 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.15. Ispitivanje tijeka realne funkcije - zadaci
--	---	---

1. Ispitajte tijek sljedećih realnih funkcija i nacrtajte njihov graf:

a) $f_1(t) = t^3 - 3 \cdot t + 2;$

b) $f_2(x) = \frac{x}{x^2 - 2 \cdot x + 1};$

c) $f_3(t) = t + 1 + \frac{1}{t-1};$

d) $f_4(x) = \frac{x}{e^x};$

e) $f_5(t) = \frac{\ln t}{t};$

f) $f_6(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}};$

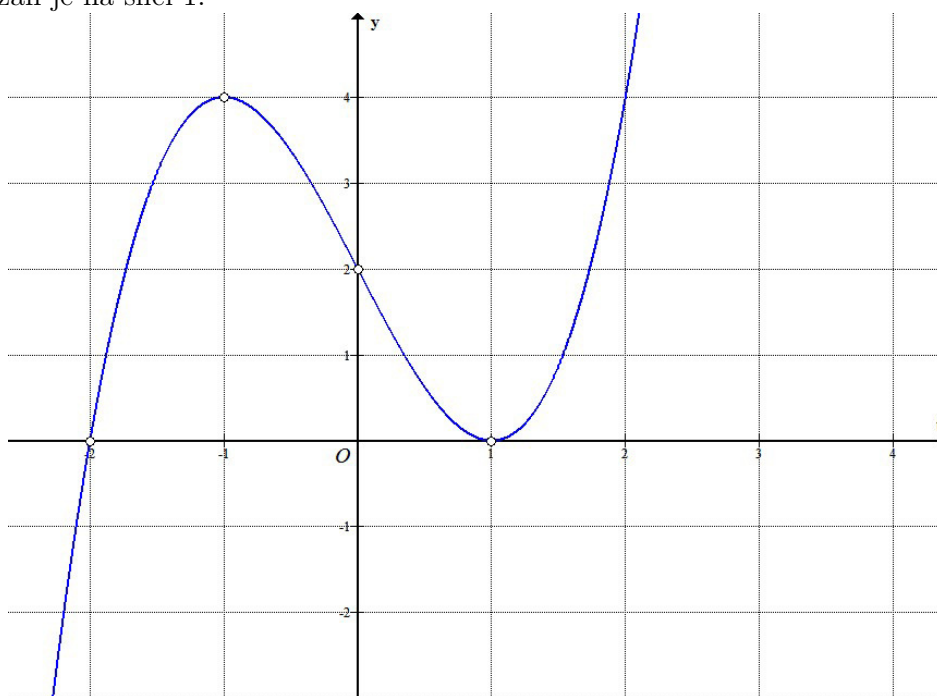
g) $f_7(t) = (t+1) \cdot e^{\frac{1}{t-1}};$

h) $f_8(x) = \ln^2 x.$

Rezultati zadataka

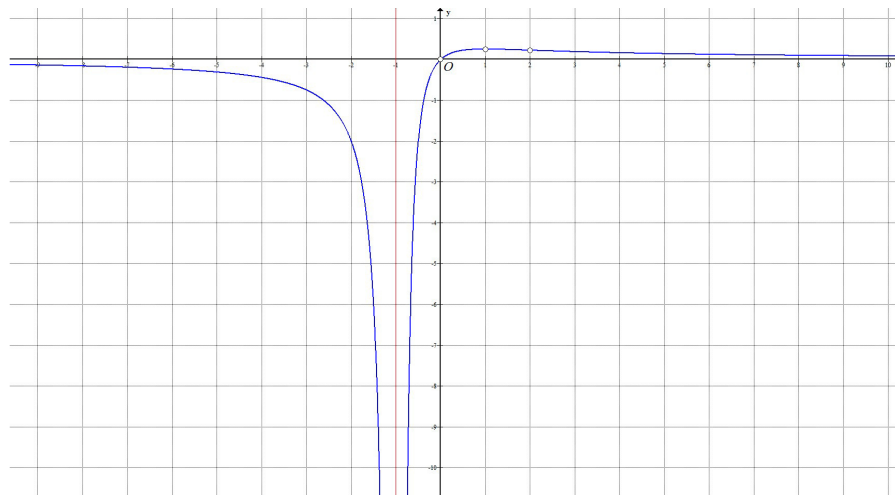
1.

