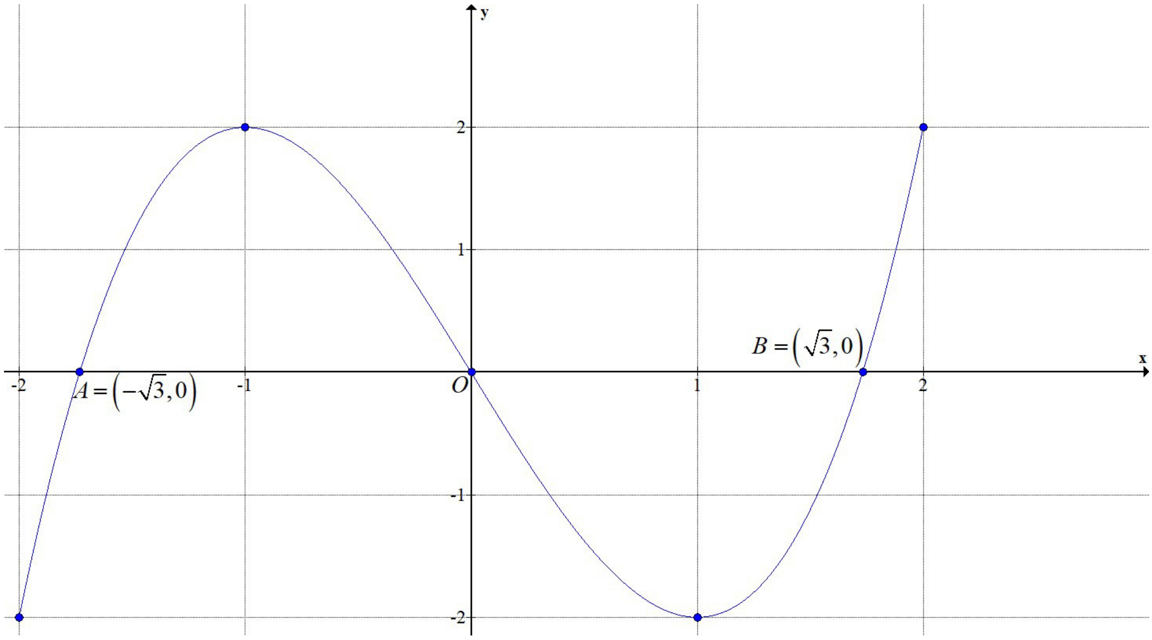
**1.** Na slici 1. prikazan je graf **prve derivacije** funkcije $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$ .




Slika 1.

Odredite sve:

a) intervale rasta funkcije *f*;
b) intervale pada funkcije *f*;
c) **apscise** točaka lokalnih ekstrema funkcije *f* i pripadne tipove ekstrema;
d) intervale konveksnosti funkcije *f*;
e) intervale konkavnosti funkcije *f*;
f) **apscise** točaka pregiba grafa funkcije *f*.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

*Rješenja*:

