4.14. KONVEKSNE I KONKAVNE FUNKCIJE.

INTERVALI KONKAVNOSTI I KONVEKSNOSTI. TOČKE PREGIBA (INFLEKSIJE).

4.14.1. KONVEKSAN SKUP

- Pojam konveksnosti iznimno je važan u rješavanju mnogih *optimizacijskih* problema iz prakse jer se u njima – kao skupovi mogućih rješenja – pojavljuju upravo konveksni skupovi.
- Grubo rečeno, skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je *konveksan* ako za *svake* dvije točke A i B svaka točka dužine AB pripada skupu S.

4.14.2. KONVEKSNA FUNKCIJA

- Pojam konveksnosti proširuje se i na realne funkcije jedne realne varijable.
- Formalna definicija je sljedeća:
- Realna funkcija f je **strogo konveksna** (ili, kraće, *konveksna*) ako za sve x_1, $x_2 \in D(f)$ vrijedi:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$

4.14.2. KONVEKSNA FUNKCIJA

- Može se pokazati da iz te definicije slijedi da graf *konveksne* funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1, f(x_1))$ i $T_2 = (x_2, f(x_2))$ dio grafa iznad intervala $\langle x_1, x_2 \rangle$ nalazi se *ispod* dužine $T_1 T_2$.
- Ekvivalentno, graf konveksne funkcije f iznad intervala $\langle x_1, x_2 \rangle$ nalazi se *iznad* tangente povučene u bilo kojoj njegovoj točki u tom intervalu.

4.14.2. KONVEKSNA FUNKCIJA

- U praksi se, osim konveksnih funkcija, razmatraju i *po dijelovima konveksne* funkcije, tj. funkcije koje su konveksne na pravom podskupu svoje prirodne domene (ali ne i na cijeloj prirodnoj domeni).
- Zbog toga je u takvim slučajevima potrebno odrediti *intervale konveksnosti*, tj. intervale na kojima je zadana funkcija konveksna.

4.14.3. KONKAVNA FUNKCIJA

- Dualni pojam pojmu konveksnosti je *konkavnost.*
- Realna funkcija f je **strogo konkavna** (ili, kraće, *konkavna*) ako za sve $x_1,\ x_2 \in D(f)$ vrijedi:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left(f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right)$$

- U ovom slučaju graf *konkavne* funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1,\ f(x_1))$ i $T_2 = (x_2,\ f(x_2))$ dio grafa iznad intervala $\langle x_1,\ x_2 \rangle$ nalazi se *iznad* dužine $T_1 T_2$.
- Ekvivalentno, graf *konkavne* funkcije f iznad intervala $\langle x_1,\ x_2 \rangle$ nalazi se *ispod* tangente povučene u bilo kojoj njegovoj točki u tom intervalu.

4.14.4. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- U praksi su najčešći slučajevi kad je ista funkcija konveksna na jednom dijelu svoje prirodne domene, a konkavna na drugom dijelu toga područja.
- Ta područja obično su “odvojena” jednom točkom.
- Ta se točka naziva **točka pregiba** ili **točka infleksije**.
- Točka pregiba „povezuje” konveksan dio grafa funkcije s njegovim konkavnim dijelom (i obratno).

4.14.4. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- Formalna definicija točke pregiba je:
- Točka $C = (c, f(c))$ je *točka pregiba* ako postoji $\varepsilon>0$ takav da je f konveksna na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$ ili obratno.
- Određivanje točaka pregiba je u općem slučaju relativno složeno.
- Ono se uvelike pojednostavljuje za *barem dvaput derivabilne funkcije* (funkcije koje imaju barem prve dvije derivacije).

4.14.4. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- Može se pokazati da u tom slučaju vrijede sljedeće tvrdnje:
- Funkcija f je *konveksna* na intervalima na kojima je njezina prva derivacija f' *strogo rastuća* funkcija.
- Funkcija f je *konkavna* na intervalima na kojima je njezina prva derivacija f' *strogo padajuća* funkcija.
- *Točka pregiba* grafa funkcije f je zapravo *točka lokalnoga ekstrema* funkcije f'.
- Zbog toga se točka pregiba grafa funkcije f može shvatiti i kao *točka najbržega/najsporijega rasta/pada* te funkcije.
- **Važna napomena:** Ako postoji, točka pregiba je *uvijek* neka točka **grafa** funkcije f, a ne element (prirodne) domene te funkcije.