- a) Vrijedi: $f_1'(t) = 3 \cdot t^2 - 3$, $f_1''(t) = 6 \cdot t$. $D(f_1) = \mathbb{R}$, $N(f_2) = \{-2, 1\}$, neparna, sjecišta s osi apscisa: $S_1 = (-2, 0)$ i $S_2 = (1, 0)$, sjecište s osi ordinata: $S_3 = (0, 2)$, intervali rasta: $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, interval pada: $\langle -1, 1 \rangle$, točka lokalnoga maksimuma: $T = (-1, 4)$, točka lokalnoga minimuma: S_2 , interval konkavnosti: $\langle -\infty, 0 \rangle$, interval konveksnosti: $\langle 0, +\infty \rangle$, točka pregiba: S_3 , nema nijednu asimptotu. Graf funkcije f_1 prikazan je na slici 1.



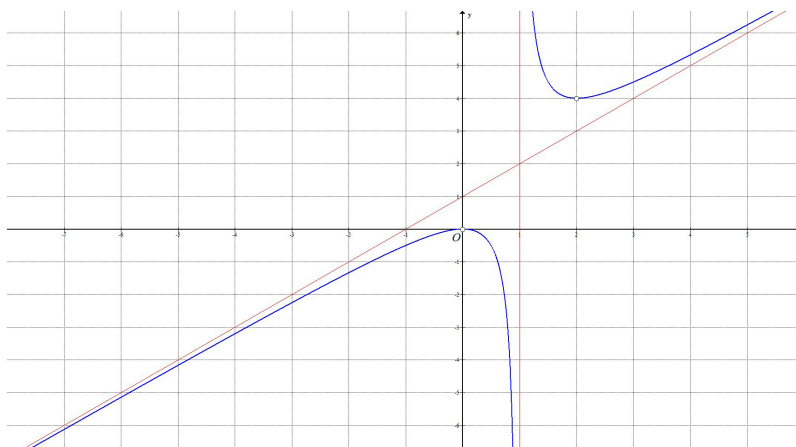
Slika 2.

- b) Vrijedi: $f_2'(x) = -\frac{x-1}{(x+1)^3}$, $f_2''(x) = \frac{2 \cdot (x-2)}{(x+1)^4}$. $D(f_2) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $N(f_2) = \{0\}$, $P(f_2) = \{-1\}$ (pol reda 1), neparna, sjecište s objema koordinatnim osima: $O = (0, 0)$, lokalni i globalni maksimum: $T_1 = \left(1, \frac{1}{4}\right)$, interval rasta: $\langle -1, 1 \rangle$, intervali pada: $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, točka pregiba: $T_2 = \left(2, \frac{2}{9}\right)$, intervali konkavnosti: $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $\langle -1, 2 \rangle$, interval konveksnosti: $\langle 2, +\infty \rangle$, asimptote: $x = -1$ i $y = 0$. Graf funkcije f_2 prikazan je na slici 2. (Crveni pravac je uspravna asimptota.)



Slika 2.

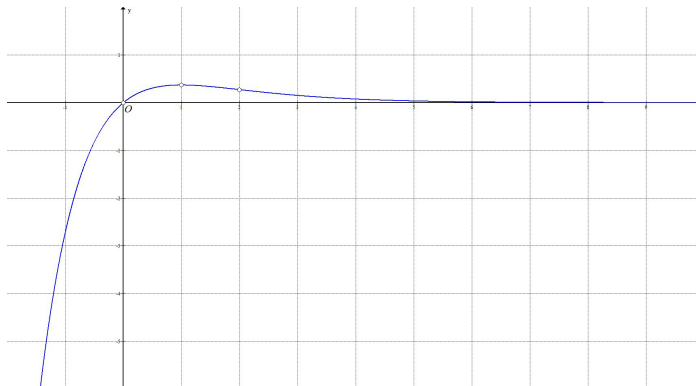
- c) Vrijedi: $f_3'(t) = 1 - \frac{1}{(t-1)^2}$, $f_3''(t) = \frac{2}{(t-1)^3}$. $D(f_3) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $N(f_4) = \{0\}$, sjecište s objema koordinatnim osima i točka lokalnoga maksimuma: $O = (0, 0)$, $P(f_4) = \{1\}$ (pol reda 1), ni parna ni neparna, intervali rasta: $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 2, +\infty \rangle$, intervali pada: $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 1, 2 \rangle$, točka lokalnoga minimuma: $T_1 = (2, 4)$, nema točka pregiba, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 1 \rangle$, interval konveksnosti: $\langle 1, +\infty \rangle$, asimptote: $t = 1$ i $y = t + 1$. Graf funkcije f_3 prikazan je na slici 3. (Crveni pravci su asimptote.)



