

1. Odredite intervale konveksnosti, intervale konkavnosti i prijevojne točke (ako postoje) sljedećih realnih funkcija:
  - a)  $f_1(x) = x^2 + 1;$
  - b)  $f_2(x) = 1 - x^2;$
  - c)  $f_3(x) = e^x + 1;$
  - d)  $f_4(x) = \ln x;$
  - e)  $f_5(x) = \operatorname{ch} x;$
  - f)  $f_6(x) = \operatorname{sh} x;$
  - g)  $f_7(x) = \sin x;$
  - h)  $f_8(x) = \cos x;$
  - i)  $f_9(x) = \operatorname{tg} x;$
  - j)  $f_{10}(x) = \operatorname{ctg} x;$
  - k)  $f_{11}(x) = \arcsin x;$
  - l)  $f_{12}(x) = \arccos x;$
  - m)  $f_{13}(x) = \operatorname{arctg} x;$
  - n)  $f_{14}(x) = \operatorname{arcctg} x.$
2. U prijevojnim točkama krivulje  $K \dots y = x^4 - 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$  povučene su tangente na krivulju. Izračunajte površinu lika kojega sve povučene tangente zatvaraju s osi ordinata.

### Rezultati zadataka

#### Zadatak 1.

- a)  $f_1''(x) = 2$ , pa je  $f_1$  konveksna na skupu  $\mathbb{R}$ .
- b)  $f_2''(x) = -2$ , pa je  $f_2$  konkavna na skupu  $\mathbb{R}$ .
- c)  $f_3''(x) = e^x > 0$ , za svaki  $x \in \mathbb{R}$ , pa je  $f_3$  konveksna na skupu  $\mathbb{R}$ .
- d) Očito je  $D_{f_4} = \langle 0, +\infty \rangle$  i  $f_4''(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Budući da za svaki  $x \in D_{f_4}$  vrijedi nejednakost  $f_4''(x) < 0$ ,  $f_4$  je konkavna na  $D_{f_4}$ .
- e) Očito je  $f_5'' = f_5$ . Budući da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  vrijedi  $\sin x > 0$ ,  $f_5$  je konveksna na skupu  $\mathbb{R}$ .
- f) Očito je  $f_6'' = f_6$ . Jednadžba  $\sin x = 0$  ima jedinstveno rješenje  $x = 0$ . Za svaki  $x < 0$  je  $\sin x < 0$ , a za svaki  $x > 0$  je  $\sin x > 0$ . Stoga je  $T = (0, 0)$  prijevojna točka grafa funkcije  $f_6$ .  $f_6$  je konkavna na  $\langle -\infty, 0 \rangle$ , a konveksna na  $\langle 0, +\infty \rangle$ .
- g) Očito je  $f_7'' = -f_7$ . Jednadžba  $\sin x = 0$  ima rješenja  $x_k = k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Definiranjem  $t_k := (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , lako se provjere nejednakosti  $f_7''(t_{2k}) = -1 < 0$  i  $f_7''(t_{2k+1}) = 1 > 0$ , pa su prijevojne točke  $T_k = (k \cdot \pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Intervali konkavnosti su svi intervali oblika  $\langle 2 \cdot k \cdot \pi, (2 \cdot k + 1) \cdot \pi \rangle$ , a intervali konveksnosti su svi intervali oblika  $\langle (2 \cdot k - 1) \cdot \pi, 2 \cdot k \cdot \pi \rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- h) Očito je  $f_8'' = -f_8$ . Sva rješenja jednadžbe  $\cos x = 0$  su  $x_k = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Definiranjem  $t_k := k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , lako se provjere nejednakosti  $f_8''(t_{2k}) = 1 > 0$  i  $f_8''(t_{2k+1}) = -1 < 0$ , pa su prijevojne točke  $T_k = \left( (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Intervali konveksnosti su svi intervali oblika  $\left\langle (4 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, (4 \cdot k + 3) \cdot \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , a intervali konkavnosti su svi intervali oblika  $\left\langle (4 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, (4 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
- i) Deriviranjem se dobije  $f_9''(x) = \frac{2 \cdot \sin x}{\cos^3 x}$ . Sva rješenja jednadžbe  $f_9''(x) = 0$  su  $x_k = k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Definiranjem  $t_k := (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$  lako se provjere nejednakosti  $f_9''(t_{2k}) > 0$  i  $f_9''(t_{2k+1}) < 0$ . Stoga su prijevojne točke  $T_k = (k \cdot \pi, 0)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Budući da je  $D_{f_9} = \mathbb{R} \setminus \left\{ (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ , intervali konveksnosti su svi intervali oblika  $\left\langle k \cdot \pi, (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , a intervali konkavnosti su svi intervali oblika  $\left\langle (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi \right\rangle$ , gdje je  $k \in \mathbb{Z}$ .

