4.2. POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE.

POLINOMI. NULTOČKE POLINOMA.

OSNOVNI TEOREM ALGEBRE.

ALGEBARSKE OPERACIJE S POLINOMIMA.

PRAVE I NEPRAVE RACIONALNE FUNKCIJE.

NULTOČKE I POLOVI RACIONALNE FUNKCIJE.

SKICIRANJE GRAFA PRAVE RACIONALNE FUNKCIJE

4.2.1. POJAM POLINOMA

- Neka su $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_n \neq 0$ i neka je $n \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Funkciju $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu pravilom $p(x) = a_n \cdot x^n + \ldots + a_1 \cdot x + a_0$ nazivamo **polinom**.
- Broj n uobičajeno nazivamo **stupanj**, koeficijent a_n **vodeći član**, a koeficijent a_0 **slobodni član** polinoma.
- Izjavu „Stupanj polinoma p je jednak n" pišemo kao: $\deg(p) = n$ ili kao $\mathrm{st}(p) = n$.
- Brojeve $a_0, a_1, \ldots, a_n$ nazivamo **koeficijenti polinoma** p.
- Ako je $n = 0$, onda je $p(x) = a_0 = \text{const}$. Dakle, svaku funkciju koja je konstantna na svojoj domeni možemo shvatiti kao *polinom stupnja* 0.
- Ako je $n = 1$, onda je $p(x) = a_1 \cdot x + a_0$ polinom 1. stupnja. Ako je još i $a_0 = 0$, onda govorimo o **linearnoj funkciji**.
- Za $n = 2$ dobivamo polinom 2. stupnja (srednjoškolski: **kvadratnu funkciju**), a za $n = 3$ polinom 3. stupnja (srednjoškolski: **kubnu funkciju**).
- Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom **normiran**.
- Ako je $p(x) \equiv 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, onda takav polinom nazivamo **nulpolinom**. Njegov stupanj se ne definira.

4.2.2. NULTOČKA POLINOMA

- Neka je p polinom stupnja n. Podsjetimo: $D(p) = \mathbb{R}$.
- Svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $p(x) = 0$ naziva se **nultočka** polinoma p.
- Određivanje nultočaka polinoma p svodi se na rješavanje jednadžbe $p(x) = 0$.
- **OPREZ:** Jednadžba $p(x) = 0$ općenito ima kompleksna rješenja. Nultočke polinoma p su **isključivo** realna rješenja te jednadžbe (ako postoje).
- **Razlog**: Nultočka *bilo koje* funkcije uvijek **mora** pripadati domeni te funkcije. Zbog toga i svaka nultočka polinoma mora biti realan broj.
- **Tvrdnja 1.** Svaki polinom stupnja $n \in \mathbb{N}$ ima najviše n međusobno različitih nultočaka.
- Ova tvrdnja se često iskazuje u sljedećem ekvivalentnom obliku:
- **Tvrdnja 2.** Ako polinom p stupnja n poprima vrijednost 0 za barem $n + 1$ različitih vrijednosti nezavisne varijable, tada je p nužno nulpolinom.
- **Napomena**: Vrijednosti (brojevi) u tvrdnji 2. mogu biti i kompleksni brojevi.

4.2.3. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- U vezi s ukupnim brojem *međusobno različitih* nultočaka nekoga polinoma postoji više značajnih rezultata.
- Najznačajniji je **osnovni teorem algebre** kojega je prvi iskazao René Descartes, a dokazao Carl Friedrich Gauss. On glasi:
- **Teorem 1.** *Svaki polinom stupnja barem* 1 *s* ***kompleksnim*** *koeficijentima ima barem jednu nultočku koja pripada skupu* ***kompleksnih brojeva***.
- Pritom se *polinom s kompleksnim koeficijentima* definira potpuno analogno kao u točki 4.2.1., ali kao funkcija čije su prirodna domena i kodomena jednaki skupu $\mathbb{C}$ i čiji su svi koeficijenti kompleksni brojevi.
- Za polinome definirane kao u točki 4.2.1. najvažniji je sljedeći rezultat:
- **Korolar 1.** Svaki *polinom* ***neparnoga*** *stupnja ima barem jednu realnu nultočku.*
- **Napomena**: *Ne* postoji analogon Korolara 1. za polinome parnoga stupnja.

