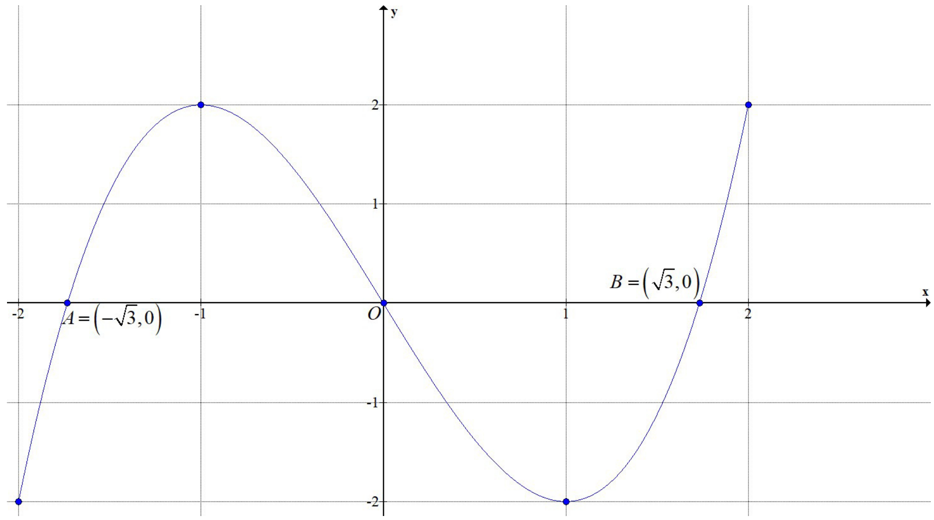
1. Na slici 1. prikazan je graf **prve derivacije** funkcije $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$.



Slika 1.

Odredite sve:

a) intervale rasta funkcije *f*;

b) intervale pada funkcije *f*;

c) apscise točaka lokalnih ekstrema funkcije *f* i pripadne tipove ekstrema;

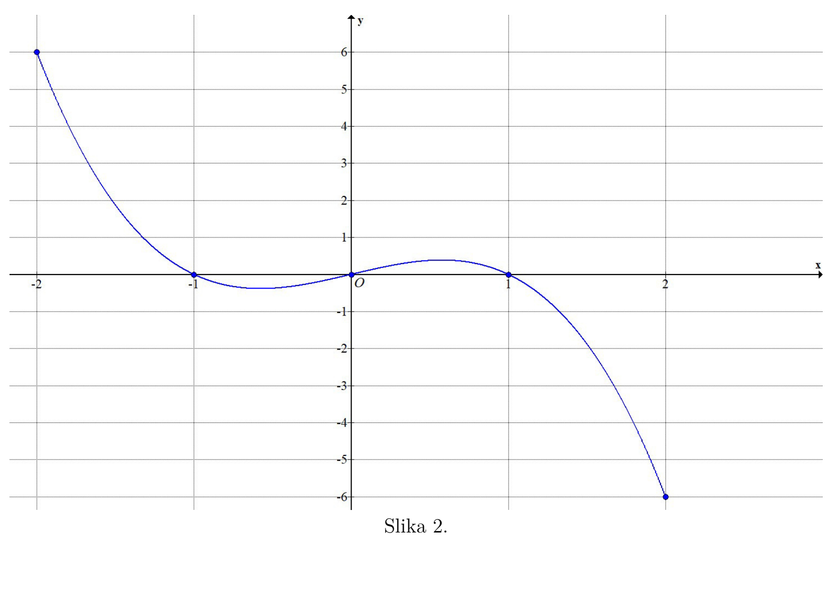
d) intervale konveksnosti funkcije *f*;

e) intervale konkavnosti funkcije *f*;

f) apscise točaka pregiba grafa funkcije *f*.

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

2. Na slici 2. prikazan je graf **druge derivacije** funkcije $g:[-2,2]\to\mathbb{R}$..



Slika 2.

Odredite sve:

a) intervale rasta **prve** derivacije funkcije g;
b) intervale pada **prve** derivacije funkcije g;
c) apscise točaka pregiba grafa funkcije g.

