4.16. DERIVACIJE VIŠEGA REDA.

DERIVACIJE VIŠEGA REDA.
DIFERENCIJAL FUNKCIJE.

4.16.1. DERIVACIJE VIŠEGA REDA

- Prigodom određivanja lokalnih i globalnih ekstrema, te točaka pregiba koristili smo drugu derivaciju funkcije.
- Drugu derivaciju funkcije (ili *derivaciju drugoga reda*) dobili smo tako da smo najprije odredili prvu derivaciju, a potom derivirali dobiveno pravilo te derivacije.
- Analogna ideja provodi se za *derivacije reda n*, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji prirodan broj.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.1. DERIVACIJE VIŠEGA REDA

- Formalno se **derivacija reda** n realne funkcije f definira induktivno s:
- $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$, za svaki $n \in \mathbb{N}$,
- pri čemu je dogovorno $f^{(0)} := f$.
- Prigodom određivanja derivacije reda n funkcije f treba odrediti sve derivacije funkcije f reda 1, ..., $n - 1$.
- **Ne** postoji algoritam koji omogućuje određivanje derivacije reda n bez potrebe određivanja derivacija reda 1, ..., $n - 1$.
- No, za neke elementarne funkcije poznati su analitički izrazi za derivacije reda n.

4.16.2. LEIBNIZOVA FORMULA

- Derivacija reda n u jednostavnijim se slučajevima može izračunati i korištenjem tzv. **Leibnizove formule.**
- Osnovna pretpostavka je da se polazna funkcija može zapisati kao umnožak dvije (relativno jednostavne elementarne) funkcije.
- Ako je $f = f_1 \cdot f_2$, onda je

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (f_1)^{(n-k)} \cdot (f_2)^{(k)}$$

4.16.3. PRIRAST ARGUMENTA

- Neka je $y = f(x)$ funkcija *neprekidna* na segmentu $[a, b]$. Definiramo realan broj:
  - $\Delta a := b - a$;
- Veličina Δa naziva se **prirast argumenta** u segmentu $[a, b]$.
- Za izračunavanje prirasta argumenta *uvijek* moramo znati segment na kojem računamo taj prirast.

4.16.4. PRIRAST FUNKCIJE

- Nadalje, definiramo realan broj
- $\Delta y := f(b) - f(a)$
- Veličina Δy naziva se **prirast funkcije** y u segmentu $[a, b]$.
- Zbog prethodne jednakosti, gornju jednakost možemo zapisati u obliku
- $\Delta y := f(a + \Delta a) - f(a)$.

4.16.5. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Otprije znamo da je $f'(a) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right)$.
- Tu jednakost možemo zapisati u obliku

$$f'(a) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f\big((x-a)+a\big) - f(a)}{x - a}\right) = \lim_{\Delta a \to 0}\left(\frac{f(a + \Delta a) - f(a)}{\Delta a}\right) = \lim_{\Delta a \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta a}\right).$$

- Navedeno razmatranje možemo provesti za bilo koju točku *a*, pa općenito imamo: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$
- Ovu jednakost možemo zapisati u obliku: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$
- Pritom je ε veličina (zapravo, funkcija varijable *x*) takva da $\varepsilon \to 0$ kad $\Delta x \to 0$
- Odavde slijedi: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.5. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Član $\mathrm{d}y := y' \cdot \Delta x$ naziva se **diferencijal funkcije** y.
- Uzmemo li $f(x) = x$, odnosno $y = x$, dobijemo:
- $\mathrm{d}x = (x)' \cdot \Delta x$,
- odnosno
- $\mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.
- Član $\mathrm{d}x$ naziva se **diferencijal argumenta** x.
- On je jednak prirastu argumenta x na segmentu $[x,\ x + \Delta x]$.
- Sukladno tome, formulu za $\mathrm{d}y$ uobičajeno pišemo u obliku:
- $\mathrm{d}y := y' \cdot \mathrm{d}x$
- Dakle: *diferencijal funkcije jednak je umnošku derivacije funkcije i diferencijala argumenta.*

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE

- Neka je zadana krivulja $y = f(x)$.
- U nekoj točki $T = (x_T, y_T)$ te krivulje povucimo tangentu na zadanu krivulju.
- Promatramo što se događa kad x_T povećamo za određenu vrijednost (**prirast**) $\Delta x > 0$.
- Pomičemo li se po krivulji $y = f(x)$, doći ćemo u novu točku T_1 te krivulje.
- Njezine koordinate su $T_1 = (x + \Delta x, f(x + \Delta x))$.

