4.14. KONVEKSNE I KONKAVNE FUNKCIJE.

INTERVALI KONKAVNOSTI I KONVEKSNOSTI. TOČKE PREGIBA (INFLEKSIJE).

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Pojam konveksnosti iznimno je važan u rješavanju mnogih *optimizacijskih* problema iz prakse jer se u njima – kao skupovi mogućih rješenja – pojavljuju upravo konveksni skupovi.
- Grubo rečeno, skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je *konveksan* ako za *svake* dvije točke A i B svaka točka dužine AB pripada skupu S.

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Pojam konveksnosti proširuje se i na realne funkcije jedne realne varijable.
- Formalna definicija je sljedeća:
- Realna funkcija f je **strogo konveksna** (ili, kraće, *konveksna*) ako za sve x_1, $x_2 \in D(f)$ vrijedi:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Može se pokazati da iz te definicije slijedi da graf funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1,\ f(x_1))$ i $T_2 = (x_2,\ f(x_2))$ dio grafa iznad intervala $\langle x_1,\ x_2\rangle$ nalazi se *ispod* dužine $\overline{T_1 T_2}$.
- Ekvivalentno, graf funkcije f iznad intervala $\langle x_1,\ x_2\rangle$ nalazi se *iznad* tangente povučene u bilo kojoj njegovoj točki u tom intervalu.

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- U praksi se, osim konveksnih funkcija, razmatraju i *po dijelovima konveksne* funkcije, tj. funkcije koje su konveksne na pravom podskupu svoje prirodne domene (ali ne i na cijeloj prirodnoj domeni).
- Zbog toga je u takvim slučajevima potrebno odrediti *intervale konveksnosti*, tj. intervale na kojima je zadana funkcija konveksna.

4.14.2. KONKAVNOST FUNKCIJE

- Dualni pojam pojmu konveksnosti je *konkavnost.*
- Realna funkcija f je **strogo konkavna** (ili, kraće, *konkavna*) ako za sve x_1, $x_2 \in D(f)$ vrijedi:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$

- U ovom slučaju graf funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1,\ f(x_1))$ i $T_2 = (x_2,\ f(x_2))$ dio grafa iznad intervala $\langle x_1,\ x_2\rangle$ nalazi se iznad dužine $T_1 T_2$.
- Graf funkcije f iznad intervala $\langle x_1,\ x_2\rangle$ nalazi se *ispod* tangente povučene u bilo kojoj njegovoj točki u tom intervalu.

4.14.3. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- U praksi su najčešći slučajevi kad je ista funkcija konveksna na jednom dijelu svoje prirodne domene, a konkavna na preostalom dijelu toga područja.
- Ta područja obično su "odvojena" jednom točkom. Ta se točka naziva **točka pregiba ili točka infleksije.**
- Točka pregiba „povezuje" konveksan dio grafa s konkavnim (i obratno).

4.14.3. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- Formalna definicija točke pregiba je:
- Točka $C = (c, f(c))$ je *točka pregiba* ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je f konveksna na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$ ili obratno.
- Određivanje točaka pregiba je u općem slučaju relativno složeno.
- Ono se uvelike pojednostavljuje za *barem dvaput derivabilne funkcije* (funkcije koje imaju barem prve dvije derivacije).

4.14.3. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- Može se pokazati da u tom slučaju vrijede sljedeće tvrdnje:
- Funkcija f je *konveksna* na intervalima na kojima je f' *rastuća.*
- Funkcija f je *konkavna* na intervalima na kojima je f' padajuća.
- *Točka pregiba* grafa funkcije f je zapravo *točka lokalnoga ekstrema* funkcije f'.
- Zbog toga se točka pregiba grafa funkcije f može shvatiti i kao *točka najbržega/najsporijega rasta/pada* te funkcije.
- **Važna napomena:** Ako postoji, točka pregiba je *uvijek* neka točka **grafa** funkcije f, a ne element (prirodne) domene te funkcije.

4.14.4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA GRAFA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- **Korak 1**. Odrediti f''.
- **Korak 2**. Riješiti jednadžbu $f'' = 0$ na (prirodnoj) domeni funkcije f.
- **Korak 3**. Neka su x_1, ..., x_n sva rješenja dobivena u Koraku 2. označena tako da vrijedi $x_1 < ... < x_n$.
- **Korak 4**. Navedenim točkama podijeliti (prirodnu) domenu funkcije f na $n + 1$ dijelova.
- **Korak 5**. Iz svakoga dijela odabrati po jednu točku (t_1, ..., t_{n+1}) i odrediti predznak funkcije f'' u svakoj od odabranih točaka.

4.14.4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA GRAFA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- **Korak 4**. Za svaki $k = 1, ..., n + 1$:
  - ako je $f''(t_k) > 0$, funkcija f je konveksna na dijelu prirodne domene kojemu pripada točka t_k;
  - ako je $f''(t_k) < 0$, funkcija f je konkavna na dijelu prirodne domene kojemu pripada točka t_k.
- **Korak 5**. Za svaki $k = 1, ..., n$:
  - ako f'' mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, onda graf funkcije f ima točku pregiba $(x_k, f(x_k))$;
- ako f'' ne mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, f nema točku pregiba čija je apscisa x_k.
- U ovom algoritmu teorijski se može uzeti: $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, ali je bolje i praktičnije birati „konkretne“ realne brojeve.