3. Neka je $p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ proizvoljan polinom stupnja 2 čiji je vodeći koeficijent jednak a. Dokažite da je:

a) p konkavna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a<0$;

b) p konveksna na $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $a>0$.

4. U točkama pregiba krivulje $K \ldots\ y = x^4 - 2\cdot x^3 + 2\cdot x - 1$ povučene su tangente na krivulju. Izračunajte površinu lika kojega sve povučene tangente zatvaraju s osi ordinata.

5. Pokažite da graf funkcije $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ ima točno tri točke pregiba i da sve tri točke pripadaju istom pravcu. Odredite jednadžbu toga pravca.

6. **a)** Odredite točku u kojoj funkcija $f(x)=\left(x^2-4\cdot x+5\right)\cdot e^x$ najsporije raste.

b) Postoji li točka u kojoj ta funkcija najbrže raste?

Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rezultati zadataka

1.

a) $\langle -\sqrt{3}, 0\rangle$ i $\langle \sqrt{3}, 2\rangle$;

b) $\langle -2, -\sqrt{3}\rangle$ i $\langle 0, \sqrt{3}\rangle$;

c) apscise točaka lokalnoga minimuma: $x_1 = -\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$, apscisa točke lokalnoga maksimuma: $x_3 = 0$;

d) $\langle -2, -1\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$;

e) $\langle -1, 1\rangle$;

f) $x_4 = -1$ i $x_5 = 1$.

2.

a) $\langle -2, -1\rangle$ i $\langle 0, 1\rangle$;

b) $\langle -1, 0\rangle$ i $\langle 1, 2\rangle$;

c) -1, 0 i 1.

3. Neka je $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, pri čemu su $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Lako se provjeri da je $p''(x) = 2 \cdot a$. Taj izraz je strogo pozitivan ako i samo ako je $a > 0$, a strogo negativan ako i samo ako je $a < 0$. Odatle slijede obje tvrdnje.

4. Odredimo najprije prvu i drugu derivaciju funkcije koja zadaje krivulju K:

$$y' = 4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2,$$
$$y'' = 12 \cdot x^2 - 12 \cdot x.$$

Iz jednadžbe $y'' = 0$ slijedi $12 \cdot x^2 - 12 \cdot x = 0$, odnosno $x_1 = 0,\ x_2 = 1$. Zbog toga promatramo zadanu funkciju na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle$, $\langle 0, 1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$. Odabirom npr. $x = -1$, $x = -0.5$ i $x = 2$ zaključujemo da je funkcija y konveksna na $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a konkavna na $\langle 0,\ 1\rangle$. Dakle, točke pregiba su $T_1 = (0, -1)$ i $T_2 = (1,\ 0)$.

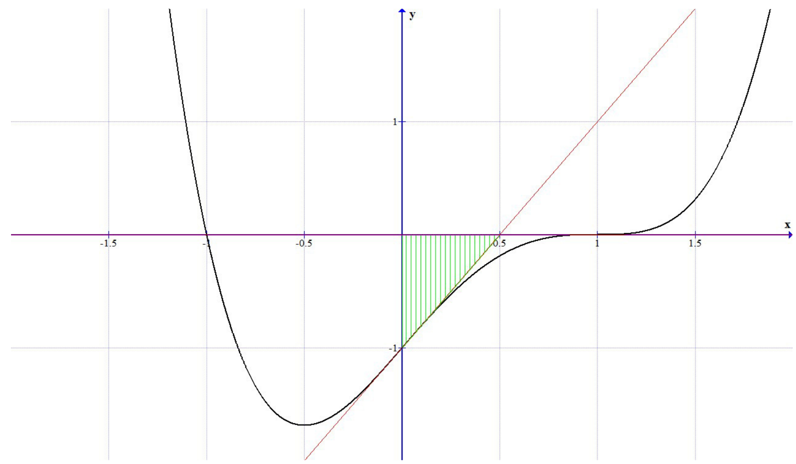
Koeficijenti smjera tangenata povučenih u tim točkama su :

$$k_1 = y'(0) = \left(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2\right)_{x=0} = 2$$
$$k_2 = y'(1) = \left(4 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 2\right)_{x=1} = 0.$$

Lako se dobije da su jednadžbe tangenata:

$$t_1 \ldots\ y = 2 \cdot x - 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 1,$$
$$t_2 \ldots\ y = 0.$$

Nacrtamo li te pravce u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Lako vidimo da je tražena površina jednaka $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{4}$ kv. jed.