**a)** $\left\langle -\sqrt{3},0\right\rangle$ i $\left\langle \sqrt{3},2\right\rangle$;

**b)** $\left\langle -2,-\sqrt{3}\right\rangle$ i $\left\langle 0,\sqrt{3}\right\rangle$;

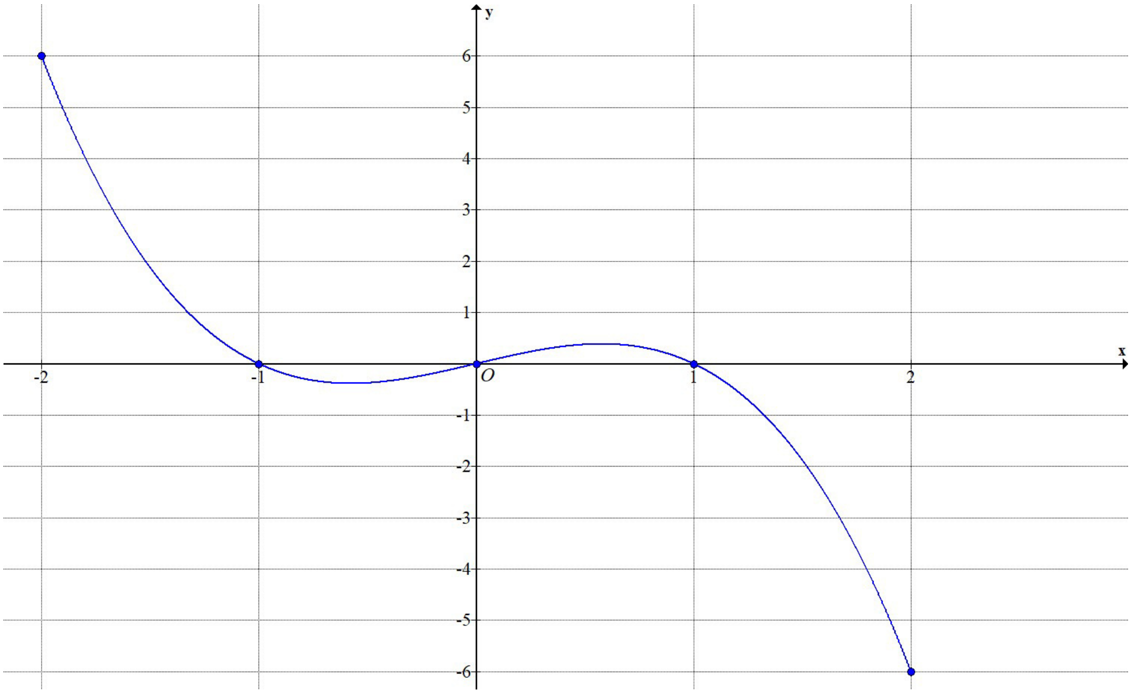
**c)** apscise točaka lokalnoga minimuma: $x_1=-\sqrt{3}$ i $x_2=\sqrt{3}$,
apscisa točke lokalnoga maksimuma: $x_3=0$;

**d)** $\left\langle -2,-1\right\rangle$ i $\left\langle 1,2\right\rangle$;

**e)** $\left\langle -1,1\right\rangle$;

**f)** $x_4=-1$ i $x_5=1$.

**2.** Na slici 2. prikazan je graf **druge derivacije** funkcije $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$.




Slika 2.

Odredite sve:

a) intervale rasta **prve** derivacije funkcije $g$;
b) intervale pada **prve** derivacije funkcije $g$;
c) **apscise** točaka pregiba grafa funkcije $g$.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

*Rješenja*:

**a)** $\langle -2, -1 \rangle$ i $\langle 0, 1 \rangle$;
**b)** $\langle -1, 0 \rangle$ i $\langle 1, 2 \rangle$;
**c)** $-1,\ 0$ i $1$.

**3.** Neka je $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ proizvoljan polinom stupnja 2 čiji je vodeći koeficijent jednak *a*. Dokažite da je:

a) *p* konkavna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a<0$;

b) *p* konveksna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a>0$.

*Rješenje*: Neka je $p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c$, pri čemu su $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Lako se provjeri da je $p''(x)=2\cdot a$. Taj izraz je strogo pozitivan ako i samo ako je $a>0$, a strogo negativan ako i samo ako je $a<0$. Odatle slijede obje tvrdnje.

**4.** U točkama pregiba krivulje $K \ldots y = x^4 - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$ povučene su tangente na krivulju. Izračunajte površinu lika kojega sve povučene tangente zatvaraju s osi ordinata.

*Rješenje*: Odredimo najprije prvu i drugu derivaciju funkcije koja zadaje krivulju $K$:

$$y' = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2,$$
$$y'' = 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x.$$

Iz jednadžbe $y'' = 0$ slijedi $12 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0$, odnosno $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Zbog toga promatramo zadanu funkciju i njezinu drugu derivaciju na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$, $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$.

| | -∞ | | 0 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y''$ | | + | | - | | + | |

Odabirom npr. $x = -1,\ x = -0.5$ i $x = 2$ zaključujemo da je funkcija $y$ konveksna na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, a konkavna na $\langle 0,\ 1 \rangle$. Dakle, točke pregiba su $T_1 = (0, y(0)) = = (0, -1)$ i $T_2 = (1, y(1)) = (1,\ 0)$.