4.2.3. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- Jedini jednostavan slučaj određivanja nultočaka polinoma neparnoga stupnja je $n = 1$, tj. kad je riječ o linearnoj funkciji.
- U slučaju $n = 2$ nultočka se određuje formulom za rješenja kvadratne jednadžbe.
- U slučaju $n = 3$ nultočka se određuje primjenom *Cardanovih formula* (teških za "ručno" računanje, ali relativno jednostavne za programiranje).
- U slučaju $n = 4$ nultočka se određuje primjenom *Ferrarijevih formula* (također vrlo teških za "ručno" računanje, ali relativno jednostavne za programiranje).
- U slučajevima $n \geq 5$ nultočka se određuje *približno*. Približni izračun koristi različite metode numeričke matematike (o kojima se uči u istoimenu predmetu u 4. semestru).
- Vezana uz osnovni teorem algebre su i sljedeća dva teorema:
- **Teorem 2.** *Neka su* $x_1, \ldots, x_n$ *sva (ne nužno međusobno različita) rješenja jednadžbe* $p(x) = 0$*, gdje je* p *polinom stupnja* n*. Tada vrijedi rastav*:

$$p(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

- **Teorem 3.** *Neka je* p *polinom stupnja* n *s* ***realnim*** *koeficijentima. Kompleksan broj* z *je rješenje jednadžbe* $p(x) = 0$ *ako i samo ako je kompleksan broj* z *rješenje te iste jednadžbe.*

- **Napomena**: Ako su koeficijenti polinoma p kompleksni brojevi, Teorem 3. **ne** vrijedi.
- Npr. za polinom $p(z) = (1 + i) \cdot z + 1 - i$ vrijedi $p(i) = 0$, ali $p(-i) = 2 - 2 \cdot i$.

4.2.3. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- Navedena svojstva se vrlo često primjenjuju prigodom rastava nekoga polinoma na faktore, odnosno u situacijama kad polinom stupnja n treba prikazati kao umnožak barem dvaju različitih polinoma čiji je stupanj strogo manji od n.
- Za rješavanje zadataka vrlo je korisna sljedeća varijanta *Bézoutova teorema*:
- Teorem 4. *Neka je p normirani polinom kojemu su svi koeficijenti* **cijeli** *brojevi. Ako jednadžba* $p(x) = 0$ *ima cjelobrojno rješenje, onda je to rješenje nužno djelitelj slobodnoga člana polinoma p.*

4.2.4. OPERACIJE S POLINOMIMA

- Dva polinoma *bilo kojega stupnja* možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti (s ostatkom ili bez ostatka).
- Polinomi se zbrajaju/oduzimaju tako da se zasebno zbroje/oduzmu koeficijenti uz *iste* potencije nezavisne varijable, a potom formalno zbroje svi dobiveni rezultati.
- Dva polinoma se množe prema načelu "svaki sa svakim": svaki član prvoga polinoma treba pomnožiti sa svakim članom drugoga polinoma, a potom zbrojiti sve dobivene umnoške.
- Za *dijeljenje* polinoma koristi se sljedeći teorem.
- **Teorem 5. (teorem o dijeljenju polinoma s ostatkom)** Neka su p_1 i p_2 polinomi s realnim (teorijski: kompleksnim) koeficijentima. Tada *postoje jedinstveni* polinomi q i r takvi da vrijedi:
- $p_1 = q \cdot p_2 + r$, $\mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(p_2)$.
- Posebno, ako je r nulpolinom, kažemo da je polinom p_1 **djeljiv** polinomom p_2.