4.14.5. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA GRAFA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- Korak 1. Odrediti f''.
- Korak 2. Riješiti jednadžbu $f'' = 0$ na prirodnoj domeni funkcije f.
- Korak 3. Neka su $x_1, \ldots, x_n$ sva rješenja dobivena u Koraku 2. označena tako da vrijedi $x_1 < \ldots < x_n$.
- Korak 4. Navedenim točkama podijeliti (prirodnu) domenu funkcije f na $n + 1$ dijelova.
- Korak 5. Iz svakoga dijela odabrati po jednu točku $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ i odrediti predznak funkcije f'' u svakoj od odabranih točaka.

4.14.5. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA GRAFA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- **Korak 4.** Za svaki $k = 1, ..., n + 1$:

– ako je $f''(t_k) > 0$, funkcija f je konveksna na dijelu (prirodne) domene kojemu pripada točka t_k;

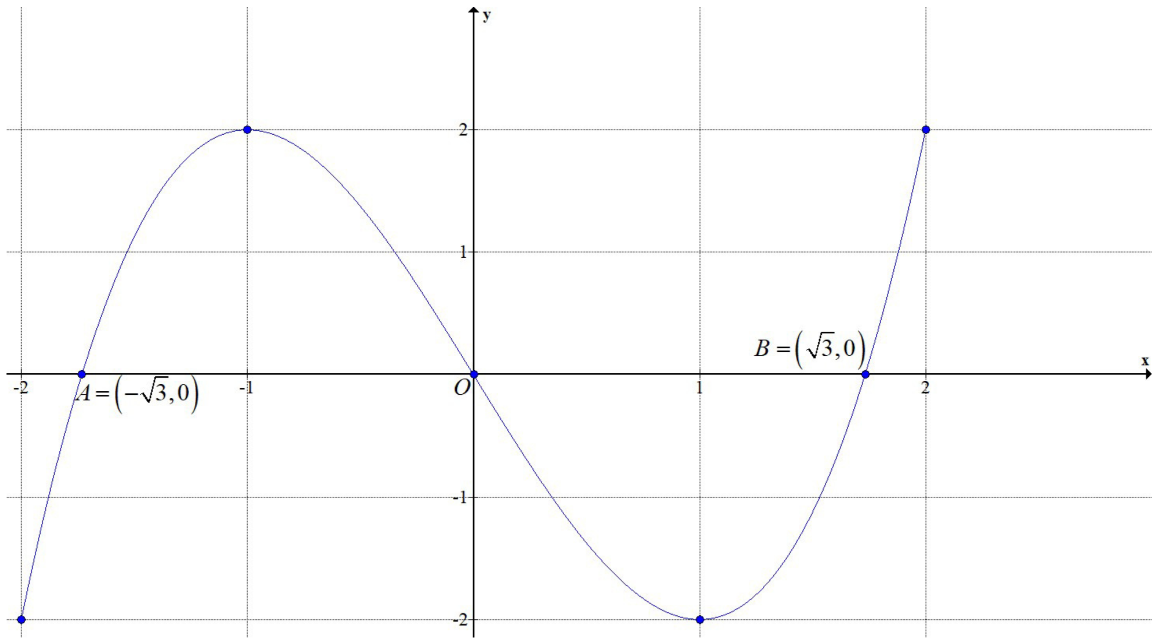
– ako je $f''(t_k) < 0$, funkcija f je konkavna na dijelu (prirodne) domene kojemu pripada točka t_k.

- **Korak 5.** Za svaki $k = 1, ..., n$:

– ako f'' mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, onda graf funkcije f ima točku pregiba $(x_k, f(x_k))$;

- ako f'' ne mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, f nema točku pregiba čija je apscisa x_k.
- U ovom algoritmu teorijski se može uzeti: $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$, ali je bolje i praktičnije birati „konkretne“ realne brojeve.

