4.15.
ISPITIVANJE TIJEKA REALNE FUNKCIJE JEDNE REALNE VARIJABLE

4.15.1. ISPITIVANJE TIJEKA REALNE FUNKCIJE

- Obuhvaća određivanje sljedećih podataka:
- prirodna domena;
- nultočke (sjecišta grafa funkcije s osi apscisa);
- sjecište grafa funkcije s osi ordinata;
- polovi funkcije;
- (ne)prekidnost, (ne)parnost i periodičnost funkcije;
- intervali monotonosti;
- lokalni (i eventualno globalni) ekstremi;
- intervali konveksnosti i konkavnosti;
- točke pregiba (infleksije);
- asimptote;
- crtanje grafa funkcije na temelju prethodnih podataka.

Ispitajte tijek sljedećih realnih funkcija i nacrtajte njihov graf:

1. $p(t)=t^3-3\cdot t+2.$

Rješenje: Primijetimo da je p polinom 3. stupnja. To znači da je $D(p)=\mathbb{R}$. Iz istoga je razloga p neprekidna funkcija, nije periodična, nema nijedan pol, a njezin graf nema nijednu asimptotu.

- *Nultočke i sjecišta grafa polinoma p s osi apscisa*: Riješimo jednadžbu $p(t)=0$. Dobivamo $t_1=-2,\ t_2=t_3=1.$ Zaključujemo da je $N(p)=\{-2,1\}$ i da graf polinoma p siječe os apscisa u točkama $S_1=(-2,0)$ i $S_2=(1,0).$

- *Sjecište grafa polinoma p s osi ordinata*: Budući da je $0\in D(p)=\mathbb{R}$, graf polinoma p siječe os ordinata. Druga koordinata sjecišta jednaka je $p(0)=2.$ Dakle, sjecište grafa polinoma p i osi ordinata je točka $S_3=(0,2).$

- (*Ne*)*Parnost polinoma*: Vrijedi relacija:

$$\begin{aligned}p(-t)&=(-t)^3-3\cdot(-t)+2=\\&=-t^3+3\cdot t+2=\\&=-\left(t^3-3\cdot t-2\right)\notin\{p(t),-p)(t)\}\end{aligned}$$

pa odatle zaključujemo da p nije ni parna, ni neparna funkcija.

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$\begin{aligned}p'(t)&=3\cdot t^2-3\cdot 1+0=3\cdot t^2-3,\\p''(t)&=3\cdot 2\cdot t^1-0=6\cdot t.\end{aligned}$$

Iz jednadžbe $p'(t)=0$ slijedi $t^2=1.$ Sva rješenja te jednadžbe su $t_3=1$ i $t_4=-1.$ Lako vidimo da su

$$\begin{aligned}p''(t_3)&=p''(1)=6>0,\\p''(t_4)&=p''(-1)=-6<0,\end{aligned}$$

pa primjenom $f''-$ testa zaključujemo da je $S_2=(1,0)$ točka lokalnoga minimuma polinoma p, a $S_4=(-1,p(-1))=(-1,4)$ točka lokalnoga maksimuma polinoma p. Navedeni lokalni ekstremi nisu globalni jer se lako vidi da su

$$\lim_{x\to-\infty}p(x)=-\infty \text{ i } \lim_{x\to+\infty}p(x)=+\infty.$$

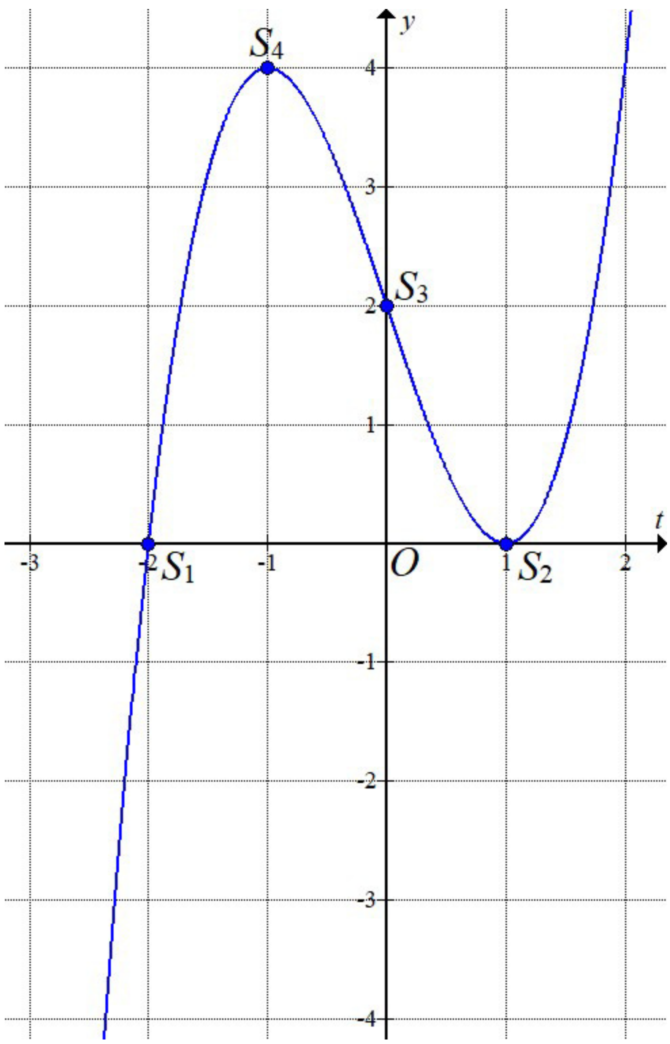
Iz gornjih zaključaka slijedi da p strogo raste na intervalima $\langle -\infty, -1\rangle$ i $\langle 1, +\infty\rangle$, a strogo pada na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Isti zaključci slijede i iz sljedeće tablice:

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
p'	$+$		$-$		$+$	

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Iz $p''(t) = 0$ odmah slijedi $t_5 = 0$. Iz donje tablice slijedi da je p konkavan na $\langle -\infty, 0\rangle$, a konveksan na $\langle 0, +\infty\rangle$. Zbog toga je $S_3 = (0, 2)$ točka pregiba grafa polinoma p.

$-\infty$		0		$+\infty$
p''	$-$		$+$	

- *Graf polinoma p*: Prikazan je na slici 1.



Slika 1.

2. $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2\cdot x+1}$.

Rješenje: Najprije primijetimo da je $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

- *Prirodna domena*: Iz uvjeta $(x-1)^2 \neq 0$ slijedi $x \neq 1$. Zbog toga je $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije f s objema koordinatnim osima*: Iz $f(x)=0$ odmah slijedi $x_1=0$. Zbog toga je $O=(0,0)$ sjecište grafa funkcije f s *objema* koordinatnim osima.

- *Točke prekida*: f je količnik dviju neprekidnih funkcija (polinoma), pa je neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: Vidimo da je $x=1$ pol funkcije reda 2. Zbog toga je $P(f)=\{1\}$.