4.2.5. JEDNAKOST POLINOMA. DJELJIVOST POLINOMA

- Budući da su polinomi posebna vrsta funkcija, jednakost polinoma svodi se na jednakost funkcija.
- Dakle, dva polinoma su jednaka ako i samo ako im se podudaraju i domene i kodomene i pravila pridruživanja.
- Budući da se domene i kodomene u pravilu podudaraju (jer je riječ o skupu $\mathbb{R}$), provjera jednakosti pravila pridruživanja može se izreći i ovako:
- *Dva polinoma su jednaka ako i samo ako je njihova razlika nulpolinom.*
- Iz Teorema o dijeljenju polinoma s ostatkom izravno slijedi:
- **Tvrdnja 3.** Polinom p_1 je **djeljiv** polinomom p_2 ako i samo ako je skup svih rješenja jednadžbe $p_2(x) = 0$ podskup skupa svih rješenja jednadžbe $p_1(x) = 0$.
- **Oprez:** Gornja tvrdnja se odnosi na *rješenja jednadžbe*, a ne na *nultočke* polinoma. (*Podsjetnik*: nultočka polinoma p je rješenje jednadžbe $p(x) = 0$, ali rješenje jednadžbe $p(x) = 0$ ne mora biti nultočka polinoma p.)
- Npr. polinomi $p_1(x) = x^3 + x$ i $p_2(x) = x^3 + 2 \cdot x$ imaju isti skup nultočaka (koji?), ali p_1 nije djeljiv s p_2 (i obratno).

4.2.6. SKICIRANJE GRAFA POLINOMA

- Graf polinoma skicira se tako da se najprije odrede nultočke toga polinoma i njihova kratnost (vidjeti točku 4.2.8.).
- Potom se utvrđuje (ne)parnost polinoma, odnosno tip monotonosti (rastuća, padajuća ili ni rastuća, ni padajuća funkcija) itd.

4.2.7. POJAM RACIONALNE FUNKCIJE

- Neka su p_1 i p_2 polinomi takvi da je $\mathrm{st}(p_1) < \mathrm{st}(p_2)$.
- Pretpostavimo da jednadžbe $p_1(x) = 0$ i $p_2(x) = 0$ nemaju nijedno zajedničko rješenje.
- Označimo sa $N(p_1)$ i $N(p_2)$ redom skup svih nultočaka polinoma p_1, odnosno polinoma p_2.
- Iz gornje pretpostavke slijedi:
- $N(p_1) \cap N(p_2) = \varnothing$.
- **Prava racionalna funkcija** f je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus N(p_2) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f = \frac{p_1}{p_2}$$

- Skup svih nultočaka funkcije f jednak je $N(p_1)$.

4.2.7. POJAM RACIONALNE FUNKCIJE

- U praksi je moguć i slučaj $\text{st}(p_1) \geq \text{st}(p_2)$. Tada govorimo o **nepravoj racionalnoj funkciji**.
- Svaka neprava racionalna funkcija može se zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.
- Algoritam za dobivanje toga zapisa je:
- **Korak 1.** Podijeliti polinome p_1 i p_2 prema teoremu za dijeljenje polinoma s ostatkom. Dobivaju se količnik q i ostatak r.
- **Korak 2.** Zapisati:

$$f = q + \frac{r}{p_2}$$

- U tom zapisu je q polinom, dok je razlomak $\frac{r}{p_2}$ prava racionalna funkcija.
- Domena, kodomena i skup svih nultočaka neprave racionalne funkcije definiraju se isto kao i u slučaju prave racionalne funkcije.

4.2.8. POLOVI RACIONALNE FUNKCIJE. KRATNOST NULTOČKE. RED POLA

- Neka je $f = \frac{p_1}{p_2}$ (prava) racionalna funkcija.
- Elemente skupa $N(p_2)$, tj. nultočke polinoma p_2 nazivamo **polovi** racionalne funkcije f.
- Neka je $x_0 \in N(p_1)$ nultočka funkcije f. Broj $k \in \mathbb{N}$ takav da je polinom p_1 djeljiv s $(x - x_0)^k$, ali ne i s $(x - x_0)^{k+1}$, nazivamo **kratnost nultočke** x_0.
- Svaka nultočka očito ima kratnost barem jedan.
- Neka je $x_1 \in N(p_2)$ pol funkcije f. Broj $m \in \mathbb{N}$ takav da je polinom p_2 djeljiv s $(x - x_1)^m$, ali ne i s $(x - x_0)^{m+1}$ nazivamo **red pola** x_1.
- Svaki pol očito ima red barem jedan.