1. Na slici 1. prikazan je graf **prve derivacije** funkcije $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$.



Slika 1.

Odredite sve:

a) intervale rasta funkcije f;
b) intervale pada funkcije f;
c) **apscise** točaka lokalnih ekstrema funkcije f i pripadne tipove ekstrema;
d) intervale konveksnosti funkcije f;
e) intervale konkavnosti funkcije f;
f) **apscise** točaka pregiba grafa funkcije f.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenja:

a) $\langle -\sqrt{3},0\rangle$ i $\langle \sqrt{3},2\rangle$;

b) $\langle -2,-\sqrt{3}\rangle$ i $\langle 0,\sqrt{3}\rangle$;

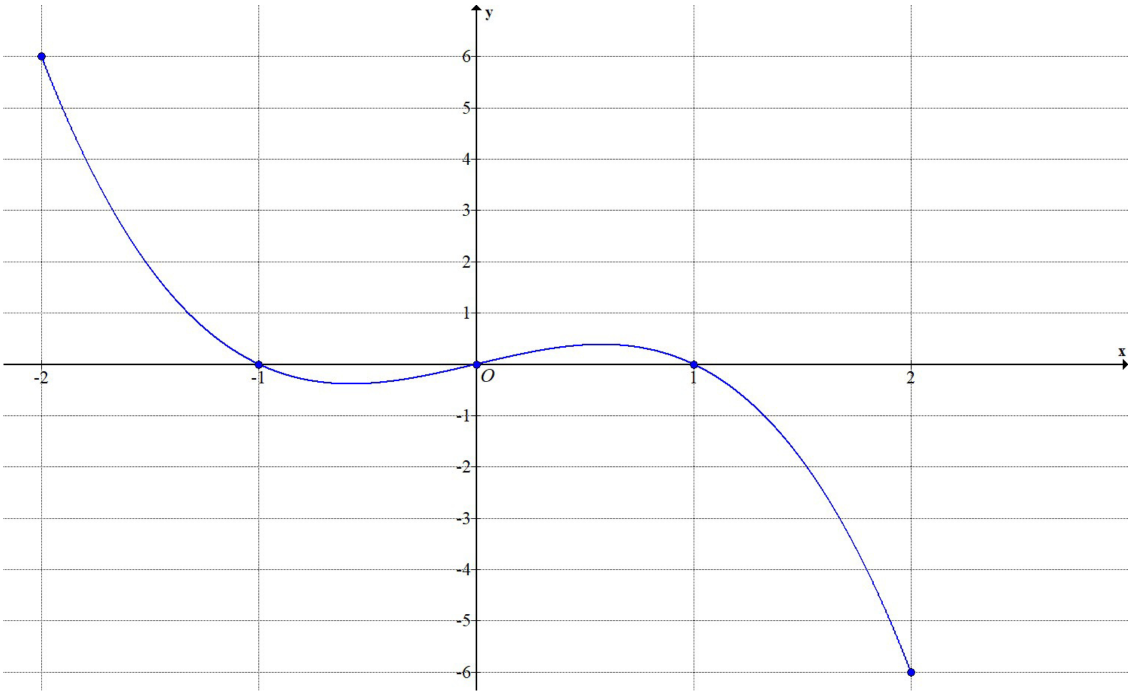
c) apscise točaka lokalnoga minimuma: $x_1=-\sqrt{3}$ i $x_2=\sqrt{3}$,
apscisa točke lokalnoga maksimuma: $x_3=0$;

d) $\langle -2,-1\rangle$ i $\langle 1,2\rangle$;

e) $\langle -1,1\rangle$;

f) $x_4=-1$ i $x_5=1$.

2. Na slici 2. prikazan je graf **druge derivacije** funkcije $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$.



Slika 2.

Odredite sve:

a) intervale rasta **prve** derivacije funkcije g;
b) intervale pada **prve** derivacije funkcije g;
c) **apscise** točaka pregiba grafa funkcije g.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenja:

a) $\langle -2,-1\rangle$ i $\langle 0,1\rangle$;
b) $\langle -1,0\rangle$ i $\langle 1,2\rangle$;
c) $-1,\ 0$ i 1.