- *Parnost i periodičnost funkcije*: Kao količnik dvaju polinoma, f nije periodična funkcija. f nije ni parna, ni neparna funkcija jer vrijedi relacija:

$$f(-x)=\frac{-x}{(-x-1)^2}=$$
$$=\frac{-x}{(-1)^2\cdot(x+1)^2}=$$
$$=\frac{-x}{(x+1)^2}\notin\{f(x),-f(x)\}.$$

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x-1)^2-x\cdot 2\cdot(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}=$$
$$=\frac{(x-1)\cdot(x-1-2\cdot x)}{(x-1)^4}=$$
$$=-\frac{x+1}{(x-1)^3}.$$

Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi $x+1=0$, odnosno $x_2=-1$. Sastavimo tablicu.

$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f'	-		+		-	

Odatle zaključujemo da f raste na intervalu $\langle -1,1\rangle$, a pada na intervalima $\langle -\infty,-1\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$. Točka $T_1=(-1,f(-1))=\left(-1,-\frac{1}{4}\right)$ je točka lokalnoga minimuma. Taj minimum je ujedno i globalni minimum jer za svaki $x\in D(f)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ vrijedi nejednakost:

$$\begin{aligned}&\frac{x}{(x-1)^2}\geq -\frac{1}{4},\\&4\cdot x\geq -(x-1)^2,\\&(x-1)^2+4\cdot x\geq 0,\\&(x+1)^2\geq 0.\end{aligned}$$

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

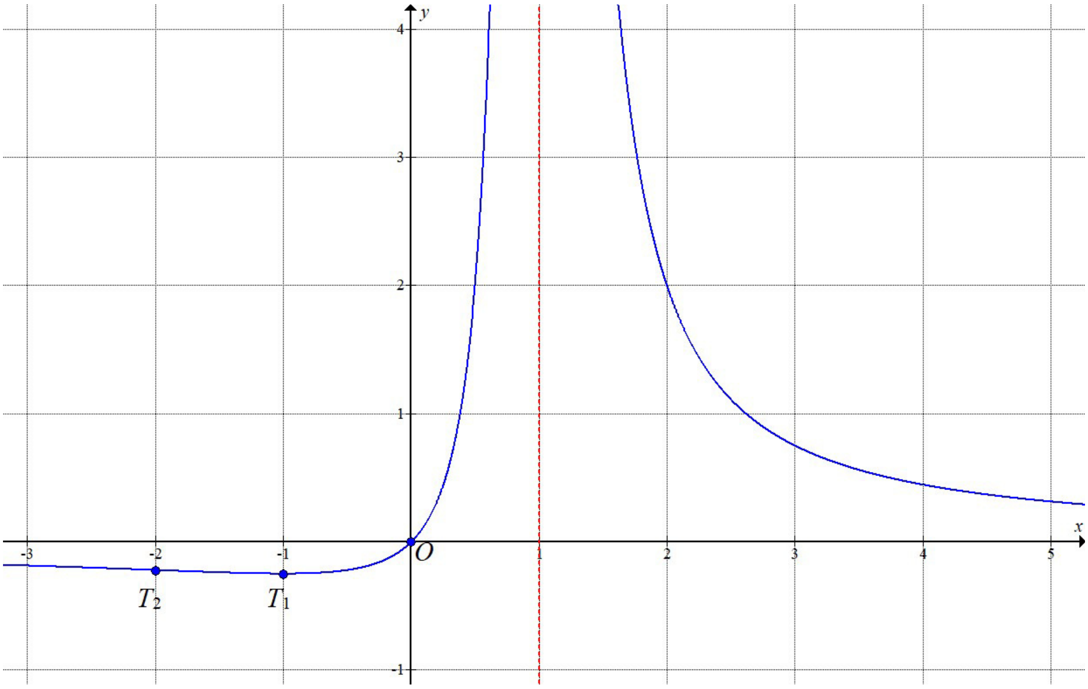
$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{(-1)\cdot(x-1)^3-(-x-1)\cdot 3\cdot(x-1)^2\cdot 1}{(x-1)^6}=\\&=\frac{(x-1)^2\cdot(-x+1+3\cdot x+3)}{(x-1)^6}=\\&=\frac{2\cdot(x+2)}{(x-1)^4}.\end{aligned}$$

Iz jednadžbe $f''(x)=0$ slijedi $x+2=0$, a odatle je $x_3=-2$.

Uočimo da za svaki $x\in D(f)$ vrijedi nejednakost $(x-1)^4>0$. Zbog toga je predznak funkcije f'' jednak je predznaku izraza $x+2$. To znači da je f konkavna na $\langle -\infty,-2\rangle$, a konveksna na $\langle -2,1\rangle$ i $\langle 1,+\infty\rangle$. Odatle slijedi da je $T_2=(-2,f(-2))=\left(-2,-\frac{2}{9}\right)$ točka pregiba grafa funkcije f.

- *Asimptote*: Ranije smo zaključili da je $x=1$ pol funkcije f reda 2. Odatle slijedi da je pravac $x=1$ uspravna asimptota na graf te funkcije. Nadalje, stupanj brojnika funkcije f je strogo manji od stupnja nazivnika te funkcije. To znači da graf zadane funkcije ima vodoravnu asimptotu $y=0$.

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 2. (Iscrtkani pravac je uspravna asimptota.)



Slika 2.

3. $f(t) = t - 1 + \dfrac{1}{t+1}$.

Rješenje: Najprije primijetimo da vrijedi jednakost:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{(t-1)\cdot(t+1)+1}{t+1} = \\ &= \frac{t^2-1+1}{t+1} = \\ &= \frac{t^2}{t+1}. \end{aligned}$$

- *Prirodna domena*: Iz uvjeta $t+1 \neq 0$ slijedi $t \neq -1$. Zbog toga je $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije f s objema koordinatnim osima*: Iz jednadžbe $f(t) = 0$ odmah slijedi $t_1 = 0$. To znači da graf funkcije *f* siječe *obje* koordinatne osi u točki $O = (0,0)$.

- *Točke prekida*: *f* je količnik dviju neprekidnih funkcija (polinoma), pa je neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: Vidimo da je $t = -1$ pol funkcije reda 1. Zbog toga je $P(f) = \{-1\}$.

- *Parnost i periodičnost funkcije*: *f* je količnik dvaju polinoma, pa nije periodična. *f* nije ni parna, ni neparna jer vrijedi relacija:

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{(-t)^2}{(-t)+1} = \\ &= \frac{t^2}{-t+1} = \\ &= \frac{t^2}{-(t-1)} = \\ &= \frac{-t^2}{t-1} \notin \{f(t), -f(t)\}. \end{aligned}$$

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$\begin{aligned} f'(t) &= 1 - 0 + \frac{0\cdot(t+1) - 1\cdot 1}{(t+1)^2} = \\ &= 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(t+1)^2 - 1}{(t+1)^2} =$$

$$= \frac{(t+1)^2 - 1^2}{(t+1)^2} =$$

$$= \frac{t \cdot (t+2)}{(t+1)^2}.$$

Iz jednadžbe $f^{'}(t) = 0$ odmah slijedi $t_1 = 0,\ t_2 = -2.$

Primijetimo da za svaki $t \in D(f)$ vrijedi nejednakost $(t+1)^2 > 0.$ Zbog toga je predznak funkcije $f^{'}$ jednak predznaku umnoška $t \cdot (t+2).$ Sastavimo tablicu.

