4.14. INTERVALI KONKAVNOSTI I KONVEKSNOSTI

INTERVALI KONKAVNOSTI I KONVEKSNOSTI.
TOČKE PREGIBA (INFLEKSIJE).

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Pojam konveksnosti iznimno je važan u rješavanju mnogih *optimizacijskih* problema iz prakse jer se u njima – kao skupovi mogućih rješenja – pojavljuju upravo konveksni skupovi.
- Grubo rečeno, skup $S \subseteq \mathbb{R}^2$ je *konveksan* ako za *svake* dvije točke A i B svaka točka dužine AB pripada skupu S.

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Pojam konveksnosti proširuje se i na realne funkcije jedne realne varijable čiji grafovi su podskupovi skupa $\mathbb{R}^2$.
- Formalna definicija je:
- Realna funkcija f je **strogo konveksna** (ili, kraće, *konveksna*) ako za sve x_1, $x_2 \in D(f)$ vrijedi implikacija:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right]$$

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- Može se pokazati da iz te definicije slijedi da graf $\mathbf{\Gamma}(f)$ funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1, f(x_1))$ i $T_2 = (x_2, f(x_2))$ dio $\mathbf{\Gamma}(f)$ koji odgovara intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$ nalazi se ispod dužine $\overline{T_1 T_2}$.
- To znači da se graf $\mathbf{\Gamma}(f)$ nalazi *iznad* tangente povučene na $\mathbf{\Gamma}(f)$ u bilo kojoj točki toga grafa iznad intervala $\langle x_1, x_2\rangle$.

4.14.1. KONVEKSNOST FUNKCIJE

- U praksi se, osim konveksnih funkcija, razmatraju i *po dijelovima konveksne* funkcije, tj. funkcije koje su konveksne na pravom podskupu svoje prirodne domene (ali ne i na cijeloj prirodnoj domeni).
- Zbog toga je u takvim slučajevima potrebno odrediti *intervale konveksnosti*, tj. intervale na kojima je zadana realna funkcija konveksna.

4.14.2. KONKAVNOST FUNKCIJE

- Dualni pojam pojmu konveksnosti je *konkavnost.*
- Realna funkcija f je **strogo konkavna** (ili, kraće, *konkavna*) ako za sve $x_1,\ x_2 \in D(f)$ vrijedi implikacija:

$$(x_1 < x_2) \Rightarrow \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \right]$$

- U ovom slučaju graf $\Gamma(f)$ funkcije f ima sljedeća svojstva:
- Za svake dvije točke $T_1 = (x_1, f(x_1))$ i $T_2 = (x_2, f(x_2))$ dio $\Gamma(f)$ koji odgovara intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ nalazi se iznad dužine $\overline{T_1 T_2}$.
- Graf $\Gamma(f)$ se nalazi *ispod* tangente povučene na $\Gamma(f)$ u bilo kojoj točki grafa iznad intervala $\langle x_1, x_2 \rangle$.

4.14.3. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- U praksi su najčešći slučajevi kad je ista realna funkcija konveksna na jednom dijelu svoje prirodne domene, a konkavna na preostalom dijelu toga područja.
- Ta područja obično su “odvojena” jednom točkom. Ta se točka naziva **točka pregiba** ili **točka infleksije**.
- Točka pregiba veže konveksan dio grafa s konkavnim (i obratno).

4.14.3. TOČKA PREGIBA (TOČKA INFLEKSIJE)

- Formalna definicija točke pregiba za *barem dvaput derivabilne funkcije* (funkcije koje imaju drugu derivaciju) je:
- Točka $C = (c, f(c))$ je točka pregiba ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je f konveksna na intervalu $\langle c, c + \varepsilon\rangle$, a konkavna na intervalu $\langle c - \varepsilon, c\rangle$ ili obratno.

4.14.4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- **Korak 1**. Odrediti f''.
- **Korak 2**. Riješiti jednadžbu $f'' = 0$ na prirodnoj domeni funkcije f.
- **Korak 3**. Neka su x_1, ..., x_n sva rješenja dobivena u Koraku 2. označena tako da vrijedi $x_1 < ... < x_n$.
- **Korak 4.** Navedenim točkama podijeliti prirodnu domenu funkcije f na $n + 1$ dijelova.
- **Korak 5.** Iz svakoga dijela odabrati po jednu točku (t_1, ..., t_{n+1}) i izračunati predznak funkcije f'' u svakoj od odabranih točaka.

4.14.4. ALGORITAM ZA ODREĐIVANJE INTERVALA KONVEKSNOSTI I KONKAVNOSTI I TOČAKA PREGIBA BAREM DVAPUT DERIVABILNE FUNKCIJE

- **Korak 4**. Za svaki $k = 1, ..., n + 1$:
- ako je $f''(t_k) > 0$, funkcija f je konveksna na dijelu prirodne domene kojemu pripada točka t_k;
- ako je $f''(t_k) < 0$, funkcija f je konkavna na dijelu prirodne domene kojemu pripada točka t_k.
- **Korak 5**. Za svaki $k = 1, ..., n$:
- ako f'' mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, onda graf funkcije f ima točku pregiba $(x_k, f(x_k))$;
- ako f'' ne mijenja predznak prigodom prijelaza iz intervala $\langle x_{k-1}, x_k\rangle$ u interval $\langle x_k, x_{k+1}\rangle$, f nema točku pregiba čija je apscisa x_k.
- U ovom algoritmu teorijski se može uzeti: $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = = +\infty$, ali je bolje i praktičnije birati „konkretne“ realne brojeve.