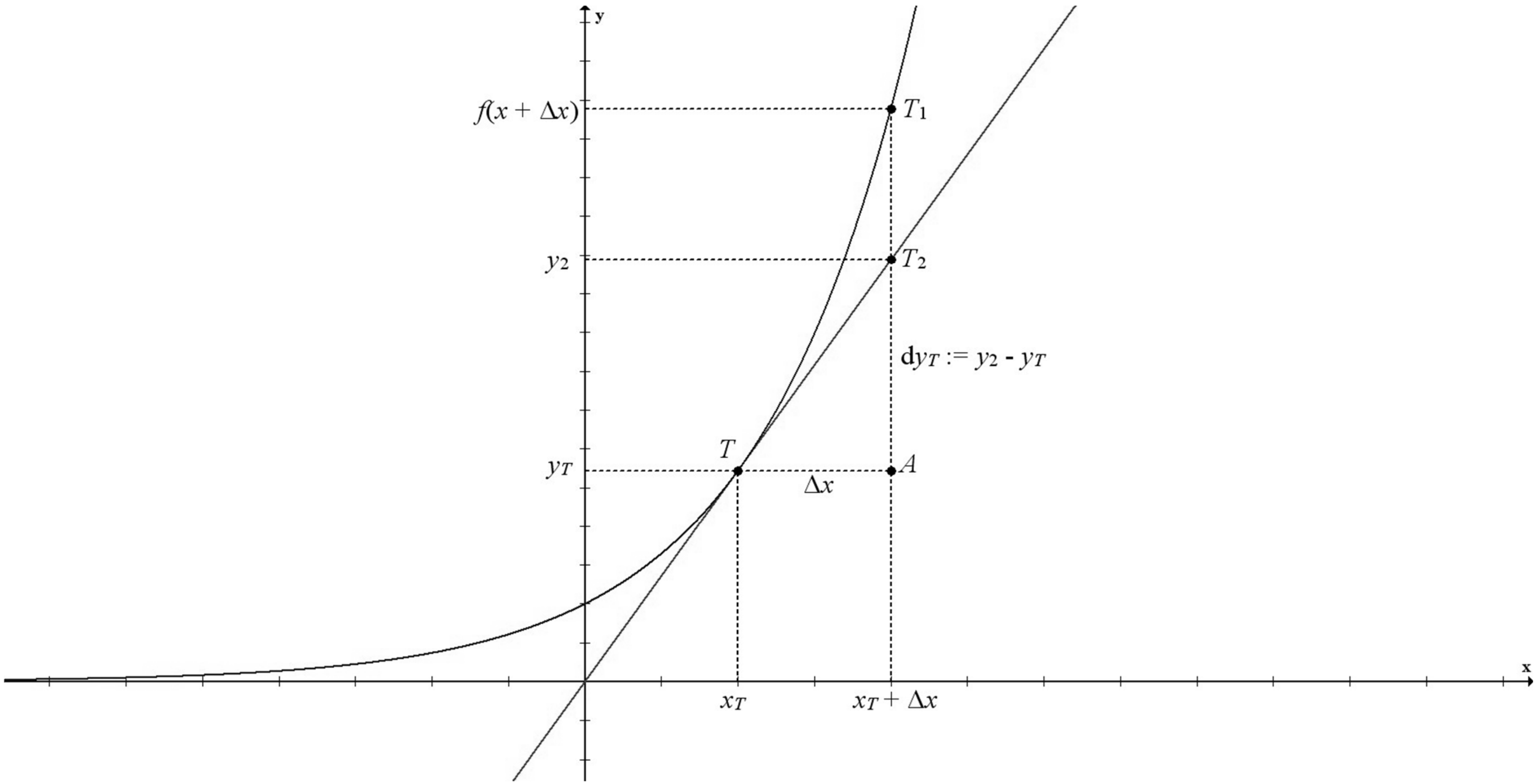
© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE

- Pomičemo li se po *tangenti* povučenoj u točki T, doći ćemo u novu točku $T_2 = (x + \Delta x, y_2)$.
- Tada je:
- $\mathrm{d}y_T = y_2 - y_T$
- (vidjeti sliku na sljedećem slideu).
- Odatle slijedi:
- *Diferencijal funkcije* (u točki x) *jednak je prirastu ordinate tangente povučene u toj točki* (kad x povećamo za Δx).