-∞		-2		-1		0		+∞
$f^{'}$	+		−		-		+	

Odatle zaključujemo da f raste na intervalima $\langle -\infty, -2 \rangle$ i $\langle 0, +\infty \rangle$, a pada na intervalima $\langle -2, -1 \rangle$ i $\langle -1, 0 \rangle$. To znači da je $T_1 = (-2, f(-2)) = (-2, -4)$ točka lokalnoga maksimuma, a $O = (0, 0)$ točka lokalnoga minimuma funkcije f.

Lako vidimo da su

$$\lim_{t \to (-1)-} f(t) = -\infty, \quad \lim_{t \to (-1)+} f(t) = +\infty,$$

pa dobiveni lokalni ekstremi nisu globalni ekstremi.

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$f^{''}(t) = 0 - \frac{0 \cdot (t-1)^2 - 1 \cdot 2 \cdot (t+1) \cdot 1}{(t+1)^4} =$$

$$= \frac{2 \cdot (t+1)}{(t+1)^4} =$$

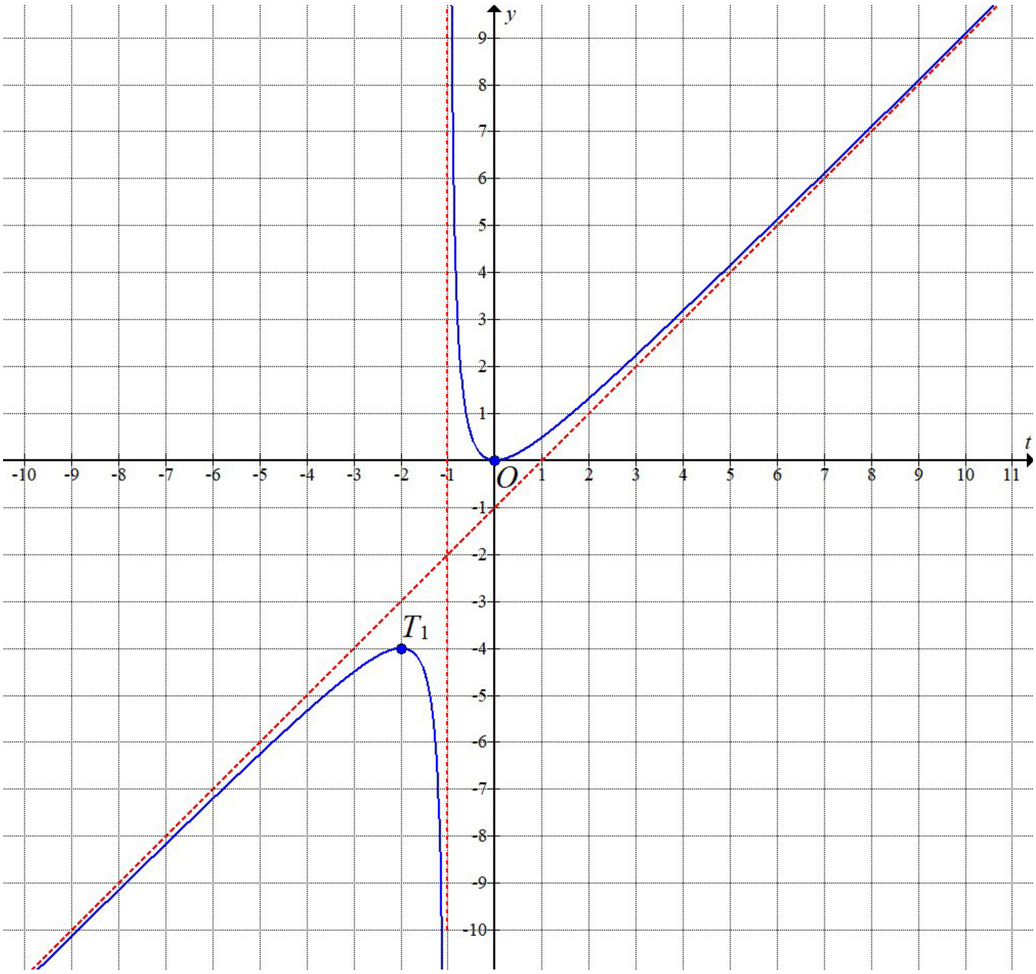
$$= \frac{2}{(t+1)^3}.$$

Odatle slijedi da graf funkcije f nema nijednu točku pregiba. Međutim, predznak funkcije $f^{''}$ jednak je predznaku izraza $t+1$. Tako zaključujemo da je f konkavna na $\langle -\infty, -1 \rangle$, a konveksna na $\langle -1, +\infty \rangle$.

- *Asimptote*: Ranije smo zaključili da zadana funkcija ima pol $t = -1$ reda 1. Odatle slijedi da graf te funkcije ima uspravnu asimptotu $t = -1$.

Nadalje, iz polaznoga oblika funkcije f zaključujemo da je pravac $y = t - 1$ obostrana kosa asimptota na graf te funkcije. (Kad $t \to \pm\infty$, onda $\frac{1}{t-1} \to 0$, pa se točke grafa funkcije f sve više približavaju točkama pravca $y = t - 1$.)

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 3. (Iscrtkani pravci su asimptote.)



Slika 3.

4. $g(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.

Rješenje: Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$\mathrm{e}^x>0, \forall x\in\mathbb{R}.$$

To znači da je $D(g)=\mathbb{R}$.

g je količnik dviju neprekidnih funkcija, pa je neprekidna i nema nijedan pol. Ona nije periodična, nije ni parna ni neparna (jer e^x nije ni parna, ni neparna), a njezin graf nema nijednu *uspravnu* asimptotu.

(**Oprez:** U ovom slučaju *ne smijemo* zaključiti da graf funkcije *g* nema *nijednu asimptotu* jer on može imati kosu asimptotu.)

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije s objema koordinatnim osima*: Iz jednadžbe $g(x)=0$ odmah slijedi $x_1=0$. Zbog toga je $N(g)=\{0\}$. Sjecište grafa funkcije *g* s objema koordinatnim osima je točka $O=(0,\,0)$.

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$g'(x)=\frac{1\cdot\mathrm{e}^x-x\cdot\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=$$
$$=\frac{\mathrm{e}^x\cdot(1-x)}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2}=$$
$$=\frac{1-x}{\mathrm{e}^x}.$$

  Iz jednadžbe $g'(x)=0$ odmah slijedi $x=1$.

  Zbog nejednakosti $\mathrm{e}^x>0$, predznak funkcije g' jednak je predznaku izraza $1-x$. Tako zaključujemo da *g* raste na intervalu $\langle-\infty,1\rangle$, a pada na intervalu $\langle 1,+\infty\rangle$. Odatle slijedi da je $T_1=(1,g(1))=\left(1,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ točka lokalnoga i globalnoga maksimuma funkcije *g*.