4.2.9. SKICIRANJE GRAFA PRAVE RACIONALNE FUNKCIJE

- Na temelju podataka o domeni, nultočkama i polovima prave racionalne funkcije možemo skicirati njezin kvalitativni graf.
- Kad se odrede svi polovi funkcije i ucrtaju se na os apscisa, kroz svaki od njih treba povući pravac usporedan s osi ordinata. Graf racionalne funkcije će se približavati tim pravcima, ali ih ne smije sjeći ni u jednoj točki. (Te pravce nazivamo **asimptote**.)
- Radi preciznijega skiciranja korisno je odrediti *predznak* racionalne funkcije lijevo i desno od svakoga pola.
- Prigodom skiciranja je korisno odrediti i nultočke dotične racionalne funkcije (graf funkcije siječe os apscisa u točkama čije su apscise jednake nultočkama te funkcije). Korisno je i primijeniti sljedeća pravila.
- **Pravilo 1** Ako nultočka x_0 ima parnu kratnost, onda graf polinoma/racionalne funkcije *dodiruje* os apscisa u točki $(x_0, 0)$.
- **Pravilo 2.** Ako nultočka x_0 ima neparnu kratnost, onda polinom/racionalna funkcija *mijenja predznak* pri prolazu kroz točku $(x_0, 0)$.
- **Pravilo 3.** Ako pol x_1 ima paran red, onda racionalna funkcija *ima isti predznak* „s obje strane" točke $(x_1, 0)$.
- **Pravilo 4.** Ako pol x_1 ima neparan red, onda racionalna funkcija *ima različite predznake* „s obje strane" točke $(x_1, 0)$.

1. Odredite prirodnu domenu, skup svih nultočaka i skup svih polova racionalne funkcije *f*, pa je zapišite u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije ako je:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x-2}$;

Rješenje: Najprije nađimo realna rješenja jednadžbi $x^3-1=0$ i $x^2-x-2=0$. Uočimo da je

$$x^3-1=(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Zbog toga prva jednadžba ima jedinstveno realno rješenje $x=1$. Druga jednadžba ima realna rješenja $x_1=-1,\ x_2=2.$

Tako zaključujemo da su:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\},\ N(f)=\{1\},\ P(f)=\{-1,2\}.$$

Podijelimo brojnik zadane funkcije njezinim nazivnikom, pa dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3-1\right):\left(x^2-x-2\right)=x+1\\
\underline{-\left(x^3-x^2-2\cdot x\right)}\\
x^2+2\cdot x-1\\
\underline{-\left(x^2-x-2\right)}\\
3\cdot x+1
\end{array}$$

Dakle, $q(x)=x+1,\ r(x)=3\cdot x+1,$ pa je traženi zapis

$$f(x)=x+1+\frac{3\cdot x+1}{x^2-x-2}.$$

b) $f(t)=\dfrac{t^3-3\cdot t^2+2\cdot t}{t^2-9}$.

Rješenje: Najprije nađimo realna rješenja jednadžbi $t^3-3\cdot t^2+2\cdot t=0$ i $t^2-9=0$. Uočimo da je

$$t^3-3\cdot t^2+2\cdot t=t\cdot\left(t^2-3\cdot t+2\right)=t\cdot(t-1)\cdot(t-2),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Zbog toga prva jednadžba ima tri različita realna rješenja $t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=2.$ Druga jednadžba ima realna rješenja $t_4=-3,\ t_5=3.$

Tako zaključujemo da su:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\},\ N(f)=\{0,1,2\},\ P(f)=\{-3,3\}.$$

Podijelimo brojnik zadane funkcije njezinim nazivnikom, pa dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\left(t^3-3\cdot t^2+2\cdot t\right):\left(t^2-9\right)=t-3\\
\underline{-\left(t^3-9\cdot t\right)}\\
-3\cdot t^2+11\cdot t\\
\underline{-\left(-3\cdot t^2+27\right)}\\
11\cdot t-27
\end{array}$$

