odredimo:

$$\begin{aligned} h'(u) &= \left(u^2\right)' \cdot \mathrm{e}^{-u} + u^2 \cdot \left(\mathrm{e}^{-u}\right)' = \\ &= 2 \cdot u \cdot \mathrm{e}^{-u} + u^2 \cdot \left(-\mathrm{e}^{-u}\right) = \\ &= u \cdot (2 - u) \cdot \mathrm{e}^{-u}. \end{aligned}$$

Iz $h'(u) = 0$, zbog $e^{-u} > 0,\ \forall u \in \mathbb{R},$ slijedi $u \cdot (2 - u) = 0,$ a odatle su $u_1 = 0,\ u_2 = 2.$

Primijetimo da je $D(h) = \mathbb{R}.$ Zbog toga skup $\mathbb{R}$ podijelimo na ukupno tri dijela i odredimo predznak funkcije h' na svakom dijelu:

-∞		0		2		+∞
h'	-		+		-	

Odaberemo $u_3 = -1,\ u_4 = 1$ i $u_5 = 3$, pa dobijemo:

$$h'(-1) < 0,$$
$$h'(1) > 0 \text{ i}$$
$$h'(3) < 0.$$

Odatle zaključujemo da h ima lokalni minimum

$$h(0) = 0^2 \cdot \mathrm{e}^{-0} = 0 \cdot 1 = 0$$

za $u = 0$, a lokalni maksimum

$$h(2) = 2^2 \cdot \mathrm{e}^{-2} = 4 \cdot \mathrm{e}^{-2}$$

za $u = 2$.

4. Odredite sve intervale monotonosti i sve **globalne** ekstreme sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x)=\sqrt{2\cdot x-x^2}$;

Rješenje: Odredimo najprije prirodnu domenu funkcije *f*.

Iz nejednadžbe $2\cdot x-x^2\geq 0$ dobivamo $x\in[0,2]$, pa je $D(f)=[0,2]$.

Nadalje, odredimo:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot x-x^2}}\cdot\left(2\cdot x-x^2\right)'=\\&=\frac{1}{2\cdot\sqrt{2\cdot x-x^2}}\cdot(2\cdot 1-2\cdot x)=\\&=\frac{1-x}{\sqrt{2\cdot x-x^2}}.\end{aligned}$$

Iz $f'(x)=0$, odnosno $1-x=0$, slijedi $x=1$.

Budući da je $D(f)=[0,2]$, računamo

$$\begin{aligned}&f(0)=f(2)=0,\\&f(1)=1.\end{aligned}$$

Dakle, *f* ima globalni minimum 0 za $x=0$ i $x=2$, te globalni maksimum 1 za $x=1$.

Iz dobivenoga rezultata zaključujemo da *f* strogo raste na $\langle 0,1\rangle$, a strogo pada na $\langle 1,2\rangle$.

b) $h:[-1,1]\to\mathbb{R},\ h(t)=2\cdot t^3+3\cdot t^2;$

Rješenje: Najprije odredimo:

$$\begin{aligned} h'(t) &= 2\cdot 3\cdot t^2+3\cdot 2\cdot t= \\ &= 6\cdot t^2+6\cdot t= \\ &= 6\cdot t\cdot(t+1). \end{aligned}$$

Iz $h'(t)=0$ slijedi $t\cdot(t+1)=0,$ a odatle je $t_1=-1,\ t_2=0$. Računamo:

$$\begin{aligned} &h(-1)=1, \\ &h(0)=0, \\ &h(1)=5. \end{aligned}$$

Zaključujemo da h ima globalni minimum 0 za $t=0$ i globalni maksimum 5 za $t=1$. Odatle slijedi da h strogo pada na $\langle -1,0\rangle$, a strogo raste na $\langle 0,1\rangle$.

