4.2. POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE.

POLINOMI. NULTOČKE POLINOMA.
OSNOVNI TEOREM ALGEBRE.
ALGEBARSKE OPERACIJE S POLINOMIMA.
PRAVE I NEPRAVE RACIONALNE FUNKCIJE.
NULTOČKE I POLOVI RACIONALNE FUNKCIJE.
SKICIRANJE GRAFA PRAVE RACIONALNE FUNKCIJE

4.2.1. POJAM POLINOMA

- Neka su $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $a_n \neq 0$ i neka je $n \in \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
- Funkciju $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu pravilom $p(x) = a_n \cdot x^n + \dots + a_1 \cdot x + a_0$ nazivamo **polinom**.
- Broj n uobičajeno nazivamo **stupanj**, koeficijent a_n **vodeći član**, a koeficijent a_0 **slobodni član** polinoma.
- Izjavu „Stupanj polinoma p je jednak n" pišemo kao: $\deg(p) = n$ ili kao $\mathrm{st}(p) = n$.
- Brojeve $a_0, a_1, \dots, a_n$ nazivamo **koeficijenti polinoma** p.
- Ako je $n = 0$, onda je $p(x) = a_0 = \text{const}$. Dakle, svaku funkciju koja je konstantna na svojoj domeni možemo shvatiti kao *polinom stupnja* 0.
- Ako je $n = 1$, onda je $p(x) = a_1 \cdot x + a_0$ polinom 1. stupnja. Ako je još i $a_0 = 0$, onda govorimo o **linearnoj funkciji**.
- Za $n = 2$ dobivamo polinom 2. stupnja (srednjoškolski: **kvadratnu funkciju**), a za $n = 3$ polinom 3. stupnja (srednjoškolski: **kubnu funkciju**).
- Ako je $a_n = 1$, kažemo da je polinom **normiran**.
- Ako je $p(x) \equiv 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$, onda takav polinom nazivamo **nulpolinom**. Njegov stupanj se ne definira.

4.2.2. PRIMJERI 1.

- a) $p_1(x) = 2 \cdot x + 1$ je polinom 1. stupnja čiji je vodeći koeficijent $a_1 = 2$, a slobodni član $a_0 = 1$.
- b) $p_2(x) = -x^2 + x + 2$ je polinom 2. stupnja čiji je vodeći koeficijent $a_2 = -1$, a slobodni član $a_0 = 2$.
- c) $p_3(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ je polinom 3. stupnja čiji je vodeći koeficijent $a_3 = 1$ (tj. taj polinom je normiran), a slobodni član $a_0 = -1$.

4.2.3. NULTOČKA POLINOMA

- Neka je p polinom stupnja n. Podsjetimo: $D(p) = \mathbb{R}$.
- Svaki $x \in \mathbb{R}$ takav da je $p(x) = 0$ naziva se **nultočka** polinoma p.
- Određivanje nultočaka polinoma p svodi se na rješavanje jednadžbe $p(x) = 0$.
- **OPREZ:** Jednadžba $p(x) = 0$ općenito ima kompleksna rješenja. Nultočke polinoma p su **isključivo** realna rješenja te jednadžbe (ako postoje).
- **Razlog**: Nultočka *bilo koje* funkcije uvijek **mora** pripadati domeni te funkcije. Zbog toga i svaka nultočka polinoma mora biti realan broj.
- **Tvrdnja 1.** Svaki polinom stupnja $n \in \mathbb{N}$ ima najviše n međusobno različitih nultočaka.
- Ova tvrdnja se često iskazuje u sljedećem ekvivalentnom obliku:
- **Tvrdnja 2.** Ako polinom p stupnja n poprima vrijednost 0 u barem $n + 1$ različitih točaka, tada je p nužno nulpolinom.
- **Napomena**: Točke (brojevi) u tvrdnji 2. mogu biti i kompleksni brojevi.