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$g''(x)=\frac{(-1)\cdot e^x-(1-x)\cdot e^x}{\left(e^x\right)^2}=$$
$$=\frac{e^x\cdot(-1-1+x)}{\left(e^x\right)^2}=$$
$$=\frac{x-2}{e^x}.$$

Iz jednadžbe $g''(x)=0$ odmah slijedi $x=2$.

Zbog nejednakosti $e^x>0$, predznak funkcije g' jednak je predznaku izraza $x-2$. Tako zaključujemo da je g konkavna na intervalu $\langle -\infty, 2\rangle$, a konveksna na intervalu $\langle 2,+\infty\rangle$. Odatle slijedi da je $T_2=(2,g(2))=\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ točka pregiba grafa funkcije g.

- *Asimptote*: Već smo zaključili da graf funkcije g nema nijednu *uspravnu* asimptotu. Potražimo kose asimptote. Imamo redom:

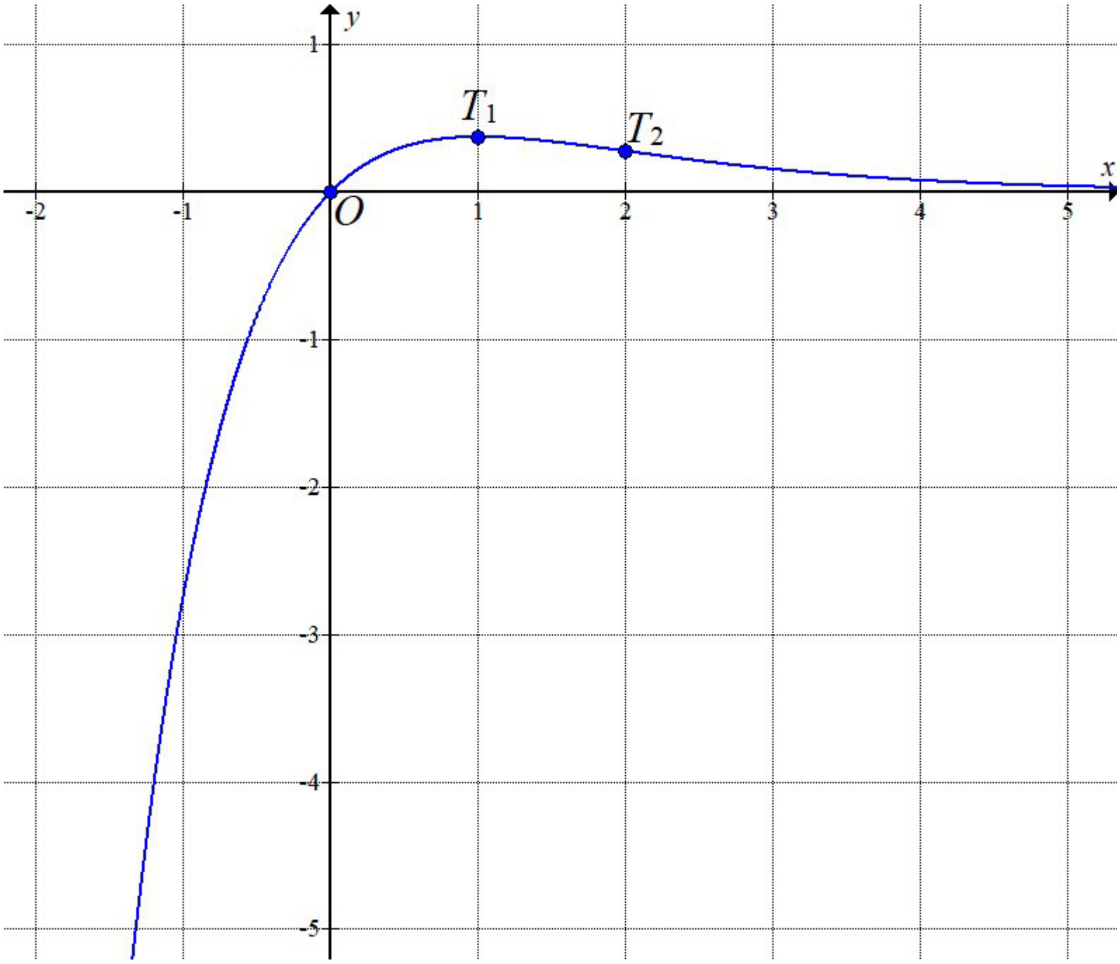
$$k_1=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x}{e^x}}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\left\{\frac{1}{0}\right\}=+\infty,$$

$$k_2=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{g(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\frac{x}{e^x}}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\left\{\frac{1}{+\infty}\right\}=0,$$

$$l_2=\lim_{x\to+\infty}\left(g(x)-k_2\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)=\left\{\frac{+\infty}{+\infty}\right\}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right)=\left\{\frac{1}{+\infty}\right\}=0.$$

Dakle, graf funkcije g ima desnu vodoravnu asimptotu $y=0$ (os apscisa).

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 4.



Slika 4.

5. $g(t) = \dfrac{\ln t}{t}$.

Rješenje: *Prirodna domena*: Logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je logaritmand strogo pozitivan. Odatle slijedi $t > 0$, pa je $D(g) = \langle 0, +\infty \rangle$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije s osi apscisa*: Iz jednadžbe $g(t) = 0$ slijedi $\ln t = 0$, a odatle je $t_1 = \mathrm{e}^0 = 1$. Dakle, $N(g) = \{1\}$. To znači i da graf funkcije g siječe os apscisa u točki $S_1 = (1, 0)$.

- *Sjecište grafa funkcije g s osi ordinata*: Ne postoji jer $0 \notin D(g)$.

- *Točke prekida*: g je količnik dviju neprekidnih funkcija, pa je neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: Očito je

$$\lim_{t \to 0+} g(t) = \lim_{t \to 0+} \left(\frac{1}{t} \cdot \ln t \right) = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty,$$

  pa g ima pol $t = 0$ reda 1. Dakle, $P(g) = \{0\}$.

- *Parnost i periodičnost funkcije*: $D(g)$ ne sadrži nijedan negativan broj, pa g nije ni parna, ni neparna, ni periodična.

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$g'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - (\ln t) \cdot 1}{t^2} =$$
$$= \frac{1 - \ln t}{t^2}.$$

  Iz jednadžbe $g'(t) = 0$ slijedi

$$1 - \ln t = 0,$$

  a odatle je $t_2 = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.

  Zbog očite nejednakosti

$$t^2 > 0, \ \forall t \in D(g),$$

predznak funkcije $g^{'}$ jednak je predznaku izraza $1-\ln t$. Odatle zaključujemo da g raste na intervalu $\langle 0, \mathrm{e}\rangle$, a pada na intervalu $\langle \mathrm{e}, +\infty\rangle$. To znači da je

$$T_1 = (\mathrm{e}, g(\mathrm{e})) = \left(\mathrm{e}, \frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right) = \left(\mathrm{e}, \frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

točka lokalnoga i globalnoga maksimuma funkcije g.

