1. Odredite prirodnu domenu, skup svih nultočaka i skup svih polova racionalne funkcije *f*, pa je zapišite u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije ako je:

a) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-x-2}$;

Rješenje: Najprije nađimo realna rješenja jednadžbi $x^3-1=0$ i $x^2-x-2=0$. Uočimo da je $x^3-1=(x-1)\cdot\left(x^2+x+1\right)$. Zbog toga prva jednadžba ima jedinstveno realno rješenje $x=1$. Druga jednadžba ima realna rješenja $x_1=-1,\ x_2=2$.

Tako zaključujemo da su:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1,2\},\ N(f)=\{1\},\ P(f)=\{-1,2\}.$$

Podijelimo brojnik zadane funkcije njezinim nazivnikom, pa dobijemo:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3-1\right):\left(x^2-x-2\right)=x+1\\
\underline{-\left(x^3-x^2-2\cdot x\right)}\\
x^2+2\cdot x-1\\
\underline{-\left(x^2-x-2\right)}\\
3\cdot x+1
\end{array}$$

Dakle, $q(x)=x+1,\ r(x)=3\cdot x+1,$ pa je traženi zapis

$$f(x)=x+1+\frac{3\cdot x+1}{x^2-x-2}.$$

b) $f(t)=\dfrac{t^3-3\cdot t^2+2\cdot t}{t^2-9}$.

Rješenje: Najprije nađimo realna rješenja jednadžbi $t^3-3\cdot t^2+2\cdot t=0$ i $t^2-9=0$. Uočimo da je $t^3-3\cdot t^2+2\cdot t=t\cdot\left(t^2-3\cdot t+2\right)=t\cdot(t-1)\cdot(t-2)$. Zbog toga prva jednadžba ima tri različita realna rješenja $t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=2.$ Druga jednadžba ima realna rješenja $t_4=-3,\ t_5=3.$

Tako zaključujemo da su:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-3,3\},\ N(f)=\{0,1,2\},\ P(f)=\{-3,3\}.$$

Podijelimo brojnik zadane funkcije njezinim nazivnikom, pa dobijemo:

$$\begin{array}{l}\left(t^3-3\cdot t^2+2\cdot t\right):\left(t^2-9\right)=t-3\\ \underline{-\left(t^3-9\cdot t\right)}\\ -3\cdot t^2+11\cdot t\\ \underline{-\left(-3\cdot t^2+27\right)}\\ 11\cdot t-27\end{array}$$

Dakle, $q(t)=t-3,\ r(t)=11\cdot t-27,$ pa je traženi zapis

$$f(t)=t-3+\frac{11\cdot t-27}{t^2-9}.$$

2. Prikažite zadani polinom kao umnožak različitih polinoma 1. stupnja i polinoma 2. stupnja bez realnih nultočaka, pa odredite njegove nultočke ako su:

a) $p(x) = x^3 - 4 \cdot x^2 - x + 4$;

b) $p(t) = t^4 - 3 \cdot t^3 + t^2 + 3 \cdot t - 2$.

Rješenje: a) Rastavimo zadani polinom na faktore. Imamo redom:

$$p(x) = x^2 \cdot (x-4) - (x-4) = (x-4) \cdot \left(x^2 - 1\right) = (x-4) \cdot (x-1) \cdot (x+1).$$

Odatle „čitamo“: $N(p) = \{-1, 1, 4\}$.

b) Zadani polinom ima ukupno pet članova, pa ga ne možemo rastaviti na faktore pogodnim grupiranjem članova. Zbog toga pokušajmo pogoditi njegove cjelobrojne nultočke (ako postoje). Slobodni član polinoma p je –2. Svi njegovi cjelobrojni djelitelji su –2, –1, 1 i 2. Lako izračunamo:

$$p(-2) = (-2)^4 - 3 \cdot (-2)^3 + (-2)^2 + 3 \cdot (-2) - 2 = 16 - 3 \cdot (-8) + 4 - 6 - 2 = 36,$$
$$p(-1) = (-1)^4 - 3 \cdot (-1)^3 + (-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 2 = 1 - 3 \cdot (-1) + 1 - 3 - 2 = 0,$$
$$p(1) = 1^4 - 3 \cdot 1^3 + 1^2 + 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 + 1 + 3 - 2 = 0,$$
$$p(2) = 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 16 - 3 \cdot 8 + 4 + 6 - 2 = 0.$$

