

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.16. Derivacije višega reda. Diferencijal funkcije – zadaci
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odredite n -tu derivaciju funkcije:

$$1. \quad f(x) = x^m, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Rješenje: Očito su:

$$f'(x) = m \cdot x^{m-1}, \quad f''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2} \text{ itd.}$$

Razlikujemo dva slučaja:

$$\text{I. } m \geq n.$$

U ovom slučaju smanjivanjem za 1 prilikom svakoga od ukupno n deriviranja eksponent uz x ostaje prirodan broj. Zbog toga je:

$$f^{(n)}(x) = m \cdot \dots \cdot (m-n+1) \cdot x^{m-n}.$$

$$\text{II. } 1 \leq m < n.$$

Derivirajući funkciju f ukupno $m-1$ puta dobivamo:

$$f^{(m-1)}(x) = m \cdot \dots \cdot 2 \cdot x.$$

To je polinom 1. stupnja u varijabli x jer je $m \cdot \dots \cdot 2$ konstanta. Sljedeća (m -ta) derivacija jednaka je $f^{(m)}(x) = A = \text{const.}$, pa svakim dalnjim deriviranjem (još ukupno $n-m$ puta) te konstante kao rezultat dobivamo nulu. Zbog toga je u ovom slučaju $f^{(n)}(x) = 0$.

Zaključimo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^n (m-k+1) \cdot x^{m-n}, & \text{za } m \geq n; \\ 0, & \text{za } m < n. \end{cases}$$

$$2. \quad f(x) = \frac{1}{x}.$$

Rješenje: Očito su:

$$f'(x) = (-1) \cdot x^{-2}, \quad f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3}, \text{ itd.}$$

Primijetimo da je predznak neparne derivacije uvijek negativan, a parne uvijek pozitivan. Zbog toga se u zapisu pravila funkcije $f^{(n)}$ mora pojaviti član $(-1)^n$ čija je vrijednost (-1) kad je n neparan broj, a 1 kad je n paran broj. Nadalje,

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.16. Derivacije višega reda. Diferencijal funkcije – zadaci
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------

zanemarimo li predznake faktora koji tvore koeficijent uz potenciju od x vidimo da se u drugoj derivaciji pojavljuje umnožak $1 \cdot 2$, u trećoj umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3$, u četvrtoj $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ itd. Zaključujemo da je

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot \dots \cdot n \cdot x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}.$$

3. $f(x) = e^{ax+b}$.

Rješenje: Očito su

$$f'(x) = a \cdot e^{ax+b}, f''(x) = a^2 \cdot e^{ax+b} \text{ itd.}$$

Indukcijom se lako pokaže:

$$f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{ax+b}.$$

4. $f(x) = \ln x$.

Rješenje: Očito je $f'(x) = \frac{1}{x}$, pa primijenimo rezultat 2. zadatka, pri čemu na desnoj strani jednakosti umjesto n pišemo $n-1$ (jer ovdje „kasnimo“ s jednom derivacijom). Dobivamo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}.$$

5. $f(x) = \sin x$.

Rješenje: Očito su $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{IV}(x) = \sin x$. Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

6. $f(x) = \cos x$.

Rješenje: Očito su $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{IV}(x) = \cos x$. Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

7. Koristeći odgovarajući diferencijal približno izračunajte $\sqrt{16.1}$ i ocijenite relativnu pogrešku aproksimacije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Neka je $y = \sqrt{x}$. Prema definiciji diferencijala je tada:

$$\Delta y \approx dy = y' \cdot dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}}.$$

U našem su slučaju $x = 16$ i $dx = \Delta x = 0.1$, pa je diferencijal funkcije y u točki $x = 16$ jednak:

$$\Delta y(16) = \frac{0.1}{2\sqrt{16}} = \frac{0.1}{2 \cdot 4} = \frac{0.1}{8} = 0.0125.$$

Zbog toga je

$$\sqrt{16.1} \approx y(16) + \Delta y(16) = \sqrt{16} + 0.0125 = 4 + 0.0125 = 4.0125.$$

Napomena: Točnija vrijednost je $\sqrt{16.1} \approx 4.01248053$. Relativna pogreška aproksimacije približno je jednaka $4.85 \cdot 10^{-4}\%$.

8. Tijelo mase 5 kg giba se brzinom 10 m/s s varijacijom od ± 0.5 m/s. Izračunajte kinetičku energiju tijela i ocijenite pripadnu varijaciju pogreške.

Rješenje: Kinetičku energiju tijela zapišimo kao funkciju varijable v :

$$E(v) = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\Delta E(v) \approx dE(v) = E'(v) \cdot dv = \frac{m}{2} \cdot 2 \cdot v \cdot dv = m \cdot v \cdot dv.$$

Tako su kinetička energija tijela i pripadna varijacija pogreške redom jednaki:

$$E = \frac{5 \cdot 10^2}{2} = \frac{5 \cdot 100}{2} = 250 \text{ J}, \quad \Delta E(10) \approx dE(10) = \pm 5 \cdot 10 \cdot 0.5 = \pm 25 \text{ J}.$$

Pripadna relativna pogreška izračuna kinetičke energije jednaka je $\frac{25}{250} \cdot 100 = 10\%$,

dok je relativna pogreška procjene brzine tijela jednaka $\frac{0.5}{10} \cdot 100 = 5\%$.

9. a) Ako polumjer osnovke uspravnoga kružnoga valjka odredimo s relativnom pogreškom od 1%, s kojom ćemo relativnom pogreškom odrediti volumen valjka?
- b) Riješite prethodni podzadatak uz pretpostavku da je relativna pogreška mjerena visine valjka jednaka 1%.

Rješenje: a) Volumen valjka shvatimo kao funkciju njegova polumjera, tj. zapišimo:

$$V(r) = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\Delta V(r) \approx dV(r) = V'(r) \cdot dr = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \cdot dr,$$

pa dijeljenjem ove jednakosti s V i korištenjem pretpostavke $\frac{dr}{r} = 1\%$ slijedi:

$$\frac{\Delta V(r)}{V(r)} \approx \frac{2 \cdot r \cdot \pi \cdot h \cdot dr}{r^2 \cdot \pi \cdot h} = 2 \cdot \frac{dr}{r} = 2 \cdot 1\% = 2\%.$$

b) Sada volumen valjka shvatimo kao funkciju njegove visine, tj. zapišimo:

$$V(h) = r^2 \cdot \pi \cdot h.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobivamo:

$$\Delta V(h) \approx dV(h) = V'(h) \cdot dh = r^2 \cdot \pi \cdot dh,$$

pa dijeljenjem ove jednakosti s V i korištenjem pretpostavke $\frac{dh}{h} = 1\%$ slijedi:

$$\frac{\Delta V(h)}{V(h)} \approx \frac{r^2 \cdot \pi \cdot dh}{r^2 \cdot \pi \cdot h} = \frac{dh}{h} = 1\%.$$

10. Procijenite promjenu jakosti struje koja teče električnim vodičem pri stalnom naponu, stalnoj temperaturi i relativno maloj promjeni otpora toga vodiča.

Rješenje: Jakost struje shvatimo kao funkciju otpora R , tj. zapišimo:

$$I(R) = \frac{U}{R}.$$

Diferenciranjem ovoga izraza dobijemo:

$$\Delta I(R) \approx dI(R) = I'(R) \cdot dR = -\frac{U}{R^2} \cdot dR = -\frac{I \cdot R}{R^2} \cdot dR = -\frac{I}{R} \cdot dR.$$