4.16. DERIVACIJE VIŠEGA REDA.

DERIVACIJE VIŠEGA REDA.
DIFERENCIJAL FUNKCIJE.

4.16.1. DERIVACIJE VIŠEGA REDA

- Prigodom određivanja lokalnih i globalnih ekstrema, te točaka pregiba koristili smo drugu derivaciju funkcije.
- Drugu derivaciju funkcije (ili *derivaciju drugoga reda*) dobili smo tako da smo najprije odredili prvu derivaciju, a potom derivirali dobiveno pravilo te derivacije.
- Analogna ideja provodi se za *derivacije reda* n, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$ bilo koji prirodan broj.

4.16.1. DERIVACIJE VIŠEGA REDA

- Formalno se **derivacija reda** n realne funkcije f definira induktivno s:
- $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$, za svaki $n \in \mathbb{N}$,
- pri čemu je dogovorno $f^{(0)} = f$.
- Prigodom određivanja derivacije reda n funkcije f treba odrediti sve derivacije funkcije f reda 1, ..., $n - 1$.
- **Ne** postoji algoritam koji omogućuje određivanje derivacije reda n bez potrebe određivanja derivacija reda 1, ..., $n - 1$.
- No, za neke elementarne funkcije poznati su analitički izrazi za derivacije reda n.

4.16.2. LEIBNIZOVA FORMULA

- Derivacija reda n u jednostavnijim se slučajevima može izračunati i korištenjem tzv. **Leibnizove formule**.
- Osnovna pretpostavka je da se polazna funkcija može zapisati kao umnožak dvije (relativno jednostavne elementarne) funkcije.
- Ako je $f = f_1 \cdot f_2$, onda je

$$f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (f_1)^{(n-k)} \cdot (f_2)^{(k)}$$

4.16.3. PRIRAST ARGUMENTA

- Neka je $y = f\ (x)$ *neprekidna* realna funkcija definirana na segmentu $[a,\ b]$. Definiramo realan broj:
  - $\Delta a := b - a;$
- Veličina Δa naziva se **prirast argumenta** u segmentu $[a,\ b]$.
- Za izračunavanje prirasta argumenta *uvijek* moramo znati početnu i krajnju točku segmenta u kojem računamo prirast.

4.16.4. PRIRAST FUNKCIJE

- Nadalje, definiramo realan broj
- $\Delta y := f(b) - f(a)$
- Veličina Δy naziva se **prirast funkcije** y u segmentu $[a, b]$.
- Zbog prethodne jednakosti, gornju jednakost možemo zapisati u obliku
- $\Delta y := f(a + \Delta a) - f(a)$.

4.16.5. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Otprije znamo da je $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$
- Tu jednakost možemo zapisati u obliku

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f\big((x-a)+a\big) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{f(a+\Delta a) - f(a)}{\Delta a} = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta a}$$

- Navedeno razmatranje možemo provesti za bilo koju točku a, pa općenito imamo: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- Ovu jednakost možemo zapisati u obliku: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$
- Pritom je ε veličina (zapravo, funkcija varijable x) takva da $\varepsilon \to 0$ kad $\Delta x \to 0$
- Odavde slijedi: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x + \varepsilon \cdot \Delta x$

4.16.5. DIFERENCIJAL FUNKCIJE

- Član dy := y' · Δx naziva se **diferencijal funkcije** y.
- Uzmemo li $f(x) = x$, odnosno $y = x$, dobijemo:
- $\mathrm{d}x = (x)' \cdot \Delta x$,
- odnosno
- $\mathrm{d}x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$.
- Član dx naziva se **diferencijal argumenta** x.
- On je jednak prirastu argumenta x na segmentu $[x, x + \Delta x]$.
- Sukladno tome, formulu za dy uobičajeno pišemo u obliku:
- $\mathrm{d}y := y' \cdot \mathrm{d}x$
- Dakle: *diferencijal funkcije jednak je umnošku derivacije funkcije i diferencijala argumenta.*