Koeficijenti smjera tangenata povučenih u tim točkama su:

$$k_1 = y'(0) = \left(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2\right)_{x=0} = 2$$
$$k_2 = y'(1) = \left(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2\right)_{x=1} = 0.$$

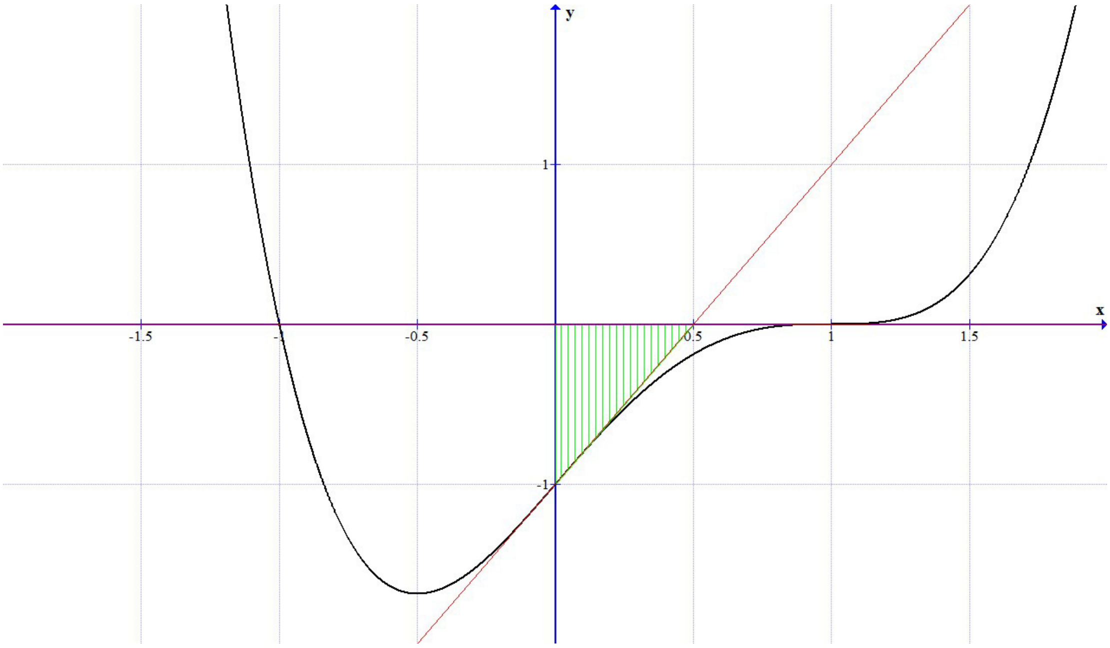
Lako se dobije da su jednadžbe tangenata:

$$t_1 \ldots y = 2 \cdot (x - 0) + (-1) \Leftrightarrow y = 2 \cdot x - 1 \Leftrightarrow 2 \cdot x - y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1,$$
$$t_2 \ldots y = 0 \cdot (x - 1) + 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Nacrtamo li te pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobivamo sliku 3.

Koristeći tu sliku lako vidimo da je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \text{ kv. jed.}$$




Slika 3.

5. Pokažite da graf funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ima točno tri točke pregiba i da sve tri točke pripadaju istom pravcu. Odredite jednadžbu toga pravca.