Budući da je p 4. stupnja i da ima tri različite cjelobrojne nultočke, i njegova četvrta nultočka mora biti cijeli broj. Ta je nultočka točno jedan od brojeva –1, 1 i 2. Odredimo o kojemu je broju riječ. Najprije pomnožimo:

$$(t+1) \cdot (t-1) \cdot (t-2) = \left(t^2 - 1\right) \cdot (t-2) = t^3 - 2 \cdot t^2 - t + 2,$$

pa podijelimo zadani polinom dobivenim izrazom:

$$\begin{array}{l}
\left(t^4 - 3 \cdot t^3 + t^2 + 3 \cdot t - 2\right) : \left(t^3 - 2 \cdot t^2 - t + 2\right) = t - 1 \\
\underline{-\left(t^4 - 2 \cdot t^3 - t^2 + 2 \cdot t\right)} \\
-t^3 + 2 \cdot t^2 + t - 2 \\
\underline{-\left(-t^3 + 2 \cdot t^2 + t - 2\right)} \\
0
\end{array}$$

Dakle,

$$p(t) = (t+1) \cdot (t-1)^2 \cdot (t-2),\ N(p) = \{-1, 1, 2\}.$$

3. Odredite prirodnu domenu, skup svih nultočaka i skup svih polova racionalne funkcije g pa skicirajte njezin graf, ako je g zadana pravilom:

$$g(u) = \frac{\left(u^2 + 2 \cdot u + 1\right) \cdot (u-1)}{u \cdot \left(u^4 - 8 \cdot u^2 + 16\right)}.$$

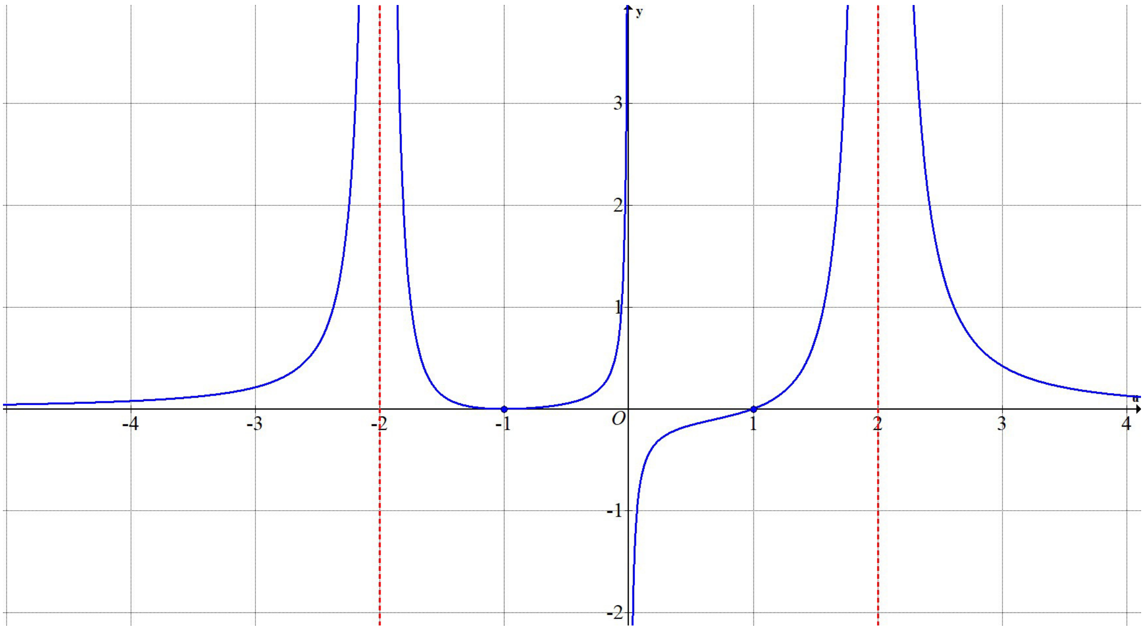
Rješenje: Rastavimo brojnik i nazivnik zadane funkcije na faktore. Lako dobivamo:

$$g(u) = \frac{(u+1)^2 \cdot (u-1)}{u \cdot \left(u^2 - 4\right)^2} = \frac{(u+1)^2 \cdot (u-1)}{u \cdot \left((u-2) \cdot (u+2)\right)^2} = \frac{(u+1)^2 \cdot (u-1)}{u \cdot (u+2)^2 \cdot (u-2)^2}.$$

Odatle lako „čitamo“:

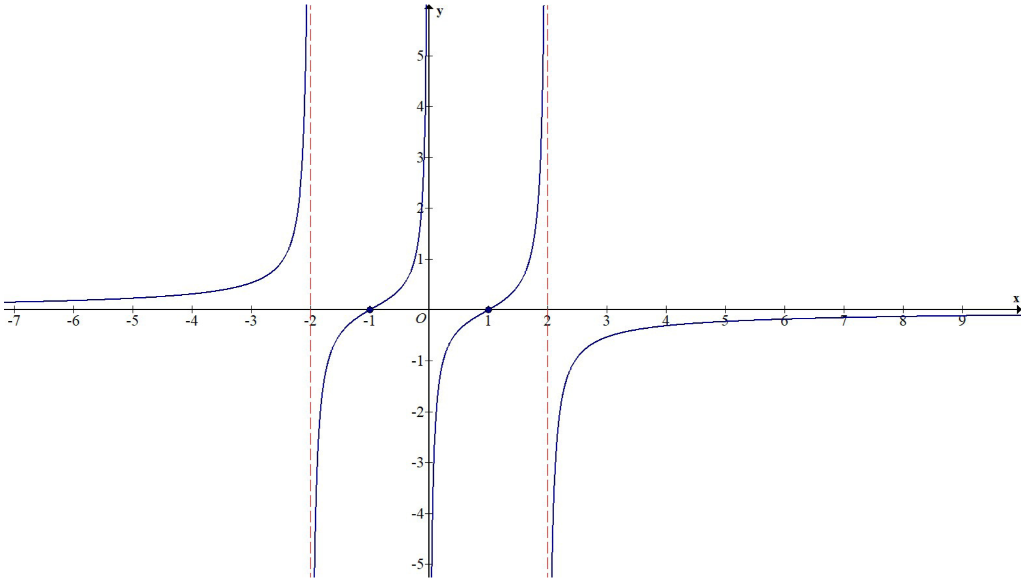
$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\},\ N(g) = \{-1, 1\}, P(g) = \{-2, 0, 2\}.$$

Traženi je graf prikazan na slici 1.



Slika 1.

4. Na slici 2. plavom je bojom prikazan dio grafa racionalne funkcije g. Ako je $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7,9]$, odredite skup svih nultočaka i skup svih polova te funkcije. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.



Slika 2.

Rješenje: Iz pretpostavke $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7,9]$ zaključujemo da je funkcija g definirana na skupu $\mathbb{R} \setminus [-7,9]$ i da u tom skupu nema nijednu nultočku. Naime, ako bi funkcija imala pol x_0 u navedenom skupu, onda vrijednost $g(x_0)$ ne bi postojala, pa ne bi vrijedila nejednakost $g(x_0) \neq 0$, što je suprotno pretpostavci. Analogno, ako bi funkcija imala nultočku x_1 u navedenom skupu, onda bi vrijedila jednakost $g(x_1) = 0$, što je suprotno pretpostavci $g(x) \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus [-7,9]$. Dakle, sve nultočke i polove zadane funkcije treba tražiti u segmentu $[-7,9]$.

Iz slike 2. lako zaključujemo:

$$N(g) = \{-1, 1\},\ P(g) = \{-2, 0, 2\}.$$

Rastav racionalne funkcije na parcijalne razlomke

5. Napišite opći oblik rastava sljedećih racionalnih funkcija na parcijalne razlomke:

a) $f(p)=\dfrac{1}{p^2\cdot\left(p^2-100\right)^3}$;

b) $g(s)=\dfrac{1}{s^3\cdot\left(s^2+1\right)^2}$.

Rješenje: a) Primijetimo da je $p^2-100=(p-10)\cdot(p+10)$. Zbog toga je:

$$p^2\cdot\left(p^2-100\right)^3=p^2\cdot\left((p-10)\cdot(p+10)\right)^3=p^2\cdot(p-10)^3\cdot(p+10)^3,$$

pa traženi rastav ima oblik:

$$f(p)=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p^2}+\frac{A_3}{p-10}+\frac{A_4}{(p-10)^2}+\frac{A_5}{(p-10)^3}+\frac{A_6}{p+10}+\frac{A_7}{(p+10)^2}+\frac{A_8}{(p+10)^3}.$$

b) Polinom $p_1(s)=s^2+1$ nema nijednu realnu nultočku. Zbog toga ga nije moguće rastaviti na umnožak dvaju polinoma 1. stupnja koji imaju realne nultočke. Tako zaključujemo da traženi rastav ima oblik:

$$g(s)=\frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s^3}+\frac{A_4\cdot s+A_5}{s^2+1}+\frac{A_6\cdot s+A_7}{\left(s^2+1\right)^2}.$$

6. Rastavite sljedeće racionalne funkcije na parcijalne razlomke:

a) $f(x) = \dfrac{3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3}{x^3 + 2 \cdot x^2 + x + 2}$;