4.2.4. PRIMJERI 2.

- a) Jedina nultočka polinoma $p(x) = x + 1$ je $x_1 = 1$.
- b) Polinom $q(x) = x^2 - 10 \cdot x + 25$ također ima točno jednu nultočku $x_1 = 5$.
- c) Polinom $r(x) = x^2 - x - 2$ ima dvije nultočke: $x_1 = -1$ i $x_2 = 2$.
- d) Polinom $s(x) = x^2 - x + 1$ **nema** nultočaka jer kvadratna jednadžba $x^2 - x + 1 = 0$ nema nijedno realno rješenje (ali ima dva različita kompleksna rješenja!).
- e) Polinom $t(x) = x^3 - 81 \cdot x$ ima točno tri nultočke: $x_1 = -9$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 9$.
- f) Polinom $u(x) = x^3 + x$ ima točno jednu nultočku $x_1 = 0$.

4.2.5. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- U vezi s ukupnim brojem *međusobno različitih* nultočaka nekoga polinoma postoji više značajnih rezultata.
- Najznačajniji je **osnovni teorem algebre** kojega je prvi iskazao René Descartes, a dokazao Carl Friedrich Gauss. On glasi:
- **Teorem 1.** *Svaki polinom stupnja barem* 1 *s* ***kompleksnim*** *koeficijentima ima barem jednu nultočku koja pripada skupu* ***kompleksnih brojeva***.
- Pritom se *polinom s kompleksnim koeficijentima* definira potpuno analogno kao u točki 4.2.1., ali kao funkcija čije su prirodna domena i kodomena jednaki skupu $\mathbb{C}$ i čiji su svi koeficijenti kompleksni brojevi.
- Za polinome definirane kao u točki 4.2.1. najvažniji je sljedeći rezultat:
- **Korolar 1.** Svaki *polinom* ***neparnoga*** *stupnja ima barem jednu realnu nultočku*.
- **Napomena**: *Ne* postoji analogon Korolara 1. za polinome parnoga stupnja.
- Npr. polinomi $p_1(x) = x^2 - 1$ i $p_2(x) = x^2 + 1$ su parnoga stupnja (preciznije stupnja 2), pri čemu p_1 ima točno dvije nultočke (-1 i 1), dok p_2 nema nijednu nultočku.

4.2.5. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- Jedini jednostavan slučaj određivanja nultočaka polinoma neparnoga stupnja je $n = 1$, tj. kad je riječ o linearnoj funkciji.
- U slučaju $n = 2$ nultočka se određuje formulom za računanje rješenja kvadratne jednadžbe.
- U slučaju $n = 3$ nultočka se određuje primjenom *Cardanovih formula* (teških za "ručno" računanje, ali relativno jednostavne za programiranje).
- U slučaju $n = 4$ nultočka se određuje primjenom *Ferrarijevih formula* (također vrlo teških za "ručno" računanje, ali relativno jednostavne za programiranje).
- U slučajevima $n \geq 5$ nultočka se određuje *približno*. Približni izračun koristi različite metode numeričke matematike (o kojima se uči u istoimenu predmetu u 4. semestru).
- Vezana uz osnovni teorem algebre su i sljedeća dva teorema:
- **Teorem 2.** *Neka su x_1, ..., x_n sva (ne nužno međusobno različita) rješenja jednadžbe $p(x) = 0$, gdje je p polinom stupnja n. Tada vrijedi rastav:*

$$p(x) = a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n).$$

- **Teorem 3.** *Neka je p polinom stupnja n s* **realnim** *koeficijentima. Kompleksan broj z je rješenje jednadžbe $p(x) = 0$ ako i samo ako je kompleksan broj $\overline{z}$ rješenje te iste jednadžbe.*

- **Napomena**: Ako su koeficijenti polinoma p kompleksni brojevi, Teorem 3. **ne** vrijedi.
- Npr. za polinom $p(z) = (1 + i) \cdot z + 1 - i$ vrijedi $p(i) = 0$, ali $p(-i) = 2 - 2 \cdot i$.

© mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

4.2.5. OSNOVNI TEOREM ALGEBRE

- Navedena svojstva se vrlo često primjenjuju prigodom rastava nekoga polinoma na faktore, odnosno u situacijama kad polinom stupnja n treba prikazati kao umnožak barem dvaju različitih polinoma čiji je stupanj strogo manji od n.
- Za rješavanje zadataka vrlo je korisna sljedeća varijanta *Bézoutova teorema*:
- Teorem 4. *Neka je p normirani polinom kojemu su svi koeficijenti* **cijeli** *brojevi. Ako jednadžba* $p(x) = 0$ *ima cjelobrojno rješenje, onda je to rješenje nužno djelitelj slobodnoga člana polinoma p.*

4.2.6. OPERACIJE S POLINOMIMA

- Dva polinoma *bilo kojega stupnja* možemo zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti (s ostatkom ili bez ostatka).
- Polinomi se zbrajaju/oduzimaju tako da se zasebno zbroje/oduzmu koeficijenti uz *iste* potencije nezavisne varijable, a potom formalno zbroje svi dobiveni rezultati.
- Dva polinoma se množe prema načelu "svaki sa svakim": svaki član prvoga polinoma treba pomnožiti sa svakim članom drugoga polinoma, a potom zbrojiti sve dobivene umnoške.
- Za *dijeljenje* polinoma koristi se sljedeći teorem.
- **Teorem 5. (teorem o dijeljenju polinoma s ostatkom)** Neka su p_1 i p_2 polinomi s realnim (teorijski: kompleksnim) koeficijentima. Tada *postoje jedinstveni* polinomi q i r takvi da vrijedi:
- $p_1 = q \cdot p_2 + r, \ \mathrm{st}(r) < \mathrm{st}(p_2)$.
- Posebno, ako je r nulpolinom, kažemo da je polinom p_1 **djeljiv polinomom** p_2.

4.2.7. JEDNAKOST POLINOMA. DJELJIVOST POLINOMA

- Budući da su polinomi posebna vrsta funkcija, jednakost polinoma svodi se na jednakost funkcija.
- Dakle, dva polinoma su jednaka ako i samo ako im se podudaraju i domene i kodomene i pravila pridruživanja.
- Budući da se domene i kodomene u pravilu podudaraju (jer je riječ o skupu $\mathbb{R}$), provjera jednakosti pravila pridruživanja može se izreći i ovako:
- *Dva polinoma su jednaka ako i samo ako je njihova razlika nulpolinom.*
- Iz Teorema o dijeljenju polinoma s ostatkom izravno slijedi:
- **Tvrdnja 3.** Polinom p_1 je **djeljiv** polinomom p_2 ako i samo ako je skup svih rješenja jednadžbe $p_2(x) = 0$ podskup skupa svih rješenja jednadžbe $p_1(x) = 0$.
- **Oprez:** Gornja tvrdnja se odnosi na *rješenja jednadžbe*, a ne na *nultočke* polinoma. (*Podsjetnik*: nultočka polinoma p je rješenje jednadžbe $p(x) = 0$, ali rješenje jednadžbe $p(x) = 0$ ne mora biti nultočka polinoma p.)
- Npr. polinomi $p_1(x) = x^3 + x$ i $p_2(x) = x^3 + 2 \cdot x$ imaju isti skup nultočaka (koji?), ali p_1 nije djeljiv s p_2 (i obratno).