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$\begin{aligned} g^{''}(t) &= \frac{\left(0-\frac{1}{t}\right)\cdot t^2 - (1-\ln t)\cdot 2\cdot t}{t^4} = \\ &= \frac{-t-(1-\ln t)\cdot 2\cdot t}{t^4} = \\ &= \frac{t\cdot(-1-2+2\cdot \ln t)}{t^4} = \\ &= \frac{2\cdot \ln t - 3}{t^3}. \end{aligned}$$

Iz jednadžbe $g^{''}(t) = 0$ slijedi

$$2\cdot \ln t = 3,$$

a odatle je $t_3 = \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}$.

Zbog očite nejednakosti

$$t^3 > 0,\ \forall t \in D(g),$$

predznak funkcije $g^{'}$ jednak je predznaku izraza $2\cdot \ln t - 3$. Odatle zaključujemo da je g konkavna na intervalu $\left\langle 0, \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right\rangle$, a konveksna na intervalu $\left\langle \mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, +\infty\right\rangle$. To znači da je

$$\begin{aligned} T_2 &= \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, g\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)\right) = \\ &= \left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}, \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}\right)}{\mathrm{e}^{\frac{3}{2}}}\right) = \end{aligned}$$

$$= \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3}{2}}{e^{\frac{3}{2}}} \right) =$$

$$= \left(e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2 \cdot e^{\frac{3}{2}}} \right)$$

točka pregiba grafa funkcije g.

- *Asimptote*: Ranije smo zaključili da je $t = 0$ pol funkcije g. To znači da je pravac $t = 0$ uspravna asimptota na graf te funkcije. Taj graf nema lijevu kosu asimptotu jer funkcija g nije definirana za $x \leq 0$. Utvrdimo ima li on desnu kosu asimptotu:

$$k = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{g(t)}{t} \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\frac{\ln t}{t}}{t} \right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t^2} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{t}}{2 \cdot t} \right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{2 \cdot t^2} \right) = 0,$$

$$l = \lim_{t \to +\infty} \left(g(t) - k \cdot t \right) = \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} - 0 \right) =$$

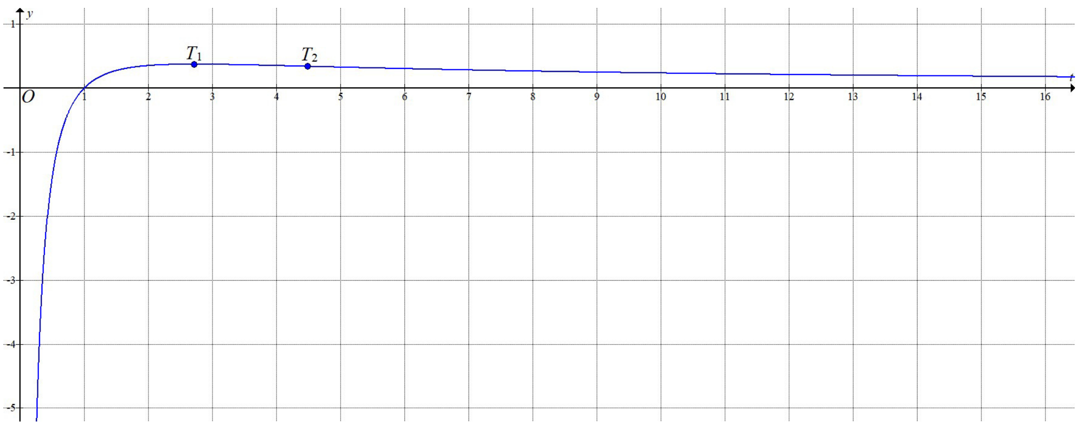
$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\ln t}{t} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{\frac{1}{t}}{1} \right) =$$

$$= \lim_{t \to +\infty} \left(\frac{1}{t} \right) = 0.$$

Dakle, graf zadane funkcije ima desnu vodoravnu asimptotu $y = 0$ (os apscisa).

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 5.



Slika 5.

6. $h(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$.

Rješenje: *Prirodna domena*: Iz uvjeta $4-x^2>0$ slijedi $x\in\langle -2,2\rangle$. Zbog toga je $D(h)=\langle -2,2\rangle$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije s osi apscisa*: Brojnik funkcije h jednak je 2 i uvijek je različit od nule. Zbog toga zadana funkcija nema nultočaka, a njezin graf ne siječe os apscisa.

- *Sjecište grafa funkcije s osi ordinata*: Očito je $0\in D(h)$, pa je točka $S_1=(0,h(0))=(0,1)$ sjecište grafa funkcije h s osi ordinata.

- *Točke prekida*: h je količnik dviju neprekidnih funkcija, pa je neprekidna na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: Primijetimo da vrijede jednakosti:

$$\lim_{x\to(-2)+} h(x)=\lim_{x\to 2-} h(x)=+\infty.$$

Dakle, h ima polove $x_1=-2$ i $x_2=2$. Oba pola su reda 1 jer vrijedi jednakost:

$$4-x^2=(2-x)\cdot(2+x).$$

- *Parnost i periodičnost funkcije*: Prirodna domena funkcije h je omeđen skup $\langle -2,2\rangle$, pa h ne može biti periodična. (Prirodna domena *bilo koje* periodične funkcije ne može biti omeđen skup.) Međutim,

$$h(-x)=\frac{2}{\sqrt{4-(-x)^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}=h(x),\ \forall x\in\langle -2,2\rangle,$$

pa zaključujemo da je h parna funkcija na svojoj prirodnoj domeni.

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$h'(x)=\frac{0\cdot\sqrt{4-x^2}-2\cdot\dfrac{1}{2\cdot\sqrt{4-x^2}}\cdot(0-2\cdot x)}{4-x^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{2\cdot x}{\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2}=$$

$$=\frac{2\cdot x}{\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Iz jednadžbe $h'(x)=0$ odmah slijedi $x=0$.

Zbog nejednakosti

$$\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}>0,\ \forall x\in\langle -2,2\rangle,$$

predznak funkcije h' jednak je predznaku varijable *x*. Tako lagano zaključujemo da *h* pada na intervalu $\langle -2,0\rangle$, a raste na intervalu $\langle 0,2\rangle$. Odatle slijedi da je $S_1=(0,1)$ točka lokalnoga i globalnoga minimuma funkcije *h*. (Zaključak o globalnom minimumu slijedi i iz:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\geq 1,\\
&\frac{4}{4-x^2}\geq 1,\\
&4\geq 4-x^2,\\
&x^2\geq 0,\ \forall x\in\langle -2,2\rangle.)
\end{aligned}$$

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$h''(x)=\frac{2\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{3}{2}}-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(0-2\cdot x)}{\left(4-x^2\right)^3}=$$