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$x^3 + 2 \cdot x^2 + x + 2 = x^2 \cdot (x+2) + (x+2) = (x+2) \cdot \left(x^2 + 1\right).$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3}{x^3 + 2 \cdot x^2 + x + 2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2 \cdot x + A_3}{x^2 + 1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $x^3 + 2 \cdot x^2 + x + 2$, dobit ćemo:

$$3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3 = A_1 \cdot \left(x^2 + 1\right) + \left(A_2 \cdot x + A_3\right) \cdot (x+2).$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $x \in \{-2, 0, 1\}$, pa dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned} &3 \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2) + 3 = A_1 \cdot \left((-2)^2 + 1\right), \\ &3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 3 = A_1 \cdot \left(0^2 + 1\right) + (A_2 \cdot 0 + A_3) \cdot (0+2), \\ &3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 3 = A_1 \cdot \left(1^2 + 1\right) + (A_2 \cdot 1 + A_3) \cdot (1+2) \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} &5 \cdot A_1 = 5, \\ &A_1 + 2 \cdot A_3 = 3, \\ &2 \cdot A_1 + 3 \cdot A_2 + 3 \cdot A_3 = 11. \end{aligned}\right\}$$

Njegovo je rješenje $(A_1, A_2, A_3) = (1, 2, 1)$, pa konačno dobivamo:

$$f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2 \cdot x + 1}{x^2 + 1}.$$

b) $g(t)=\dfrac{t^2+1}{t^3-t}$;

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$t^3-t=t\cdot\left(t^2-1\right)=t\cdot(t+1)\cdot(t-1).$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1, A_2, A_3\in\mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{t^2+1}{t^3-t}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t+1}+\frac{A_3}{t-1}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s t^3-t, dobit ćemo:

$$t^2+1=A_1\cdot(t+1)\cdot(t-1)+A_2\cdot t\cdot(t-1)+A_3\cdot t\cdot(t+1).$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $t\in\{-1,0,1\}$, pa dobivamo sljedeći sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\left.\begin{aligned}(-1)^2+1&=A_2\cdot(-1)\cdot(-1-1),\\ 0^2+1&=A_1\cdot(0+1)\cdot(0-1),\\ 1^2+1&=A_3\cdot 1\cdot(1+1)\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{aligned}2\cdot A_2&=2,\\ -A_1&=1,\\ 2\cdot A_3&=2.\end{aligned}\right\}$$

Njegovo je rješenje $(A_1, A_2, A_3)=(-1,1,1),$ pa konačno dobivamo:

$$g(t)=\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}.$$

c) $h(u)=\dfrac{u^2-u+1}{u^4-2\cdot u^3+u^2}$.

Rješenje: Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo redom:

$$u^4-2\cdot u^3+u^2=u^2\cdot\left(u^2-2\cdot u+1\right)=u^2\cdot(u-1)^2.$$

Zbog toga tražimo konstante $A_1,A_2,A_3,A_4\in\mathbb{R}$ takve da vrijedi jednakost:

$$\frac{u^2-u+1}{u^4-2\cdot u^3+u^2}=\frac{A_1}{u}+\frac{A_2}{u^2}+\frac{A_3}{u-1}+\frac{A_4}{(u-1)^2}.$$

Pomnožimo li ovu jednakost s $u^4-2\cdot u^3+u^2$, dobit ćemo:

$$u^2-u+1=A_1\cdot u\cdot(u-1)^2+A_2\cdot(u-1)^2+A_3\cdot u^2\cdot(u-1)+A_4\cdot u^2.$$

U ovu jednakost uvrstimo redom $u\in\{-1,0,1,2\}$, pa dobivamo sljedeći sustav četiriju linearnih jednadžbi s četiri nepoznanice:

$$\left.\begin{array}{l}(-1)^2-(-1)+1=A_1\cdot(-1)\cdot(-1-1)^2+A_2\cdot(-1-1)^2+A_3\cdot(-1)^2\cdot(-1-1)+A_4\cdot(-1)^2,\\ 0^2-0+1=A_2\cdot(0-1)^2,\\ 1^2-1+1=A_4\cdot 1^2,\\ 2^2-2+1=A_1\cdot 2\cdot(2-1)^2+A_2\cdot(2-1)^2+A_3\cdot 2^2\cdot(2-1)+A_4\cdot 2^2\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}-4\cdot A_1+4\cdot A_2-2\cdot A_3+A_4=3,\\ A_2=1,\\ A_4=1,\\ 2\cdot A_1+A_2+4\cdot A_3+4\cdot A_4=3.\end{array}\right\}$$

Njegovo je rješenje $(A_1,A_2,A_3,A_4)=(1,1,-1,1)$, pa konačno dobivamo:

$$h(u)=\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u-1}+\frac{1}{(u-1)^2}.$$