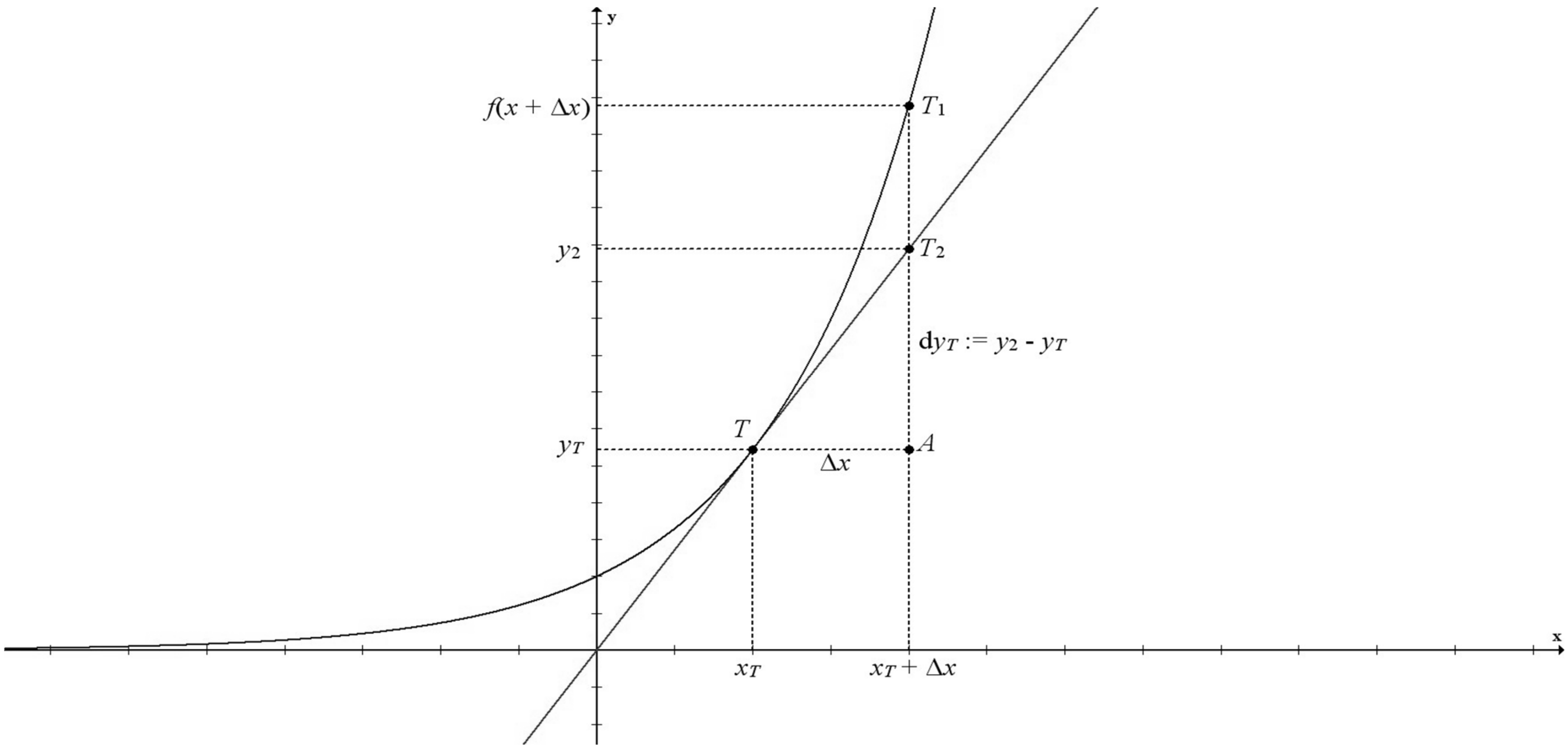
4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE

- Neka je zadana krivulja $y = f(x)$.
- U nekoj točki $T = (x_T,\ y_T)$ te krivulje povucimo tangentu na zadanu krivulju.
- Promatramo što se događa kad x_T povećamo za određenu vrijednost (**prirast**) $\mathbf{\Delta} x > 0$.
- Pomičemo li se po krivulji $y = f(x)$, doći ćemo u novu točku T_1 te krivulje.
- Njezine koordinate su $T_1 = (x + \mathbf{\Delta} x,\ f(x + \mathbf{\Delta} x))$.

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE

- Pomičemo li se po *tangenti* povučenoj u točki T, doći ćemo u novu točku $T_2 = (x + \Delta x,\ y_2)$.
- Tada je:
- $\mathrm{d}y_T = y_2 - y_T$
- (vidjeti sliku na sljedećem slideu).
- Odatle slijedi:
- *Diferencijal funkcije* (u točki x) *jednak je prirastu ordinate tangente povučene u toj točki* (kad x povećamo za Δx)

4.16.6. GEOMETRIJSKA INTERPRETACIJA DIFERENCIJALA FUNKCIJE



4.16.7. PRAVILA ZA DIFERENCIRANJE

- Sva pravila važeća za deriviranje funkcija vrijede i za diferenciranje funkcija.
- Točnije, vrijede sljedeće jednakosti:

1.) $\mathrm{d}C = 0$ (diferencijal konstante jednak je 0)

2.) $\mathrm{d}(f \pm g) = \mathrm{d}f \pm \mathrm{d}g$;

3.) $\mathrm{d}(f \cdot g) = \mathrm{d}f \cdot g + f \cdot \mathrm{d}g$;

4.) $\mathrm{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathrm{d}f \cdot g - f \cdot \mathrm{d}g}{g^2}$.

4.16.8. NAPOMENE

- **1.)** Diferencijal funkcije se alternativno može interpretirati kao **linearni dio prirasta** funkcije f , tj. dio prirasta funkcije f koji je linearan s obzirom na prirast nezavisne varijable x.
- **2.)** Za funkciju koja ima diferencijal kažemo da je **diferencijabilna**. Iz definicije diferencijala funkcije slijedi da je svaka realna funkcija diferencijabilna ako i samo ako je derivabilna. Zbog toga se diferencijal nerijetko koristi za *definiciju* derivacije funkcije.
- **3.)** Diferencijal reda n definiran je s: $\mathrm{d}^n y = y^{(n)}(\mathrm{d}x)^n$.