Slika 3.

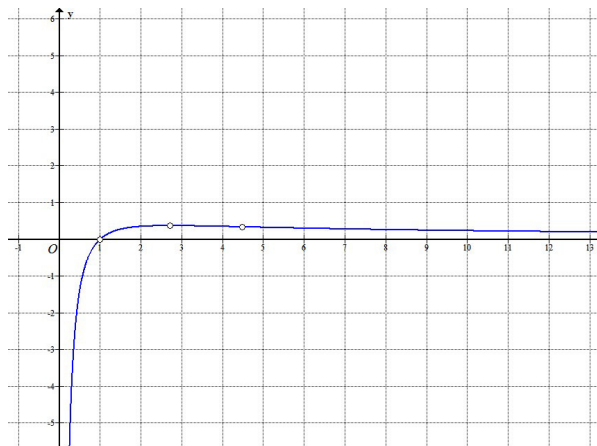
- d) Vrijedi: $f_4'(x) = \frac{1-x}{e^x}$, $f_4''(x) = \frac{x-2}{e^x}$. $D(f_4) = \mathbb{R}$, $N(f_4) = \{0\}$, sjecište s objema koordinatnim osima: $O = (0, 0)$, nema polova, nije ni parna ni neparna, interval rasta: $\langle -\infty, 1 \rangle$, interval pada: $\langle 1, +\infty \rangle$, točka lokalnoga i globalnoga maksimuma: $T_1 = \left(1, \frac{1}{e}\right)$, interval konkavnosti: $\langle -\infty, 2 \rangle$, interval konveksnosti: $\langle 2, +\infty \rangle$, točka

pregiba: $T_2 = \left(2, \frac{2}{e^2}\right)$, jedina desna vodoravna asimptota: $y=0$. Graf funkcije f_4 prikazan je na slici 4.



Slika 4.

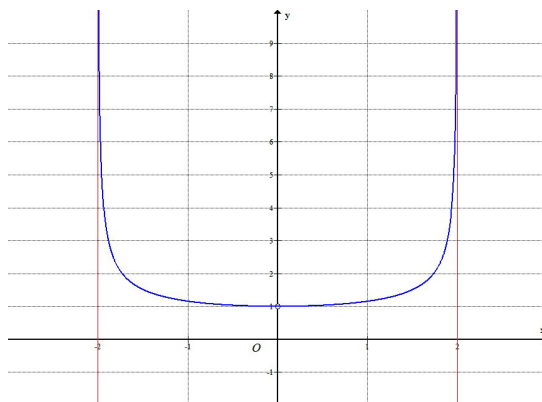
e) Vrijedi: $f_5'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2}$, $f_5''(t) = \frac{2 \cdot \ln t - 3}{t^3}$. $D(f_5) = \mathbb{R}^+$, $N(f_5) = \{1\}$, $P(f_5) = \{0\}$, nije ni parna ni neparna, sjecište s osi apscisa: $S = (1, 0)$, nema sjecišta s osi ordinata, interval rasta: $\langle 0, e \rangle$, interval pada: $\langle e, +\infty \rangle$, točka lokalnoga i globalnoga maksimuma: $T_1 = \left(e, \frac{1}{e}\right)$, interval konkavnosti: $\langle 0, e \cdot \sqrt{e} \rangle$, interval konveksnosti: $\langle e \cdot \sqrt{e}, +\infty \rangle$, točka pregiba: $T_2 = \left(e \cdot \sqrt{e}, \frac{3 \cdot \sqrt{e}}{2 \cdot e^2}\right)$, asimptote: $t=0$ i $y=0$. Graf funkcije f_5 prikazan je na slici 5.



Slika 5.