- j) Deriviranjem se dobije  $f_{10}''(x) = \frac{2 \cdot \cos x}{\sin^3 x}$ . Sva rješenja jednadžbe  $f_{10}''(x) = 0$  su dana izrazom

$x_k = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Definiranjem  $t_k := (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  lako se provjere nejednakosti  $f_{10}''(t_{2k}) > 0$  i  $f_{10}''(t_{2k+1}) < 0$ . Stoga su prijevojne točke  $T_k = \left( (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, 0 \right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Budući da je  $D_{f_{10}} = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$ , intervali konveksnosti su svi intervali oblika  $\left\langle k \cdot \pi, (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \right\rangle$ , a intervali konkavnosti su svi intervali oblika  $\left\langle (2 \cdot k - 1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \cdot \pi \right\rangle$ , gdje je  $k \in \mathbb{Z}$ .

Očito, funkcije tangens i kotangens imaju iste intervale konveksnosti i konkavnosti, ali različite prijevojne točke.

- k) Deriviranjem se dobije  $f_{11}''(x) = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$ . Jednadžba  $f_{11}''(x) = 0$  ima jedinstveno rješenje

$x = 0$ . Definiranjem  $t_1 = -\frac{1}{2}$  i  $t_2 = \frac{1}{2}$  lako se provjere nejednakosti  $f_{11}''(t_1) < 0$  i  $f_{11}''(t_2) > 0$ . Stoga je  $T = (0, 0)$  prijevojna točka. Budući da je  $D_{f_{11}} = [-1, 1]$ ,  $f_{11}$  je konkavna na intervalu  $\langle -1, 0 \rangle$ , a konveksna na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . (Za  $x \in \{-1, 1\}$   $f_{11}''$  nije definirana, pa u tim točkama  $f_{11}$  ne može biti niti konkavna niti konveksna.)

- l) Deriviranjem se dobije  $f_{12}''(x) = -\frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$ . Jednadžba  $f_{12}''(x) = 0$  ima jedinstveno rješenje

$x = 0$ . Definiranjem  $t_1 = -\frac{1}{2}$  i  $t_2 = \frac{1}{2}$  lako se provjere nejednakosti  $f_{12}''(t_1) > 0$  i  $f_{12}''(t_2) < 0$ .

Stoga je  $T = (0, 0)$  prijevojna točka. Budući da je  $D_{f_{12}} = [-1, 1]$ ,  $f_{12}$  je konveksna na intervalu  $\langle -1, 0 \rangle$ , a konkavna na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . (Za  $x \in \{-1, 1\}$   $f_{12}''$  nije definirana, pa u tim točkama  $f_{12}$  ne može biti niti konkavna niti konveksna.)

- m) Deriviranjem se dobije  $f_{13}''(x) = -\frac{2 \cdot x}{(1+x^2)^2}$ . Jednadžba  $f_{13}''(x) = 0$  ima jedinstveno rješenje

$x = 0$ . Definiranjem  $t_1 = -\frac{1}{2}$  i  $t_2 = \frac{1}{2}$  lako se provjere nejednakosti  $f_{13}''(t_1) > 0$  i  $f_{13}''(t_2) < 0$ .

Stoga je  $T = (0, 0)$  prijevojna točka. Budući da je  $D_{f_{13}} = \mathbb{R}$ ,  $f_{13}$  je konveksna na intervalu  $\langle -\infty, 0 \rangle$ , a konkavna na intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

- n) Deriviranjem se dobije  $f_{14}''(x) = -\frac{2 \cdot x}{(1+x^2)^2}$ . Jednadžba  $f_{14}''(x) = 0$  ima jedinstveno rješenje

$x = 0$ . Definiranjem  $t_1 = -\frac{1}{2}$  i  $t_2 = \frac{1}{2}$  lako se provjere nejednakosti  $f_{14}''(t_1) > 0$  i  $f_{14}''(t_2) < 0$ .