3. Neka je $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ proizvoljan polinom stupnja 2 čiji je vodeći koeficijent jednak a. Dokažite da je:

a) p konkavna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a<0$;

b) p konveksna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a>0$.

Rješenje: Neka je

$$p(x)=a\cdot x^2+b\cdot x+c,$$

pri čemu su $a,b,c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$. Lako se provjeri da je

$$p''(x)=2\cdot a,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Taj izraz je strogo pozitivan ako i samo ako je $a>0$, a strogo negativan ako i samo ako je $a<0$. Odatle slijede obje tvrdnje.

4. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante. **Točka lokalnoga minimuma** funkcije $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(x) = \frac{a \cdot x + b}{x^2}$$

je $T = (-2, -9)$. Odredite **sve intervale konveksnosti i konkavnosti,** te **sve točke pregiba** grafa te funkcije.

Rješenje: Iz podatka da točka T pripada grafu funkcije f zaključujemo:

$$f(-2) = -9.$$

Iz pravila funkcije f slijedi:

$$\begin{aligned} f(-2) &= \frac{a \cdot (-2) + b}{(-2)^2} = \\ &= \frac{-1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} \cdot b. \end{aligned}$$

Lijeve strane tih dviju jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i njihove desne strane. Izjednačavanjem njihovih desnih strana dobijemo:

$$\begin{aligned} &\frac{-1}{2} \cdot a + \frac{1}{4} \cdot b = -9, \quad / \cdot 4 \\ &-2 \cdot a + b = -36. \end{aligned}$$

Kao prava racionalna funkcija, f je proizvoljno mnogo puta derivabilna u svakoj točki svoje prirodne domene. Zbog toga smijemo primijeniti Fermatov teorem. Njegova primjena na točku lokalnoga ekstrema T daje:

$$f'(-2) = 0.$$

Zbog toga odredimo prvu derivaciju zadane funkcije:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a \cdot x^2 - (a \cdot x + b) \cdot 2 \cdot x}{x^4} = \\ &= \frac{-a \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot x}{x^4} = (\text{zbog } D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}) = \\ &= \frac{-a \cdot x - 2 \cdot b}{x^3}. \end{aligned}$$

Vrijednost brojnika ove racionalne funkcije za $x = -2$ mora biti jednaka nuli. Tako dobivamo jednadžbu:

$$2\cdot a-2\cdot b=0,\quad / : 2$$
$$a=b.$$

Time smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}-2\cdot a+b=36,\\ a=b\end{cases}$$

čije je rješenje

$$(a,b)=(36,36).$$

Dakle,

$$f(x)=36\cdot\frac{x+1}{x^2},$$
$$f'(x)=(-36)\cdot\frac{x+2}{x^3},$$

pa deriviranjem pravila funkcije f' lagano dobijemo:

$$f''(x)=72\cdot\frac{x+3}{x^4}.$$

Iz ovoga pravila odmah vidimo da je jedini „kandidat“ za apscisu točke pregiba

$$x=-3.$$

Sastavimo tablicu:

	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
f''	-	+	-	+
f	$\cap$	$\cup$		$\cup$

Dakle, interval konkavnosti je $\langle -\infty,-3\rangle$, dok su intervali konveksnosti $\langle -3,0\rangle$ i $\langle 0,+\infty\rangle$. (**Oprez**: Zbog $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$ interval konkavnosti **nije** $\langle -3,+\infty\rangle$.)

Jedina točka pregiba grafa zadane funkcije je

$$T_1=(-3,f(-3))=$$
$$=(-3,-8).$$

5. Pokažite da graf funkcije $f(x)=\frac{4\cdot x}{x^2+3}$ ima točno tri točke pregiba i da sve tri točke pripadaju istom pravcu. Odredite jednadžbu toga pravca.

