TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**4.16. Derivacije višega reda. Diferencijal funkcije** – zadaci

1. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odredite n-tu derivaciju sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = x^m$, $m \in \mathbb{N}$;

b) $f(x) = \frac{1}{x}$;

c) $f(x) = e^{a \cdot x + b}$;

d) $f(x) = \operatorname{ch} x$;

e) $f(x) = \operatorname{sh} x$;

f) $f(x) = \ln x$;

g) $f(x) = \sin x$;

h) $f(x) = \cos x$;

i) $f(x) = \sin^2 x$;

j) $f(x) = \cos^2 x$.

2. Koristeći Leibnizovu formulu i rezultat zadatka 1., za svaki $n \in \mathbb{N}$ odredite n-tu derivaciju sljedećih realnih funkcija:

a) $f(x) = e^x \cdot \sin x$;

b) $f(x) = \frac{\cos x}{e^x}$;

c) $f(x) = e^{2 \cdot x} \cdot \ln(2 \cdot x)$.

3. Izračunajte Δy i $\mathrm{d}y$ funkcije $f(x) = 2019 \cdot x^2 + 2018$ za $x = 1$ i prirast $\Delta x = 0.01$. Objasnite značenje izračunanih vrijednosti.

4. Odredite diferencijale sljedećih realnih funkcija za bilo koje vrijednosti varijable x i prirasta Δx:

a) $y = x^3 - 3 \cdot x^2 + 3 \cdot x$;

b) $y = \sin^2 x$;

c) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

d) $y = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Rezultati zadataka

1. a) Očito su $f'(x) = m \cdot x^{m-1}$, $f''(x) = m \cdot (m-1) \cdot x^{m-2}$ itd. Induktivno naslućujemo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi jednakost $f^{(n)}(x) = m \cdot \ldots \cdot (m-n+1) \cdot x^{m-n}$. Dokažimo je.

Razlikujemo dva slučaja:

I. $m \geq n$

U ovom je slučaju gornja jednakost ispravna jer je eksponent uz x prirodan broj i svaki od brojeva koji tvore umnožak $m \cdot \ldots \cdot (m - n + 1)$ je strogo pozitivan.

II. $1 \leq m < n$

Derivirajući funkciju f ukupno $m-1$ puta dobivamo $f^{(m-1)}(x) = m \cdot \ldots \cdot 2 \cdot x$, a to je izraz oblika $A \cdot x$, gdje je A neka realna (u ovom slučaju čak strogo pozitivna cjelobrojna) konstanta. Sljedeća (m-ta) derivacija jednaka je $f^{(m)}(x) = A$ = const., pa svakim daljnjim deriviranjem (još ukupno $n-m$ puta) kao rezultat dobivamo nulu. Zbog toga je u ovom slučaju $f^{(n)}(x) = 0$.

Zaključimo:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \prod_{k=1}^{n} (m-k+1) \cdot x^{m-n}, \text{ za } m \geq n; \\ 0, \text{ za } m < n \end{cases}$$

b) Očito su $f'(x) = (-1) \cdot x^{-2}, f''(x) = (-1) \cdot (-2) \cdot x^{-3},$ itd. Primijetimo da je predznak neparne derivacije uvijek negativan, a parne uvijek pozitivan. Zbog toga se u zapisu pravila funkcije $f^{(n)}$ mora pojaviti član $(-1)^n$ čija je vrijednost (-1) kad je n neparan broj, a 1 kad je n paran broj.

Nadalje, zanemarimo li predznake faktora koji tvore koeficijent uz potenciju od x vidimo da se u drugoj derivaciji pojavljuje umnožak $1 \cdot 2$, u trećoj umnožak $1 \cdot 2 \cdot 3$, u četvrtoj $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ itd. Zaključujemo da je

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot 1 \cdot \ldots \cdot n \cdot x^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{x^{n+1}}.$$

c) Očito su $f'(x) = a \cdot e^{a \cdot x + b}, f''(x) = a^2 \cdot e^{a \cdot x + b}$ itd. Indukcijom se lako pokaže: $f^{(n)}(x) = a^n \cdot e^{a \cdot x + b}$.