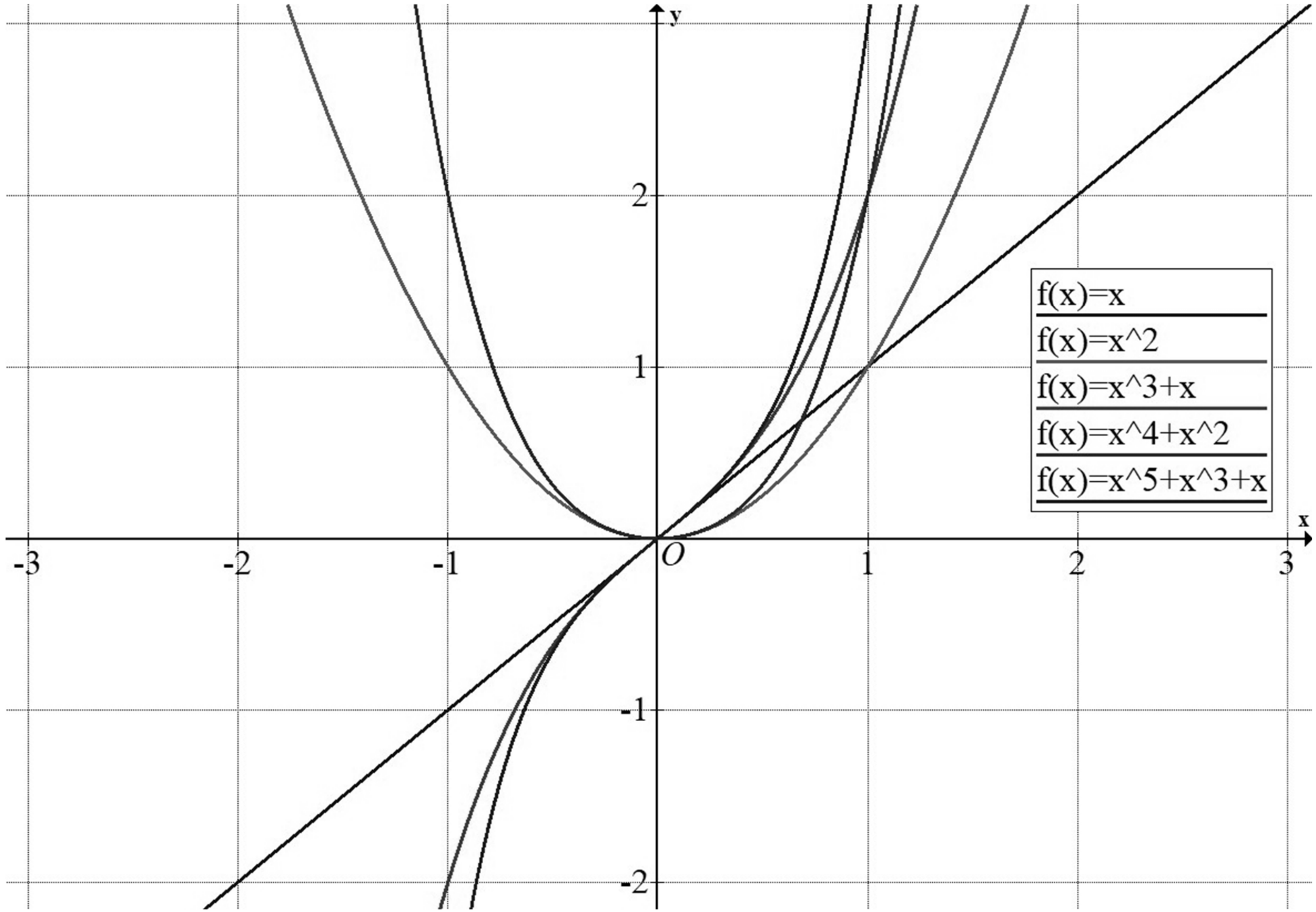
4.2.8. PRIMJERI 3.

- a) Za polinome $p_1(x) = x^4 - x^2$ i $p_2(x) = x^2 - 1$ vrijedi:
- $p_1(x) + p_2(x) = x^4 - 1$;
- $p_1(x) - p_2(x) = x^4 - 2 \cdot x^2 + 1$;
- $p_1(x) \cdot p_2(x) = x^6 - 2 \cdot x^4 + x^2$;
- $p_1(x) : p_2(x) = x^2$ (i ostatak 0), pa je p_1 djeljiv s p_2.
- b) Za polinome $p_1(x) = x^4 + x^2$ i $p_2(x) = x^2 - 1$ vrijedi:
- $p_1(x) + p_2(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 - 1$;
- $p_1(x) - p_2(x) = x^4 + 1$;
- $p_1(x) \cdot p_2(x) = x^6 - x^2$;
- $p_1(x) : p_2(x) = x^2 + 2$ (i ostatak 2).