Rješenje: Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Dobijemo:

$$f'(x)=4\cdot\frac{1\cdot\left(x^2+3\right)-x\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+3\right)^2}=$$

$$=4\cdot\frac{3-x^2}{\left(x^2+3\right)^2},$$

$$f''(x)=4\cdot\frac{(-2)\cdot x\cdot\left(x^2+3\right)^2-\left(3-x^2\right)\cdot 2\cdot\left(x^2+3\right)\cdot 2\cdot x}{\left(x^2+3\right)^4}=$$

$$=4\cdot\frac{\left(x^2+3\right)\cdot\left((-2)\cdot x\cdot\left(x^2+3\right)-\left(3-x^2\right)\cdot 4\cdot x\right)}{\left(x^2+3\right)^4}=$$

$$=4\cdot\frac{\left((-2)\cdot x^3-6\cdot x-12\cdot x+4\cdot x^3\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=$$

$$=4\cdot\frac{2\cdot x^3-18\cdot x}{\left(x^2+3\right)^3}=$$

$$=8\cdot\frac{x\cdot\left(x^2-9\right)}{\left(x^2+3\right)^3}=$$

$$=8\cdot\frac{x\cdot(x-3)\cdot(x+3)}{\left(x^2+3\right)^3}.$$

Iz jednadžbe $f''(x)=0$ slijedi

$$x_1=-3,\ x_2=0 \text{ i } x_3=3.$$

Lako vidimo da je $D(f)=D\left(f'\right)=D\left(f''\right)=\mathbb{R}$, pa funkciju f i njezinu drugu derivaciju promatramo na intervalima $\langle-\infty,-3\rangle$, $\langle-3,0\rangle$, $\langle 0,3\rangle$ i $\langle 3,+\infty\rangle$.

-∞		-3		0		3		+∞
f''	-		+		−		+	

Primijetimo da vrijedi nejednakost:

$$\left(x^2+3\right)^3 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Zbog toga je predznak funkcije f'' jednak predznaku izraza $x \cdot (x-3) \cdot (x+3)$.

Odaberemo $x \in \{-4, -1, 1, 4\}$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} &f''(-4) < 0, \\ &f''(-1) > 0, \\ &f''(1) < 0 \quad \text{i} \\ &f''(4) > 0. \end{aligned}$$

Dakle, graf funkcije f ima točno tri točke pregiba i to su:

$$\begin{aligned} T_1 &= (-3, f(-3)) = (-3, -1), \\ T_2 &= (0, f(0)) = (0, 0), \\ T_3 &= (3, f(3)) = (3, 1). \end{aligned}$$

Lako vidimo da jednadžba pravca T_1T_2 glasi:

$$p \ldots\ y = \frac{1}{3} \cdot x.$$

Pravcu p očito pripada i točka T_3, što je i trebalo dokazati.

6. a) Odredite točku u kojoj funkcija $f(x)=\left(x^2-4\cdot x+5\right)\cdot \mathrm{e}^x$ najsporije raste.

b) Postoji li točka u kojoj ta funkcija najbrže raste?

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Uočimo da je $D(f)=\mathbb{R}$. Odredimo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\cdot x-4)\cdot \mathrm{e}^x+\left(x^2-4\cdot x+5\right)\cdot \mathrm{e}^x = \\ &= \left(x^2-2\cdot x+1\right)\cdot \mathrm{e}^x = \\ &= (x-1)^2\cdot \mathrm{e}^x. \end{aligned}$$

Očito vrijedi:

$$f'(x)\ge 0, \forall x\in \mathbb{R},$$

pa je f rastuća na svojoj prirodnoj domeni. Brzinu rasta funkcije f opisuje funkcija f'. Zbog toga tražimo globalne ekstreme funkcije f'.

Zbog gore navedene jednakosti zaključujemo da f' ima globalni minimum jednak 0, i to u svim nultočkama te funkcije. Iz jednadžbe $f'(x)=0$, tj. jednadžbe $(x-1)^2=0$ slijedi $x=1$. Dakle, f najsporije raste u točki $T=(1,f(1))=$ $=(1,2\cdot \mathrm{e})$.

Lako se vidi da je $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$, pa f' nema globalni maksimum. To znači da **ne postoji** točka u kojoj funkcija f najbrže raste.