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE



© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE

- Koristeći derivaciju funkcije u točki c i diferencijal argumenta, možemo *približno izračunati vrijednost funkcije* u nekoj točki „vrlo blizu” c.
- Ta aproksimacija zapravo proizlazi iz osnovne ideje uvođenja derivacije: *aproksimirati zadanu funkciju u okolini točke c polinomom* 1. *stupnja* (linearnom funkcijom).
- Pritom *okolina* točke c nužno treba biti *otvoreni* interval vrlo male širine (npr. 10^{-2} ili manje) oko c.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.7. PRAVILA ZA DIFERENCIRANJE

- Sva pravila važeća za deriviranje funkcija vrijede i za diferenciranje funkcija.
- Točnije, vrijede sljedeće jednakosti:

1.) $\mathrm{d}C = 0$ (diferencijal konstante jednak je 0)

2.) $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$;

3.) $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$;

4.) $\mathrm{d}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.16.8. NAPOMENE

- 1.) Diferencijal funkcije se alternativno može interpretirati kao **linearni dio prirasta** funkcije f, tj. dio prirasta funkcije f koji je linearan s obzirom na prirast nezavisne varijable x.
- 2.) Za funkciju koja ima diferencijal kažemo da je **diferencijabilna**. Iz definicije diferencijala funkcije slijedi da je svaka realna funkcija diferencijabilna ako i samo ako je derivabilna. Zbog toga se diferencijal nerijetko koristi za *definiciju* derivacije funkcije.
- 3.) Diferencijal reda n definiran je s: $\mathrm{d}^n y = y^{(n)} (\mathrm{d}x)^n$.

© mr. sc. Bojan Kovačić, viši predavač

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odredite n-tu derivaciju funkcije:

1. $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$.

Rješenje: Očito su:

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = m \cdot x^{m-1},\\
&f''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2},\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Razlikujemo dva slučaja:

I. $m \geq n$.

U ovom slučaju smanjivanjem za 1 prilikom svakoga od ukupno n deriviranja eksponent uz x ostaje prirodan broj. Zbog toga je:

$$f^{(n)}(x) = m \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot x^{m-n}.$$

II. $1 \leq m < n$.

Derivirajući funkciju f ukupno $m-1$ puta dobivamo:

$$f^{(m-1)}(x) = m \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x.$$

To je polinom 1. stupnja u varijabli x jer je $m \cdot \ldots \cdot 2$ konstanta. Sljedeća (m-ta) derivacija jednaka je $f^{(m)}(x) = A$ = const., pa svakim daljnjim deriviranjem (još ukupno $n-m$ puta) te konstante kao rezultat dobivamo nulu. Zbog toga je u ovom slučaju $f^{(n)}(x) = 0$.

Zaključimo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} (m-k+1) \cdot x^{m-n}, \text{ za } m \geq n;\\ 0, \text{ za } m < n. \end{cases}$$

2. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Rješenje: Očito su:

$$f'(x)=(-1)\cdot x^{-2},$$
$$f''(x)=(-1)\cdot(-2)\cdot x^{-3},$$
$$\ldots$$

Primijetimo da je predznak neparne derivacije uvijek negativan, a parne uvijek pozitivan. Zbog toga se u zapisu pravila funkcije $f^{(n)}$ mora pojaviti član $(-1)^n$ čija je vrijednost (-1) kad je n neparan broj, a 1 kad je n paran broj. Nadalje, zanemarimo li predznake faktora koji tvore koeficijent uz potenciju od x vidimo da se u drugoj derivaciji pojavljuje umnožak $1\cdot 2$, u trećoj umnožak $1\cdot 2\cdot 3$, u četvrtoj $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ itd. Zaključujemo da je

$$f^{(n)}(x)=(-1)^n\cdot 1\cdot\ldots\cdot n\cdot x^{-(n+1)}=\frac{(-1)^n\cdot n!}{x^{n+1}}.$$

3. $f(x)=\mathrm{e}^{a\cdot x+b}$.

Rješenje: Očito su

$$f'(x)=a\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x+b},$$
$$f''(x)=a^2\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x+b},$$
$$\ldots$$

Indukcijom se lako pokaže:

$$f^{(n)}(x)=a^n\cdot\mathrm{e}^{a\cdot x+b}.$$

4. $f(x)=\ln x$.

Rješenje: Očito je $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, pa primijenimo rezultat **2.** zadatka, pri čemu na desnoj strani jednakosti umjesto n pišemo $n-1$ (jer ovdje „kasnimo“ s jednom derivacijom). Dobivamo:

$$f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

5. $f(x)=\sin x.$

Rješenje: Očito su

$$\begin{aligned}
&f'(x)=\cos x,\\
&f''(x)=-\sin x,\\
&f'''(x)=-\cos x,\\
&f^{(\mathrm{IV})}(x)=\sin x,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N}.$$

6. $f(x)=\cos x.$

Rješenje: Očito su

$$\begin{aligned}
&f'(x)=-\sin x,\\
&f''(x)=-\cos x,\\
&f'''(x)=\sin x,\\
&f^{(\mathrm{IV})}(x)=\cos x,\\
&\ldots
\end{aligned}$$

Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\forall n\in\mathbb{N}.$$

7. Koristeći odgovarajući diferencijal približno izračunajte $\sqrt{16.1}$ i ocijenite relativnu pogrešku aproksimacije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Neka je $y=\sqrt{x}$. Prema definiciji diferencijala je tada:

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y = y' \cdot \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot\sqrt{x}}.$$

U našem su slučaju $x=16$ i $\mathrm{d}x=\Delta x=0.1$, pa je diferencijal funkcije y u točki $x=16$ jednak:

$$\Delta y(16)=\frac{0.1}{2\cdot\sqrt{16}}=\frac{0.1}{2\cdot 4}=\frac{0.1}{8}=0.0125.$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}\sqrt{16.1} &\approx y(16)+\Delta y(16)= \\ &=\sqrt{16}+0.0125=4+0.0125=4.0125.\end{aligned}$$

Napomena: Točnija vrijednost je $\sqrt{16.1}\approx 4.01248053$. Relativna pogreška aproksimacije približno je jednaka $4.85 \cdot 10^{-4}$ %.

8. Tijelo mase 5 kg giba se brzinom 10 m/s s varijacijom od ±0.5 m/s. Izračunajte kinetičku energiju tijela i ocijenite pripadnu varijaciju pogreške.

Rješenje: Kinetičku energiju tijela zapišimo kao funkciju varijable v:

$$E(v)=\frac{m\cdot v^2}{2}.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\begin{aligned}\Delta E(v)&\approx \mathrm{d}E(v)=E'(v)\cdot \mathrm{d}v=\\&=\frac{m}{2}\cdot 2\cdot v\cdot \mathrm{d}v=\\&=m\cdot v\cdot \mathrm{d}v.\end{aligned}$$

Tako su kinetička energija tijela i pripadna varijacija pogreške redom jednaki:

$$\begin{aligned}&E=\frac{5\cdot 10^2}{2}=\frac{5\cdot 100}{2}=250\text{ J},\\&\Delta E(10)\approx \mathrm{d}E(10)=\pm 5\cdot 10\cdot 0.5=\pm 25\text{ J}.\end{aligned}$$

Pripadna relativna pogreška izračuna kinetičke energije jednaka je $\frac{25}{250}\cdot 100=10\%$, dok je relativna pogreška procjene brzine tijela jednaka $\frac{0.5}{10}\cdot 100=5\%$.

9. a) Ako polumjer osnovke uspravnoga kružnoga valjka odredimo s relativnom pogreškom od 1%, s kojom ćemo relativnom pogreškom odrediti volumen valjka?

Rješenje: Volumen valjka shvatimo kao funkciju njegova polumjera, tj. zapišimo:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta V(r) &\approx \mathrm{d}V(r) = V'(r) \cdot \mathrm{d}r = \\ &= 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \cdot \mathrm{d}r, \end{aligned}$$

pa dijeljenjem ove jednakosti s V i korištenjem pretpostavke $\frac{\mathrm{d}r}{r} = 1\%$ slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta V(r)}{V(r)} &\approx \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \cdot \mathrm{d}r}{r^2 \cdot \pi \cdot h} = \\ &= 2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{r} = 2 \cdot 1\% = 2\%. \end{aligned}$$

b) Riješite prethodni podzadatak uz pretpostavku da je relativna pogreška mjerenja visine valjka jednaka 1%.

Rješenje: Sada volumen valjka shvatimo kao funkciju njegove visine, tj. zapišimo:

$$V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\begin{aligned} \Delta V(h) &\approx \mathrm{d}V(h) = V'(h) \cdot \mathrm{d}h = \\ &= r^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{d}h, \end{aligned}$$

pa dijeljenjem ove jednakosti s V i korištenjem pretpostavke $\frac{\mathrm{d}h}{h} = 1\%$ slijedi:

$$\frac{\Delta V(h)}{V(h)} \approx \frac{r^2 \cdot \pi \cdot \mathrm{d}h}{r^2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{\mathrm{d}h}{h} = 1\%.$$

10. Procijenite promjenu jakosti struje koja teče električnim vodičem pri stalnom naponu, stalnoj temperaturi i relativno maloj promjeni otpora toga vodiča.

Rješenje: Jakost struje shvatimo kao funkciju otpora R, tj. zapišimo:

$$I(R) = \frac{U}{R}.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobijemo:

$$\begin{aligned}
\Delta I(R) &\approx \mathrm{d}I(R) = I'(R) \cdot \mathrm{d}R = \\
&= \frac{-U}{R^2} \cdot \mathrm{d}R = \\
&= \frac{-I \cdot R}{R^2} \cdot \mathrm{d}R = \\
&= \frac{-I}{R} \cdot \mathrm{d}R.
\end{aligned}$$