c) $h:[-1,4]\to\mathbb{R},\ h(u)=2\cdot u^3-3\cdot u^2-12\cdot u.$

Rješenje: Odredimo:

$$\begin{aligned} h'(u) &= 2\cdot 3\cdot u^2-3\cdot 2\cdot u-12\cdot 1= \\ &= 6\cdot u^2-6\cdot u-12= \\ &= 6\cdot\left(u^2-u-2\right)= \\ &= 6\cdot(u+1)\cdot(u-2) \end{aligned}$$

Iz $h'(u)=0$ slijedi $(u+1)\cdot(u-2)=0,$ a odatle je $u_1=-1,\ u_2=2$. Računamo:

$$\begin{aligned} &h(-1)=7, \\ &h(2)=-20, \\ &h(4)=32. \end{aligned}$$

Zaključujemo da h ima globalni minimum –20 za $u=2$ i globalni maksimum 32 za $u=4$. Odatle slijedi da h strogo raste na $\langle 2,4\rangle$, a strogo pada na $\langle -1,2\rangle$.

5. Od kartona površine 108 cm^2 treba napraviti kutiju što većega volumena. Kutija je kvadar kojemu je osnovka kvadrat i otvorena je s gornje strane. Odredite optimalni volumen kutije.

Rješenje: Neka su x duljina brida osnovke kutije i y visina kutije (obje iskazane u cm). Kutiju tvore četiri pravokutnika čije su stranice duge x i y, te jedan kvadrat kojemu je duljina osnovice x. Njihova ukupna površina iznosi:

$$P = x^2 + 4 \cdot x \cdot y\,.$$

Prema uvjetu zadatka, vrijednost te površine treba biti 108 cm^2, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$x^2 + 4 \cdot x \cdot y = 108\,.$$

Volumen kutije računamo prema izrazu $V = x^2 \cdot y$. Vrijednost toga izraza treba maksimizirati, pa dobivamo sljedeći matematički model:

$$\begin{aligned}
&\max.\ V = x^2 \cdot y\\
&\text{pod uvjetima}\\
&x^2 + 4 \cdot x \cdot y = 108,\\
&x, y > 0.
\end{aligned}$$

Svedimo taj problem na problem optimizacije funkcije jedne realne varijable.

Iz uvjeta $x^2 + 4 \cdot x \cdot y = 108$ izrazimo y:

$$y = \frac{108 - x^2}{4 \cdot x}\,.$$

Prema drugome je uvjetu $y > 0$, pa zbog uvjeta $x > 0$ imamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{108 - x^2}{4 \cdot x} > 0, \qquad / \cdot 4 \cdot x > 0\\
&108 - x^2 > 0,\\
&x \in \left\langle -\sqrt{108}, \sqrt{108} \right\rangle, \quad \text{(zbog uvjeta } x > 0)\\
&x \in \left\langle 0, \sqrt{108} \right\rangle,\\
&x \in \left\langle 0, 6 \cdot \sqrt{3} \right\rangle.
\end{aligned}$$

Izraz

$$y = \frac{108 - x^2}{4 \cdot x}$$

uvrstimo u izraz za volumen V :

$$V = V(x) = x^2 \cdot \left(\frac{108 - x^2}{4 \cdot x} \right) =$$
$$= \frac{-1}{4} \cdot x^3 + 27 \cdot x.$$

Odredimo globalni maksimum ove funkcije uvažavajući uvjet $x \in \left\langle 0, 6 \cdot \sqrt{3} \right\rangle$. Prva i druga derivacija funkcije V su:

$$V'(x) = -\frac{1}{4} \cdot 3 \cdot x^2 + 27 \cdot 1 =$$
$$= \frac{-3}{4} \cdot x^2 + 27,$$
$$V''(x) = \frac{-3}{4} \cdot 2 \cdot x + 0 =$$
$$= \frac{-3}{2} \cdot x.$$

Odredimo stacionarnu točku funkcije V uvažavajući uvjet $x \in \left\langle 0, 6 \cdot \sqrt{3} \right\rangle$. Imamo:

$$V'(x) = 0,$$
$$\frac{-3}{4} \cdot x^2 + 27 = 0,$$
$$\frac{-3}{4} \cdot x^2 = -27, \quad / : \left(-\frac{3}{4} \right)$$
$$x^2 = 36, \quad / \sqrt{\ }$$
$$x = 6.$$

Očito je

$$V''(6) = \frac{-3}{2} \cdot 6 = -9 < 0,$$

pa zaključujemo da za $x = 6$ funkcija V ima *lokalni* maksimum.