Stoga je  $T = \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$  prijevojna točka. Budući da je  $D_{f_{14}} = \mathbb{R}$ ,  $f_{14}$  je konkavna na intervalu  $\langle -\infty, 0 \rangle$ , a konveksna na intervalu  $\langle 0, +\infty \rangle$ .

2. Odredimo najprije prvu i drugu derivaciju funkcije koja zadaje krivulju  $K$ :

$$y' = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2,$$

$$y'' = 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x.$$

Iz jednadžbe  $y'' = 0$  slijedi  $12 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0$ , odnosno  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Stoga promatramo zadanu funkciju na intervalima  $\langle -\infty, 0 \rangle$ ,  $\langle 0, 1 \rangle$  i  $\langle 1, +\infty \rangle$ . Odabirom npr.  $x = -1$ ,  $x = -0.5$  i  $x = 2$  zaključujemo da je funkcija  $y$  konveksna na  $\langle -\infty, -1 \rangle$  i  $\langle 1, +\infty \rangle$ , a konkavna na  $\langle 0, 1 \rangle$ . Dakle, prijevojne točke su  $T_1 = (0, -1)$  i  $T_2 = (1, 0)$ .

Koeficijenti smjera tangenata povučenih u tim točkama su :

$$k_1 = (y')_{x=0} = (4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2)_{x=0} = 2$$

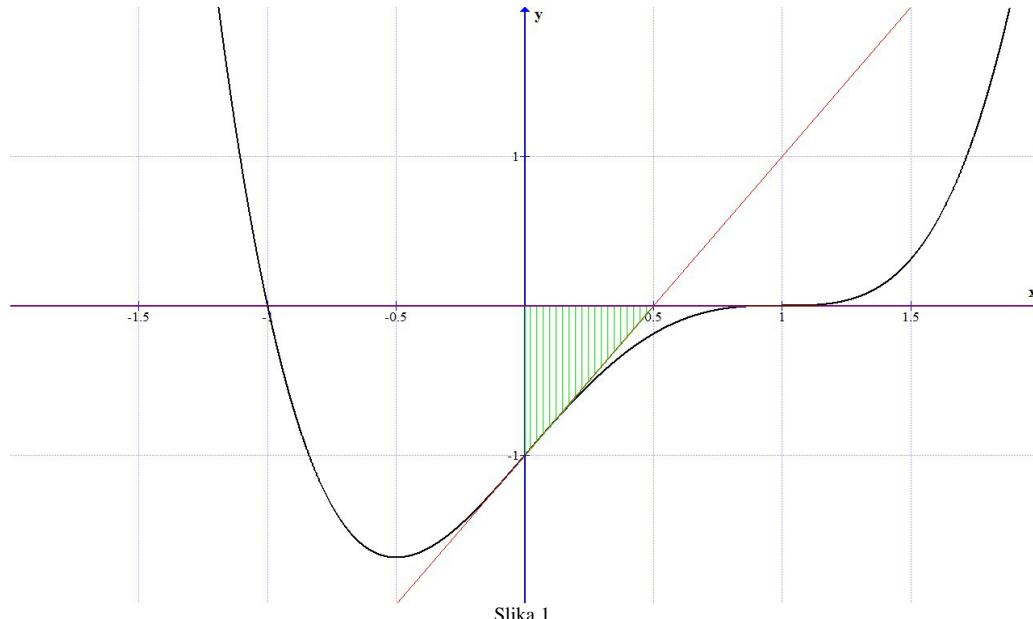
$$k_2 = (y')_{x=1} = (4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2)_{x=1} = 0.$$

Lako se dobije da su jednadžbe tangenata

$$t_1 \dots y = 2 \cdot x - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{1} + \frac{y}{-1} = 1 \text{ i } t_2 \dots y = 0.$$

Nacrtamo li te pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobivamo Sliku 1.1

Lako vidimo da je tražena površina jednaka  $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}$  kv. jed.



Slika 1.