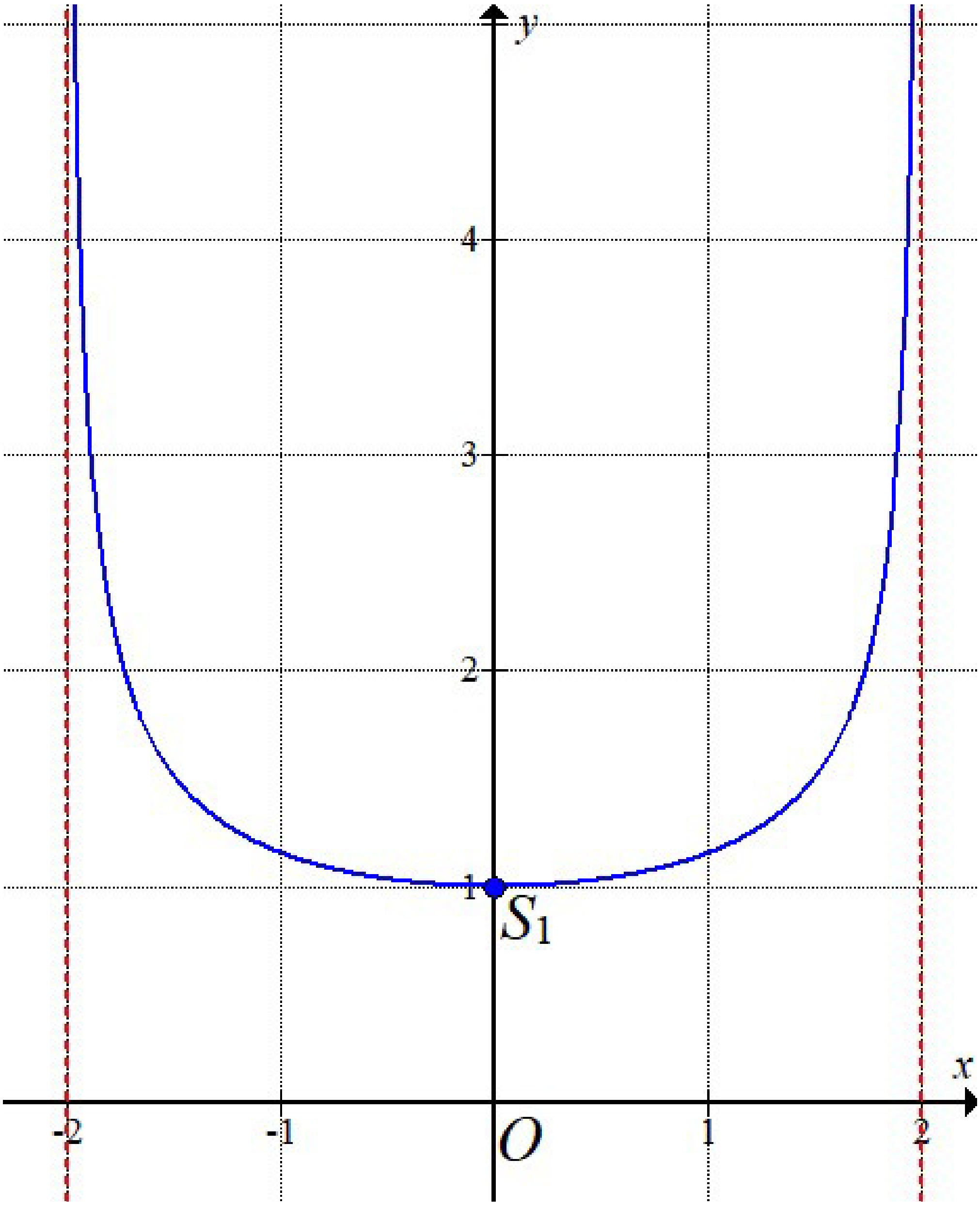
$$=\frac{2\cdot\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(4-x^2+3\cdot x^2\right)}{\left(4-x^2\right)^3}=$$

$$=\frac{4\cdot\left(x^2+2\right)}{\left(4-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}>0,\ \forall x\in\langle -2,2\rangle.$$

Odatle izravno slijedi da je *h* konveksna na svojoj prirodnoj domeni i da nema nijednu točku pregiba.

- *Asimptote*: Ranije smo zaključili da *h* ima polove $x_1=-2$ i $x=2$. Odatle slijedi da su uspravne asimptote pravci $x=-2$ i $x=2$. Graf funkcije *h* nema nijednu kosu asimptotu jer, zbog $D(h)=\langle -2,2\rangle$, ne možemo „pustiti“ $x\to\pm\infty$.

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 6. (Iscrtkani pravci su uspravne asimptote.)



Slika 6.

7. $h(t)=(t+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}$.

Rješenje: Primijetimo najprije da vrijedi nejednakost:

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}>0, \forall t\in \mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

- *Prirodna domena*: Iz uvjeta $t-1\neq 0$ slijedi $t\neq 1$. Zbog toga je $D(h)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije s osi apscisa*: Iz jednadžbe $h(t)=0$, zbog nejednakosti $\mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}>0$, slijedi

  $$t+1=0,$$

  odnosno $t_1=-1$. Dakle, $N(h)=\{-1\}$, pa je točka $S_1=(-1,0)$ sjecište grafa funkcije s osi apscisa.

- *Sjecište grafa funkcije s osi ordinata*: Budući da je $0\in D(h)$, točka

  $$S_2=(0,h(0))=\left(0,\mathrm{e}^{-1}\right)=\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

  je sjecište grafa funkcije h s osi ordinata.

- *Točke prekida*: h je umnožak dviju neprekidnih funkcija, pa je neprekidna funkcija na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: Primijetimo da vrijede jednakosti:

  $$\lim_{t\to 1-}h(t)=0,\ \lim_{t\to 1+}h(t)=+\infty,$$

  pa je $t=1$ pol 1. reda zadane funkcije.

- *Parnost i periodičnost funkcije*: Kao umnožak polinoma 1. stupnja i eksponencijalne funkcije, h nije periodična. Ona nije ni parna, ni neparna jer vrijedi relacija:

  $$h(-t)=(-t+1)\cdot e^{\frac{1}{-t-1}}=(-1)\cdot(t-1)\cdot e^{\frac{-1}{t+1}}\notin\{h(t),-h(t)\}.$$

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

  $$h'(t)=(1+0)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}+(t+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\cdot\frac{-1}{(t-1)^2}=$$

$$=\left(1-\frac{t+1}{(t-1)^2}\right)\cdot e^{\frac{1}{t-1}}=$$
$$=\frac{t^2-3\cdot t}{(t-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{t-1}}=$$
$$=\frac{t\cdot(t-3)}{(t-1)^2}\cdot e^{\frac{1}{t-1}}.$$

Iz jednadžbe $h^{'}(t)=0,$ zbog nejednakosti

$$\frac{e^{\frac{1}{t-1}}}{(t-1)^2}>0,\ \forall t\in D(h),$$

slijedi $t\cdot(t-3)=0,$ a odavde su $t_2=0$ i $t_3=3.$ Primijetimo da je, zbog iste nejednakosti, predznak funkcije $h^{'}$ jednak predznaku izraza $t\cdot(t-3)$. Sastavimo tablicu.