Dakle, $q(t)=t-3,\ r(t)=11\cdot t-27,$ pa je traženi zapis

$$f(t)=t-3+\frac{11\cdot t-27}{t^2-9}.$$

2. Prikažite zadani polinom kao umnožak različitih polinoma 1. stupnja i polinoma 2. stupnja bez realnih nultočaka, pa odredite njegove nultočke ako su:

a) $p(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 - x + 4;$

Rješenje: Rastavimo zadani polinom na faktore. Imamo redom:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^2 \cdot (x-4) - (x-4) = \\ &= (x-4) \cdot \left(x^2 - 1\right) = \\ &= (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1). \end{aligned}$$

Odatle „čitamo“:

$$N(p) = \{-1, 1, 4\}.$$

b) $p(t)=t^4-3\cdot t^3+t^2+3\cdot t-2$.

Rješenje: Zadani polinom ima ukupno pet članova, pa ga ne možemo rastaviti na faktore pogodnim grupiranjem članova. Zbog toga pokušajmo pogoditi njegove cjelobrojne nultočke (ako postoje). Slobodni član polinoma p je –2. Svi njegovi cjelobrojni djelitelji su –2, –1, 1 i 2. Lako izračunamo:

$$\begin{aligned}
p(-2)&=(-2)^4-3\cdot(-2)^3+(-2)^2+3\cdot(-2)-2=\\
&=36,\\
p(-1)&=(-1)^4-3\cdot(-1)^3+(-1)^2+3\cdot(-1)-2=\\
&=0,\\
p(1)&=1^4-3\cdot 1^3+1^2+3\cdot 1-2=\\
&=0,\\
p(2)&=2^4-3\cdot 2^3+2^2+3\cdot 2-2=\\
&=0.
\end{aligned}$$

Budući da je p 4. stupnja i da ima tri različite cjelobrojne nultočke, i njegova četvrta nultočka mora biti cijeli broj. Ta je nultočka točno jedan od brojeva –1, 1 i 2. Odredimo o kojemu je broju riječ.

Najprije pomnožimo:

$$\begin{aligned}
(t+1)\cdot(t-1)\cdot(t-2)&=\left(t^2-1\right)\cdot(t-2)=\\
&=t^3-2\cdot t^2-t+2,
\end{aligned}$$

pa podijelimo zadani polinom dobivenim izrazom:

$$\begin{array}{l}
\left(t^4-3\cdot t^3+t^2+3\cdot t-2\right):\left(t^3-2\cdot t^2-t+2\right)=t-1\\
\underline{-\left(t^4-2\cdot t^3-t^2+2\cdot t\right)}\\
-t^3+2\cdot t^2+t-2\\
\underline{-\left(-t^3+2\cdot t^2+t-2\right)}\\
0
\end{array}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
&p(t)=(t+1)\cdot(t-1)^2\cdot(t-2),\\
&N(p)=\{-1,1,2\}.
\end{aligned}$$

3. Odredite prirodnu domenu, skup svih nultočaka i skup svih polova racionalne funkcije g pa skicirajte njezin graf, ako je g zadana pravilom:

$$g(u)=\frac{\left(u^2+2\cdot u+1\right)\cdot(u-1)}{u\cdot\left(u^4-8\cdot u^2+16\right)}.$$