5. Odredimo prve dvije derivacije zadane funkcije. Dobijemo:

$$f^{'}(x)=-\frac{x^2+2\cdot x-1}{\left(x^2+1\right)^2},$$

$$f^{''}(x)=\frac{2\cdot\left(x^3+3\cdot x^2-3\cdot x-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2\cdot(x-1)\cdot\left(x^2+4\cdot x+1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Iz jednadžbe $f^{''}(x)=0$ slijedi $x_1=-2-\sqrt{3}$, $x_2=\sqrt{3}-2$ i $x_3=1$. Lako vidimo da je $D(f)=D\left(f^{'}\right)=D\left(f^{''}\right)=\mathbb{R}$, pa funkciju f promatramo na intervalima $\left\langle-\infty,-2-\sqrt{3}\right\rangle$, $\left\langle-2-\sqrt{3},\sqrt{3}-2\right\rangle$, $\left\langle\sqrt{3}-2,\ 1\right\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$. Odaberemo $x\in\{-4,-1,0,2\}$, pa dobivamo:

$$f^{''}(-4)<0,\ f^{''}(-1)>0,\ f^{''}(0)<0 \text{ i } f^{''}(2)>0.$$

Dakle, graf funkcije f ima točno tri točke pregiba i to su:

$$T_1=\left(-2-\sqrt{3}, f\left(-2-\sqrt{3}\right)\right)=\left(-2-\sqrt{3},\ \frac{1-\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$T_2=\left(\sqrt{3}-2, f\left(\sqrt{3}-2\right)\right)=\left(\sqrt{3}-2,\ \frac{\sqrt{3}+1}{4}\right),$$

$$T_3=(1, f(1))=(1,1).$$

Lako se dobije da jednadžba pravca T_1T_2 glasi: $p\ldots\ y=\frac{1}{4}\cdot x+\frac{3}{4}$. Pravcu p očito pripada i točka T_3, što je i trebalo dokazati.

6. Odredimo:

$$f'(x) = \left(x^2 - 2 \cdot x + 1\right) \cdot e^x = (x-1)^2 \cdot e^x,$$
$$f''(x) = \left(x^2 - 1\right) \cdot e^x.$$

Očito je $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} = D(f),$ pa je f rastuća na svojoj domeni. Brzina rasta te funkcije je modelirana funkcijom f'. Zbog toga tražimo globalne ekstreme funkcije f'.

Stacionarne točke funkcije f' su rješenja jednadžbe $f''(x) = 0$ koja pripadaju domeni funkcije f'. Očito je $D\left(f'\right) = \mathbb{R}$. Iz $f''(x) = 0$ slijedi $\left(x^2 - 1\right) \cdot e^x = 0$, odnosno, zbog $e^x > 0,$ $x^2 - 1 = 0$. Sva realna rješenja ove jednadžbe su $x_1 = -1$ i $x_2 = 1.$

Odaberemo $x_3 = -2,$ $x_4 = 0$ i $x_5 = 2$, pa lako zaključimo: $f''(-2) > 0, f''(0) < 0, f''(-2) > 0.$ Dakle, f' raste na intervalima $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, a pada na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$. To znači da ta funkcija u točki $x_1 = -1$ ima lokalni maksimum, a u točki $x_2 = 1$ ima lokalni minimum. Preostaje primijetiti da je npr. $f'(2) = 3 \cdot e^2 > 4 \cdot e^{-1} = f'(-1)$, pa f' nema globalni minimum. To znači da **ne** postoji točka u kojoj funkcija f najbrže raste.

Međutim, f' ima i globalni minimum u točki $x_2 = 1$. Naime, $f'(1) = 0$, a lako se vidi da za svaki $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ vrijedi nejednakost $f'(x) > 0 = f(1).$ Tako zaključujemo da funkcija f najsporije raste u točki $x = 1$.