∞		0		1		3		$+\infty$
$f^{'}$	+		-		-		+	

Dakle, *h* raste na intervalima $\langle-\infty,0\rangle$ i $\langle 3,+\infty\rangle$, a pada na intervalima $\langle 0,1\rangle$ i $\langle 1,3\rangle$. Zbog toga je $S_2=\left(0,\frac{1}{e}\right)$ točka lokalnoga minimuma, a

$$T_1=(3,h(3))=\left(3,4\cdot e^{\frac{1}{2}}\right)=\left(3,4\cdot\sqrt{e}\right)$$

točka lokalnoga maksimuma funkcije *h*.

Dobiveni lokalni ekstremi nisu i globalni ekstremi. Ranije smo vidjeli da vrijedi $\lim\limits_{t\to 1+}h(t)=+\infty,$ pa dobiveni lokalni maksimum ne može biti globalni. Također, za vrijedi nejednakost

$$h(x)<0<4\cdot\sqrt{e},\forall x<-1,$$

pa dobiveni lokalni minimum ne može biti globalni. (Štoviše, nije teško pokazati da je $\lim\limits_{t\to-\infty}h(t)=-\infty.$)

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$h''(t)=\frac{(2\cdot t-3)\cdot(t-1)^2-\left(t^2-3\cdot t\right)\cdot 2\cdot(t-1)}{(t-1)^4}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}+\frac{t^2-3\cdot t}{(t-1)^2}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\cdot\frac{-1}{(t-1)^2}=$$

$$=\left(\frac{(2\cdot t-3)\cdot(t-1)^2-\left(t^2-3\cdot t\right)\cdot 2\cdot(t-1)-t^2+3\cdot t}{(t-1)^4}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}=$$

$$=\left(\frac{2\cdot t^3-7\cdot t^2+8\cdot t-3-2\cdot t^3+8\cdot t^2-6\cdot t-t^2+3\cdot t}{(t-1)^4}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}=$$

$$=\frac{5\cdot t-3}{(t-1)^4}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}.$$

Iz jednadžbe $h''(t)=0$, zbog nejednakosti

$$\frac{e^{\frac{1}{t-1}}}{(t-1)^4}>0,\ \forall t\in D(h),$$

slijedi $5\cdot t-3=0$. Odatle je $t=\frac{3}{5}$. Zbog iste nejednakosti zaključujemo da je predznak funkcije h'' jednak predznaku izraza $5\cdot t-3$. Tako slijedi da je *h* konkavna na $\left\langle -\infty,\frac{3}{5}\right\rangle$, a konveksna na $\left\langle \frac{3}{5},1\right\rangle$ i $\left\langle 1,+\infty\right\rangle$. Odatle zaključujemo da je $T_2=\left(\frac{3}{5},h\left(\frac{3}{5}\right)\right)=\left(\frac{3}{5},\frac{8}{5}\cdot \mathrm{e}^{\frac{-5}{2}}\right)$ točka pregiba grafa funkcije *h*.

- *Asimptote*: Već smo zaključili da *h* ima pol $t=1$, pa je pravac $t=1$ uspravna asimptota na graf funkcije *h*. Ispitajmo ima li taj graf kose asimptote:

$$k_1=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{h(t)}{t}\right)=\lim_{t\to-\infty}\left(\frac{t+1}{t}\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}\right)=$$

$$=(1+0)\cdot \mathrm{e}^0=1,$$

$$l_1=\lim_{t\to-\infty}\left(h(t)-k_1\cdot t\right)=\lim_{t\to-\infty}\left((t+1)\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}-t\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left((t-1)\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}-1\right)+2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}-1\right)=$$

$$=\lim_{t\to-\infty}\left((t-1)\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}-1\right)\right)+\lim_{t\to-\infty}\left(2\cdot \mathrm{e}^{\frac{1}{t-1}}-1\right)=$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \left(\frac{e^{\frac{1}{t-1}} - 1}{\frac{1}{t-1}} \right) + \left(2 \cdot e^0 - 1\right) =$$

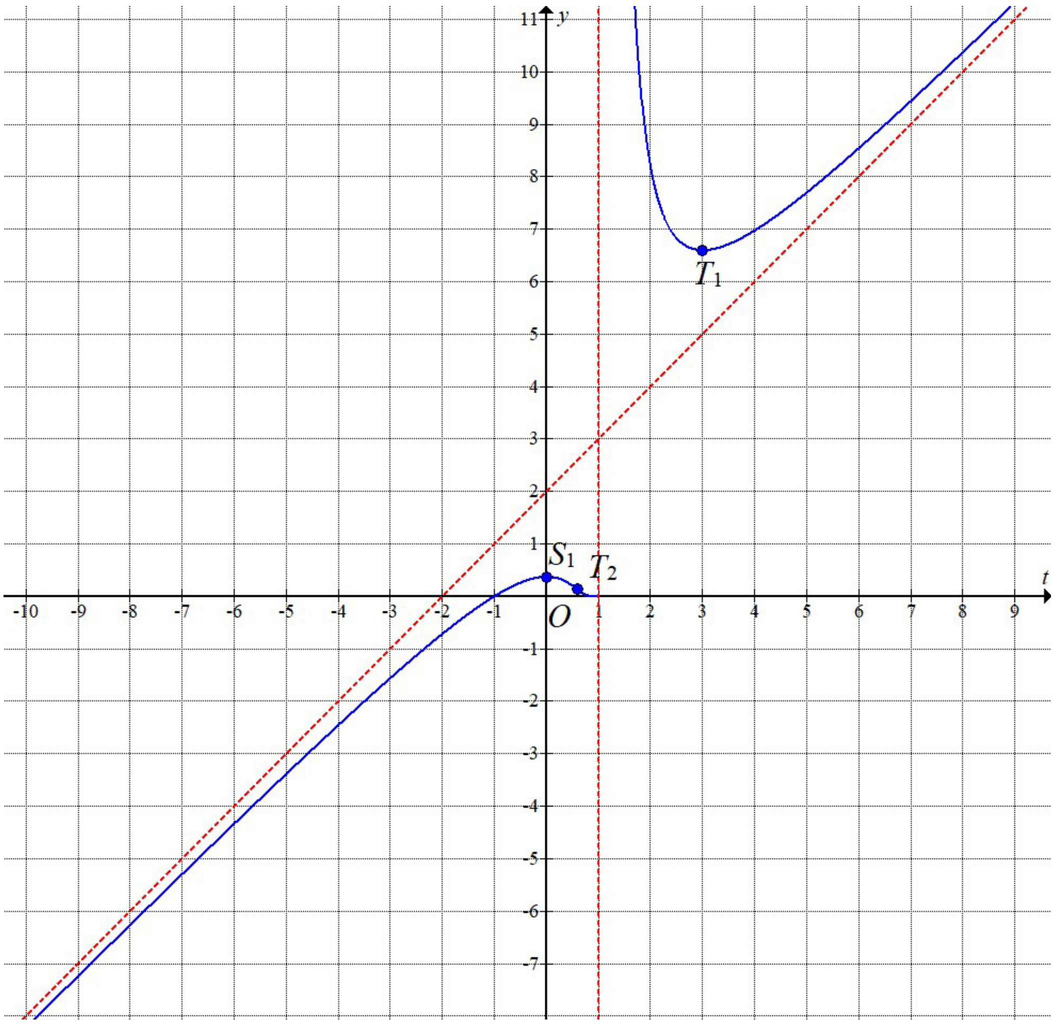
$$= \begin{Bmatrix} \text{zamjena: } x = \dfrac{1}{t-1}, \\ \text{kad } t \to -\infty, \text{ onda } x \to 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) + 2 - 1 =$$

$$= 1 + 2 - 1 = 2.$$

Primijetimo da *isto* razmatranje vrijedi i zamijenimo li $-\infty$ s $+\infty$. Zbog toga je pravac $y = t + 2$ (obostrana) kosa asimptota na graf funkcije *h*.