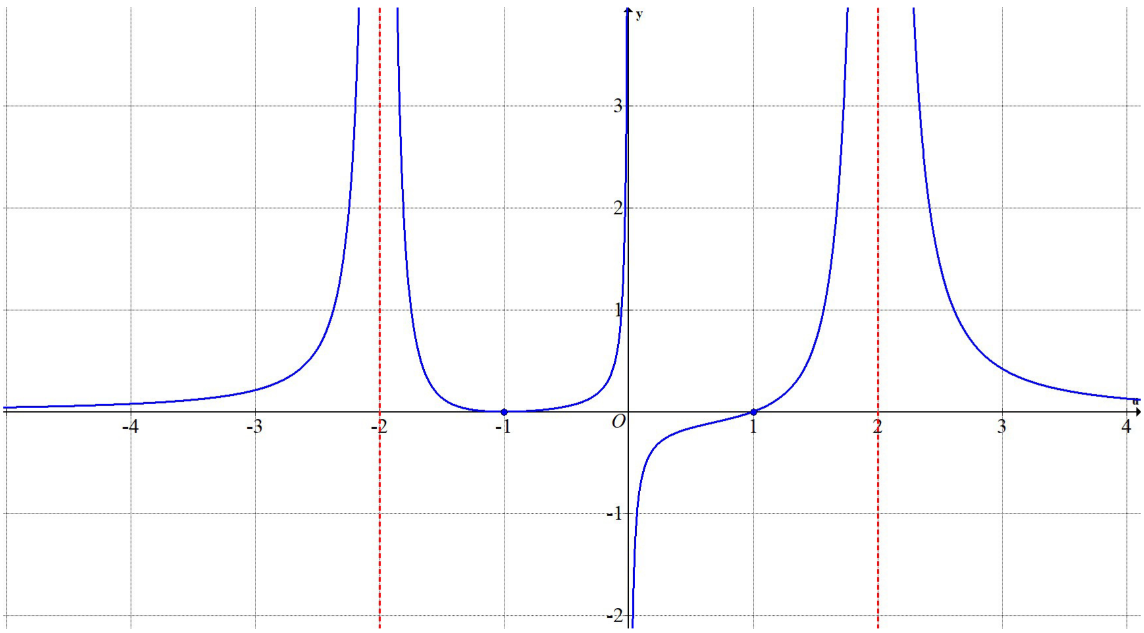
Rješenje: Rastavimo brojnik i nazivnik zadane funkcije na faktore. Lako dobivamo:

$$\begin{aligned}g(u)&=\frac{(u+1)^2\cdot(u-1)}{u\cdot\left(u^2-4\right)^2}=\\&=\frac{(u+1)^2\cdot(u-1)}{u\cdot\left((u-2)\cdot(u+2)\right)^2}=\\&=\frac{(u+1)^2\cdot(u-1)}{u\cdot(u+2)^2\cdot(u-2)^2}.\end{aligned}$$

Odatle lako „čitamo“:

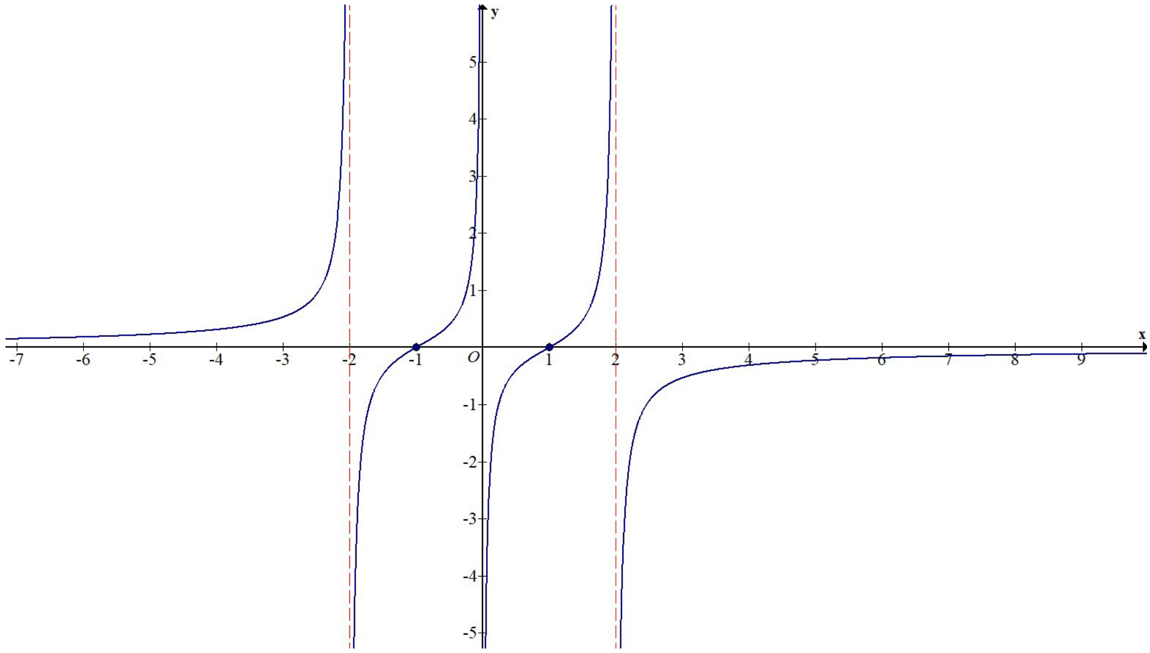
$$\begin{aligned}D(g)&=\mathbb{R}\setminus\{-2,0,2\},\\N(g)&=\{-1,1\},\\P(g)&=\{-2,0,2\}.\end{aligned}$$