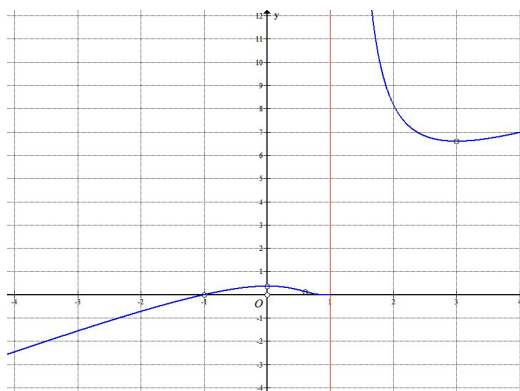
f) Vrijedi $f_6'(x) = \frac{2 \cdot x \cdot \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^2}$, $f_6''(x) = \frac{4 \cdot (x^2+2) \cdot \sqrt{4-x^2}}{(4-x^2)^3}$. $D(f_6) = \langle -2, 2 \rangle$, nema nultočaka, $P(f_6) = \{-2, 2\}$ (oba pola su reda 1), parna, sjecište s osi ordinata: $S = (0, 1)$,

interval pada: $\langle -2, 0 \rangle$, interval rasta: $\langle 0, 2 \rangle$, točka lokalnoga i globalnoga minimuma: S , konveksna na $D(f_6)$, nema točaka pregiba, asimptote: $x = -2$ i $x = 2$. Graf funkcije f_6 prikazan je na slici 6. (Crveni pravci su asimptote.)



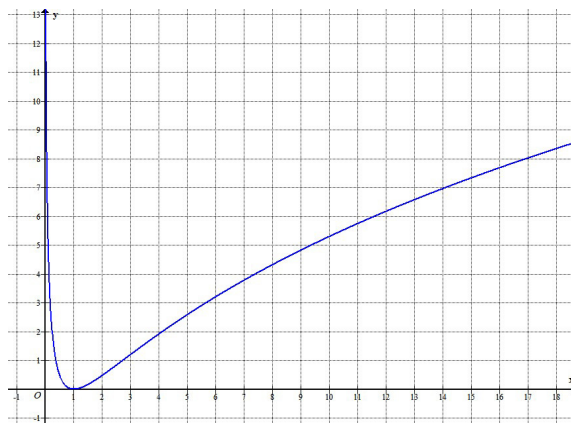
Slika 6.

g) Vrijedi: $f_7'(t) = \frac{t \cdot (t-3)}{(t-1)^2} \cdot e^{\frac{1}{t-1}}$, $f_7''(t) = \frac{5 \cdot t - 3}{(t-1)^4} \cdot e^{\frac{1}{t-1}}$. $D(f_7) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $N(f_7) = \{-1\}$, nema polova, ni parna, ni neparna, sjecište s osi apscisa: $S_1 = (-1, 0)$, sjecište s osi ordinata: $S_2 = \left(0, \frac{1}{e}\right)$, intervali rasta: $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 3, +\infty \rangle$, intervali pada: $\langle 0, 1 \rangle$ i $\langle 1, 3 \rangle$, točka lokalnoga minimuma: $T_1 = \left(3, 4 \cdot \sqrt{e}\right)$, točka lokalnoga maksimuma: S_2 , interval konkavnosti: $\left\langle -\infty, \frac{3}{5} \right\rangle$, intervali konveksnosti: $\left\langle \frac{3}{5}, 1 \right\rangle$ i $\langle 1, +\infty \rangle$, točka pregiba: $T_2 = \left(\frac{3}{5}, \frac{8}{5} \cdot e^{-\frac{5}{2}}\right)$, jedina asimptota: $t = 1$. Graf funkcije f_7 prikazan je na slici 7. (Crveni pravac je asimptota.)



Slika 7.

h) Vrijedi: $f_8'(x) = \frac{2 \cdot \ln x}{x}$, $f_8''(x) = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x}$. $D(f_8) = \mathbb{R}^+$, $N(f_8) = \{1\}$, sjecište s osi apscisa: $S = (1, 0)$, interval rasta: $\langle 1, +\infty \rangle$, interval pada: $\langle 0, 1 \rangle$, točka lokalnoga i globalnoga minimuma: S , interval konveksnosti: $\langle 0, e \rangle$, interval konkavnosti: $\langle e, +\infty \rangle$, točka pregiba: $T_2 = (e, 1)$, jedina asimptota: $x = 0$. Graf funkcije f_8 prikazan je na slici 8.



Slika 8.