Pokažimo da je taj maksimum ujedno i globalni maksimum funkcije V na intervalu $\left\langle 0, 6\cdot\sqrt{3}\right\rangle$. Uzimajući npr. $x=1$ i $x=7$ lako vidimo da vrijede nejednakosti

$$\begin{aligned} V'(1) &> 0, \\ V'(7) &< 0, \end{aligned},$$

pa V strogo raste na intervalu $\langle 0,6\rangle$, a strogo pada na intervalu $\left\langle 6, 6\cdot\sqrt{3}\right\rangle$. Zbog toga za $x=6$ funkcija V ima globalni maksimum na intervalu $\left\langle 0, 6\cdot\sqrt{3}\right\rangle$.

Preostaje izračunati optimalnu visinu kutije:

$$y=\frac{108-6^2}{4\cdot 6}=3.$$

Dakle, optimalne dimenzije kutije (iskazane u cm) su $\left(x^*, y^*\right)=(6,3)$. Optimalni volumen kutije iznosi

$$V^*=\left(x^*\right)^2\cdot y^*=6^2\cdot 3=108\text{ cm}^3.$$

6. Od čelika treba napraviti lonac u obliku uspravnoga kružnoga valjka otvorenoga s jedne strane tako da volumen lonca bude 5 litara. Pri kojim će dimenzijama lonca (iskazanima u cm s točnošću od 10^{-2}) za njegovu izradu biti utrošeno najmanje čelika? (Debljinu ruba lonca zanemarujemo.)

Rješenje: Neka su r polumjer osnovke lonca i h njegova visina. Oplošje lonca je

$$O = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h\,,$$

a volumen

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h\,.$$

Zbog toga tražimo najmanju vrijednost funkcije

$$O(r,h) = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h$$

uz uvjete

$$r^2 \cdot \pi \cdot h = 5000,$$
$$r, h > 0.$$

Iz prvoga je uvjeta

$$h = \frac{5000}{r^2 \cdot \pi}.$$

Budući da su svi članovi razlomka na desnoj strani gornje jednakosti strogo pozitivni, zaključujemo da vrijedi nejednakost $h > 0$.

Tako problem svodimo na traženje najmanje vrijednosti funkcije

$$O(r) = r^2 \cdot \pi + \frac{10000}{r}$$

na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$. (Taj interval je domena funkcije O.)

Lako se dobiva:

$$\begin{aligned} O'(r) &= \pi \cdot 2 \cdot r + \frac{0 \cdot r - 10000 \cdot 1}{r^2} = \\ &= \pi \cdot 2 \cdot r - \frac{10000}{r^2} = \\ &= \frac{2 \cdot \pi \cdot r^3 - 10000}{r^2}. \end{aligned}$$

Iz $O'(r) = 0$ slijedi

$$r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \approx 11.68 \text{ cm},$$

pa je

$$\begin{aligned} h &= \frac{5000}{r^2 \cdot \pi} = \\ &= \sqrt{\frac{5000}{\pi}} = r \approx 11.68 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Preostaje pokazati da O postiže globalni minimum za $r = \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}$. Odaberemo $r_1 = 1$ i $r_2 = 12$, pa lako utvrdimo:

$$\begin{aligned} &O'(1) < 0, \\ &O'(12) > 0. \end{aligned}$$

To znači da funkcija O strogo pada na intervalu $\left\langle 0, \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}} \right\rangle$, a strogo raste na intervalu $\left\langle \sqrt[3]{\frac{5000}{\pi}}, +\infty \right\rangle$. Dakle, za izračunani r se postiže globalni minimum, a to smo i željeli pokazati.