d) Očito su $f'(x) = \operatorname{sh} x, f''(x) = \operatorname{ch} x$ itd., pa lako zaključujemo da je:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, \text{ za neparne } n; \\ \operatorname{ch} x, \text{ za parne } n. \end{cases}$$

e) Očito su $f'(x) = \operatorname{ch} x, f''(x) = \operatorname{sh} x$ itd., pa lako zaključujemo da je:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, \text{ za neparne } n; \\ \operatorname{sh} x, \text{ za parne } n. \end{cases}$$

f) Očito je $f'(x) = \frac{1}{x}$, pa primijenimo rezultat **b)** podzadatka, pri čemu na desnoj strani jednakosti umjesto n pišemo $n-1$ (jer ovdje „kasnimo“ s jednom derivacijom). Dobivamo:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (n-1)!}{x^n}.$$

g) Očito su $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, f'''(x) = -\cos x, f^{\text{IV}}(x) = \sin x$. Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

h) Očito su $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{\text{IV}}(x) = \cos x$. Primjenom formula redukcije induktivno zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

i) Primjenom formule za kut dvostrukoga argumenta dobivamo $f(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 + \cos(2 \cdot x)]$. Koristeći rješenje prethodnoga podzadatka lagano dobijemo:

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-1} \cdot \cos\left(2 \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

j) Primjenom formule za kut dvostrukoga argumenta dobivamo $f(x) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \cos(2 \cdot x)]$. Koristeći rješenje **b)** podzadatka lagano dobijemo:

$$f^{(n)}(x) = -2^{n-1} \cdot \cos\left(2 \cdot x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

2. a) U ovome su slučaju $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sin x$, pa za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijede jednakosti: $f_1^{(k)}(x) = e^x$ i $f_2^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Uvrštavanjem u Leibnizovu formulu dobijemo:

$$(f)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot e^x \cdot \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = e^x \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

b) U ovome su slučaju $f_1(x)=e^{-x}$, $f_2(x)=\cos x$, pa za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijede jednakosti $f_1^{(k)}(x)=(-1)^k\cdot e^{-x}$ i $f_2^{(k)}(x)=\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$. Uvrštavanjem u Leibnizovu formulu slijedi:

$$(f)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k e^{-x}\cdot\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)=e^{-x}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(-1)^k\cos\left(x+k\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

c) U ovome su slučaju $f_1(x)=e^{2\cdot x}$, $f_2(x)=\ln(2\cdot x)=\ln 2+\ln x$, pa za svaki $k\in\mathbb{N}$ vrijede jednakosti $f_1^{(k)}(x)=2^k\cdot e^{2\cdot x}$ i $f_2^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^k}$. Uvrštavanjem u Leibnizovu formulu dobijemo:

$$(f)^{(n)}(x)=e^{2\cdot x}\cdot\left[2\cdot\ln(2\cdot x)+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k\cdot\frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{x^k}\right]=e^{2\cdot x}\cdot\left[2\cdot\ln(2\cdot x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k\cdot(n-k)!}\cdot\left(\frac{-2}{x}\right)^k\right].$$

3. Prema definiciji je:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=2019\cdot(x+\Delta x)^2+2018-(2019\cdot x^2+2018)=4038\cdot x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Zbog toga za $x=1$ i $\Delta x=0.01$ dobivamo:

$$\Delta y=4038\cdot 1\cdot 0.01+(0.01)^2=40.3801.$$

Dakle, kad se vrijednost nezavisne varijable poveća s $x=1$ na $x=1+0.01=1.01$, vrijednost funkcije *f*, tj. vrijednost zavisne varijable *y* poveća se za 40.3801. (Prirast ordinate krivulje $y=2019\cdot x^2+2018$ iznosi 40.3801.)

Nadalje, prema definiciji diferencijala funkcije vrijedi $\mathrm{d}y=f'(x)\cdot\Delta x=4038\cdot x\cdot\Delta x$,pa za $x=1$ i $\Delta x=0.01$ dobivamo:

$$\mathrm{d}y=4038\cdot 1\cdot 0.01=40.38$$

Dakle, kad se vrijednost nezavisne varijable poveća s $x=1$ na $x=1+0.01=1.01$, linearni dio prirasta zavisne varijable iznosi 40.38. (Prirast ordinate tangente povučene na krivulju $y=2018\cdot x^2+2017$ u točki $T=(1, 4035)$ iznosi 40.38.)

4. a) Budući da je $y'=3\cdot x^2-6\cdot x+3$, to je $\mathrm{d}y=(3\cdot x^2-6\cdot x+3)\cdot\mathrm{d}x$.

b) Budući da je $y'=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin(2\cdot x)$, to je $\mathrm{d}y=\sin(2\cdot x)\cdot\mathrm{d}x$.

c) Budući da je $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, to je $\mathrm{d}y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\mathrm{d}x$.

d) Budući da je $y'=-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}$, to je $\mathrm{d}y=\left(-\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2-1}}\right)\cdot\mathrm{d}x$.