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 7. (Iscrtkani pravci su asimptote.)



Slika 7.

8. $f(x)=\ln^2 x$.

Rješenje: *Prirodna domena*: Logaritamska funkcija je definirana ako i samo ako je $x>0$. Zbog toga je $D(f)=\langle 0,+\infty\rangle$.

- *Nultočke i sjecište grafa funkcije s osi apscisa*: Iz jednadžbe $f(x)=0$ slijedi $\ln x=0$, a odatle je $x_1=\mathrm{e}^0=1$. Dakle, $N(f)=\{1\}$, pa je sjecište grafa funkcije *f* s osi apscisa $S_1=(1,0)$.

- *Sjecište grafa funkcije s osi ordinata*: Budući da $0\notin D(f)$, graf zadane funkcije ne siječe os ordinata.

- *Točke prekida*: *f* je kompozicija dviju neprekidnih funkcija (kvadratne i logaritamske), pa je neprekidna funkcija na svojoj prirodnoj domeni.

- *Polovi funkcije i njihovi redovi*: *f* nema polova jer za $x=0$ ne možemo računati limes slijeva (funkcija nije definirana za $x\le 0$).

- *Parnost i periodičnost funkcije*: Funkcija nije ni parna, ni periodična jer njezina prirodna domena ne sadrži nijedan negativan broj. (Prirodna domena *svake* parne i/ili periodične funkcije mora sadržavati barem jedan strogo negativan broj.)

- *Intervali monotonosti i točke lokalnih ekstrema*: Odredimo:

$$f'(x)=2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=$$
$$=\frac{2\cdot\ln x}{x}.$$

  Iz jednadžbe $f'(x)=0$ slijedi $\ln x=0$, a odatle je $x_1=\mathrm{e}^0=1$. Budući da je $D(f)=\langle 0,+\infty\rangle$, predznak funkcije f' jednak je predznaku izraza $\ln x$. Tako zaključujemo da *f* pada na intervalu $\langle 0,1\rangle$, a raste na intervalu $\langle 1,+\infty\rangle$. To znači da je $S_1=(1,0)$ točka lokalnoga minimuma funkcije *f*. Taj minimum je ujedno i globalni jer se lako vidi da vrijedi nejednakost

$$\ln^2 x\ge 0,\ \forall x\in D(f).$$

- *Intervali konkavnosti i konveksnosti i točke pregiba grafa*: Odredimo:

$$f''(x) = \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 2 \cdot \ln x}{x^2} = \\ = \frac{2 \cdot (1 - \ln x)}{x^2}.$$

Iz jednadžbe $f''(x) = 0$ slijedi $\ln x = 1$, a odatle je $x_2 = e^1 = e$. Budući da je $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle$, predznak funkcije f' jednak je predznaku izraza $1 - \ln x$. Tako zaključujemo da je *f* konkavna na intervalu $\langle e, +\infty \rangle$, a konveksna na intervalu $\langle 0, e \rangle$. To znači da je $T_1 = (e, f(e)) = (e, 1)$ točka pregiba grafa funkcije *f*.

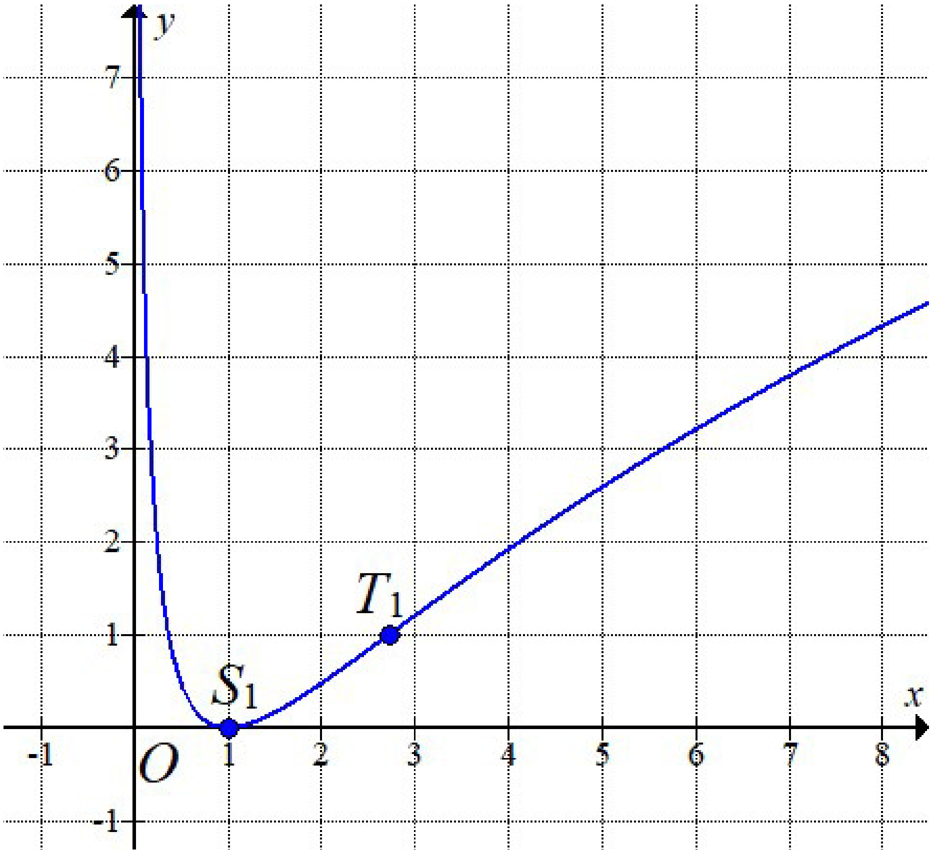
- *Asimptote*: Primijetimo da je $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = +\infty$, pa je $x = 0$ uspravna asimptota na graf funkcije *f*. Budući da je $D(f) = \langle 0, +\infty \rangle$, taj graf ne može imati lijevu kosu asimptotu, pa provjerimo ima li desnu kosu asimptotu:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 \cdot \ln x \cdot \frac{1}{x}}{1} \right) = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 \cdot \ln x}{x} \right) = \left\{ \frac{+\infty}{+\infty} \right\} = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{1} \right) = \\ = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0,$$

$$l = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - k \cdot x) = \lim_{x \to +\infty} (\ln^2 x - 0 \cdot x) = \\ = \lim_{x \to +\infty} (\ln^2 x) = +\infty.$$

Dakle, graf funkcije *f* nema ni desnu kosu asimptotu.

- *Graf funkcije*: Prikazan je na slici 8.



Slika 8.