*Rješenje*: Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Dobijemo:

$$f'(x)=\frac{(1+0)\cdot\left(x^2+1\right)-(x+1)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2}=-\frac{x^2+2\cdot x-1}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$f''(x)=-\frac{(2\cdot x+2)\cdot\left(x^2+1\right)^2-\left(x^2+2\cdot x-1\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+1\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=-\frac{\left(x^2+1\right)\cdot\left((2\cdot x+2)\cdot\left(x^2+1\right)-\left(x^2+2\cdot x-1\right)\cdot 4\cdot x\right)}{\left(x^2+1\right)^4}=$$

$$=-\frac{\left(2\cdot x^3+2\cdot x^2+2\cdot x+2-4\cdot x^3-8\cdot x^2+4\cdot x\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2\cdot\left(x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(\left(x^3-1\right)+\left(3\cdot x^2-3\cdot x\right)\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{2\cdot\left((x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)+3\cdot x\cdot(x-1)\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+4\cdot x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}.$$

Iz jednadžbe $f''(x)=0$ slijedi $x_1=-2-\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{3}-2$ i $x_3=1$. Lako vidimo da je $D(f)=D\left(f'\right)=D\left(f''\right)=\mathbb{R}$, pa funkciju $f$ i njezinu drugu derivaciju promatramo na intervalima $\left\langle-\infty,-2-\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle-2-\sqrt{3},\sqrt{3}-2\right\rangle$, $\left\langle\sqrt{3}-2,\ 1\right\rangle$ i $\left\langle1,+\infty\right\rangle$.

| $-\infty$ | $-2-\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}-2$ | $1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $y''$ | - | + | - | + |

Primijetimo da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $\left(x^2+1\right)^3>0$. Zbog toga je predznak funkcije $f''$ jednak predznaku izraza $(x-1)\cdot\left(x^2+4\cdot x+1\right)$.

Odaberemo $x\in\{-4,-1,0,2\}$, pa dobivamo:

$$f''(-4)<0,\ f''(-1)>0,\ f''(0)<0\ \text{ i }\ f''(2)>0.$$

Dakle, graf funkcije $f$ ima točno tri točke pregiba i to su:

$$T_1 = \left(-2-\sqrt{3}, f\left(-2-\sqrt{3}\right)\right) = \left(-2-\sqrt{3},\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$T_2 = \left(\sqrt{3}-2, f\left(\sqrt{3}-2\right)\right) = \left(\sqrt{3}-2,\ \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right),$$

$$T_3 = (1, f(1)) = (1,1).$$

Jednadžba pravca $T_1T_2$ glasi:

$$p\ldots\ y = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{4} - \frac{1-\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}-2-\left(-2-\sqrt{3}\right)} \cdot \left(x - \left(-2-\sqrt{3}\right)\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\cdot\sqrt{3}} \cdot \left(x+2+\sqrt{3}\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4}\cdot\left(x+2+\sqrt{3}\right) + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}\cdot x + \frac{3}{4}.$$

Pravcu $p$ očito pripada i točka $T_3$, što je i trebalo dokazati.

6. a) Odredite točku u kojoj funkcija $f(x) = \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right) \cdot e^x$ najsporije raste.

b) Postoji li točka u kojoj ta funkcija najbrže raste?

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

*Rješenje*: Uočimo da je $D(f) = \mathbb{R}$. Odredimo:

$$f'(x) = (2 \cdot x - 4) \cdot e^x + \left(x^2 - 4 \cdot x + 5\right) \cdot e^x = \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) \cdot e^x = (x-1)^2 \cdot e^x.$$

Očito vrijedi:

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

pa je $f$ rastuća na svojoj prirodnoj domeni. Brzinu rasta funkcije $f$ opisuje funkcija $f'$. Zbog toga tražimo globalne ekstreme funkcije $f'$.

Zbog gore navedene jednakosti zaključujemo da $f'$ ima globalni minimum jednak 0, i to u svim nultočkama te funkcije. Iz jednadžbe $f'(x) = 0$, tj. jednadžbe $(x-1)^2 = 0$ slijedi $x = 1$. Dakle, $f$ najsporije raste u točki $T = (1, f(1)) =$ $= (1, 2 \cdot e)$.

Lako se vidi da je $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, pa $f'$ nema globalni maksimum. To znači da **ne postoji** točka u kojoj funkcija $f$ najbrže raste.