Traženi je graf prikazan na slici 1.



Slika 1.

4. Na slici 2. plavom je bojom prikazan dio grafa racionalne funkcije g. Ako je $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 9]$, odredite skup svih nultočaka i skup svih polova te funkcije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.



Slika 2.

Rješenje: Iz pretpostavke $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 9]$ zaključujemo da je funkcija g definirana na skupu $\mathbb{R} \setminus [-7, 9]$ i da u tom skupu nema nijednu nultočku.

Naime, ako bi funkcija imala pol x_0 u navedenom skupu, onda vrijednost $g(x_0)$ ne bi postojala, pa ne bi vrijedila nejednakost $g(x_0) \neq 0$, što je suprotno pretpostavci.

Analogno, ako bi funkcija imala nultočku x_1 u navedenom skupu, onda bi vrijedila jednakost $g(x_1) = 0$, što je suprotno pretpostavci $g(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7, 9]$. Dakle, sve nultočke i polove zadane funkcije treba tražiti u segmentu $[-7, 9]$.

Iz slike 2. lako zaključujemo:

$$N(g) = \{-1, 1\},$$
$$P(g) = \{-2, 0, 2\}.$$

Rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke

5. Napišite opći oblik rastava sljedećih racionalnih funkcija na parcijalne razlomke:

a) $f(p)=\dfrac{1}{p^2\cdot\left(p^2-100\right)^3}$;

Rješenje: Primijetimo da je

$$p^2-100=(p-10)\cdot(p+10),\ \forall p\in\mathbb{R}.$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}p^2\cdot\left(p^2-100\right)^3&=p^2\cdot\left((p-10)\cdot(p+10)\right)^3=\\&=p^2\cdot(p-10)^3\cdot(p+10)^3,\ \forall p\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

pa traženi rastav ima oblik:

$$f(p)=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p^2}+\frac{A_3}{p-10}+\frac{A_4}{(p-10)^2}+\frac{A_5}{(p-10)^3}+\frac{A_6}{p+10}+\frac{A_7}{(p+10)^2}+\frac{A_8}{(p+10)^3}.$$

b) $g(s)=\dfrac{1}{s^3\cdot\left(s^2+1\right)^2}$.

Rješenje: Polinom $p_1(s)=s^2+1$ nema nijednu realnu nultočku. Zbog toga ga nije moguće rastaviti na umnožak dvaju polinoma 1. stupnja koji imaju realne nultočke. Tako zaključujemo da traženi rastav ima oblik:

$$g(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s^3}+\frac{A_4\cdot s+A_5}{s^2+1}+\frac{A_6\cdot s+A_7}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

6. Rastavite sljedeće racionalne funkcije na parcijalne razlomke:

a) $f(x)=\dfrac{3\cdot x^2+5\cdot x+3}{x^3+2\cdot x^2+x+2}$;

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$\begin{aligned} x^3+2\cdot x^2+x+2 &= x^2\cdot(x+2)+(x+2)= \\ &=(x+2)\cdot\left(x^2+1\right). \end{aligned}$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{3\cdot x^2+5\cdot x+3}{x^3+2\cdot x^2+x+2}=\frac{A_1}{x+2}+\frac{A_2\cdot x+A_3}{x^2+1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $x^3+2\cdot x^2+x+2$, dobit ćemo:

$$3\cdot x^2+5\cdot x+3=A_1\cdot\left(x^2+1\right)+\left(A_2\cdot x+A_3\right)\cdot(x+2).$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $x\in\{-2,0,1\}$, pa dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} &3\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)+3=A_1\cdot\left((-2)^2+1\right), \\ &3\cdot 0^2+5\cdot 0+3=A_1\cdot\left(0^2+1\right)+(A_2\cdot 0+A_3)\cdot(0+2), \\ &3\cdot 1^2+5\cdot 1+3=A_1\cdot\left(1^2+1\right)+(A_2\cdot 1+A_3)\cdot(1+2) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} &5\cdot A_1=5, \\ &A_1+2\cdot A_3=3, \\ &2\cdot A_1+3\cdot A_2+3\cdot A_3=11. \end{aligned}\right\}$$

Njegovo je rješenje

$$(A_1, A_2, A_3)=(1,2,1),$$

pa konačno dobivamo:

$$f(x)=\frac{1}{x+2}+\frac{2\cdot x+1}{x^2+1}.$$

b) $g(t)=\dfrac{t^2+1}{t^3-t}$;

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$\begin{aligned} t^3-t&=t\cdot\left(t^2-1\right)=\\ &=t\cdot(t+1)\cdot(t-1). \end{aligned}$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{t^2+1}{t^3-t}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t+1}+\frac{A_3}{t-1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s t^3-t, dobit ćemo:

$$t^2+1=A_1\cdot(t+1)\cdot(t-1)+A_2\cdot t\cdot(t-1)+A_3\cdot t\cdot(t+1).$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $t\in\{-1,0,1\}$, pa dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^2+1=A_2\cdot(-1)\cdot(-1-1),\\ &0^2+1=A_1\cdot(0+1)\cdot(0-1),\\ &1^2+1=A_3\cdot 1\cdot(1+1) \end{aligned}\right\}$$
$$\left.\begin{aligned} &2\cdot A_2=2,\\ &-A_1=1,\\ &2\cdot A_3=2. \end{aligned}\right\}$$

Njegovo je rješenje

$$(A_1, A_2, A_3)=(-1,1,1),$$

pa konačno dobivamo:

$$g(t)=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

c) $h(u)=\dfrac{u^2-u+1}{u^4-2\cdot u^3+u^2}$.

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$\begin{aligned} u^4-2\cdot u^3+u^2 &= u^2\cdot\left(u^2-2\cdot u+1\right)= \\ &= u^2\cdot(u-1)^2. \end{aligned}$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{u^2-u+1}{u^4-2\cdot u^3+u^2}=\frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u^2}+\frac{A_3}{u-1}+\frac{A_4}{(u-1)^2}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $u^4-2\cdot u^3+u^2$, dobit ćemo:

$$u^2-u+1=A_1\cdot u\cdot(u-1)^2+A_2\cdot(u-1)^2+A_3\cdot u^2\cdot(u-1)+A_4\cdot u^2.$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $u\in\{-1,0,1,2\}$, pa dobivamo sljedeći sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^2-(-1)+1=A_1\cdot(-1)\cdot(-1-1)^2+A_2\cdot(-1-1)^2+A_3\cdot(-1)^2\cdot(-1-1)+A_4\cdot(-1)^2, \\ 0^2-0+1=A_2\cdot(0-1)^2, \\ 1^2-1+1=A_4\cdot 1^2, \\ 2^2-2+1=A_1\cdot 2\cdot(2-1)^2+A_2\cdot(2-1)^2+A_3\cdot 2^2\cdot(2-1)+A_4\cdot 2^2 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4\cdot A_1+4\cdot A_2-2\cdot A_3+A_4=3, \\ A_2=1, \\ A_4=1, \\ 2\cdot A_1+A_2+4\cdot A_3+4\cdot A_4=3. \end{array}\right\}$$

Njegovo je rješenje

$$(A_1, A_2, A_3, A_4)=(1,1,-1,1),$$

pa konačno dobivamo:

$$h(u)=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}.$$