4.2.9. SKICIRANJE GRAFA POLINOMA

- Graf polinoma skicira se tako da se najprije odrede nultočke toga polinoma.
- Potom se utvrđuje (ne)parnost polinoma, odnosno tip monotonosti (rastuća, padajuća ili ni rastuća, ni padajuća funkcija).
- Karakteristični tipovi takvih polinoma su:
- $p_1(x) = x;$
- $p_2(x) = x^2;$
- $p_3(x) = x^3 + x,$
- $p_4(x) = x^4 + x^2$
- $p_5(x) = x^5 + x^3 + x$ itd.
- Njihovi grafovi prikazani su na sljedećoj slici.

4.2.9. SKICIRANJE GRAFA POLINOMA



4.2.10. POJAM RACIONALNE FUNKCIJE

- Neka su p_1 i p_2 polinomi takvi da je $\mathrm{st}(p_1) < \mathrm{st}(p_2)$.
- Pretpostavimo da jednadžbe $p_1(x) = 0$ i $p_2(x) = 0$ nemaju nijedno zajedničko rješenje.
- Označimo sa $N(p_1)$ i $N(p_2)$ redom skup svih nultočaka polinoma p_1, odnosno polinoma p_2.
- Iz gornje pretpostavke slijedi:
- $N(p_1) \cap N(p_2) = \emptyset$.
- **Prava racionalna funkcija** f je funkcija $f : \mathbb{R} \setminus N(p_2) \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f = \frac{p_1}{p_2}$$

- Skup svih nultočaka funkcije f jednak je $N(p_1)$.

4.2.10. POJAM RACIONALNE FUNKCIJE

- U praksi je moguć i slučaj $\mathrm{st}(p_1) \geq \mathrm{st}(p_2)$. Tada govorimo o **nepravoj racionalnoj funkciji**.
- Svaka neprava racionalna funkcija može se zapisati u obliku zbroja polinoma i prave racionalne funkcije.
- Algoritam za dobivanje toga zapisa je:
- **Korak 1.** Podijeliti polinome p_1 i p_2 prema teoremu za dijeljenje polinoma s ostatkom. Dobivaju se količnik q i ostatak r.
- **Korak 2.** Zapisati:

$$f = q + \frac{r}{p_2}$$

- U tom zapisu je q polinom, dok je razlomak $\frac{r}{p_2}$ prava racionalna funkcija.
- Domena, kodomena i skup svih nultočaka neprave racionalne funkcije definiraju se isto kao i u slučaju prave racionalne funkcije.

4.2.11. POLOVI RACIONALNE FUNKCIJE. KRATNOST NULTOČKE. RED POLA

- Neka je $f = \frac{p_1}{p_2}$ (prava) racionalna funkcija.
- Elemente skupa $N(p_2)$, tj. nultočke polinoma p_2 nazivamo **polovi** racionalne funkcije f.
- Neka je $x_0 \in N(p_1)$ nultočka funkcije f. Najveći prirodan broj k takav da je polinom p_1 djeljiv s $(x - x_0)^k$ nazivamo **kratnost** nultočke x_0.
- Svaka nultočka očito ima kratnost barem jedan.
- Neka je $x_1 \in N(p_2)$ pol funkcije f. Najveći prirodan broj m takav da je polinom p_2 djeljiv s $(x - x_1)^m$ nazivamo **red** pola x_1.
- Svaki pol očito ima red barem jedan.

4.2.12. PRIMJERI 4.

- a) Racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-2\cdot x+1}$
- je prava racionalna funkcija. Ona ima pol $x_0 = 1$ reda 2, te nultočku $x_1 = -1$ kratnosti 1. Njezina domena je skup $\mathbb{R}\backslash\{1\}$, a kodomena skup $\mathbb{R}$.

- b) Racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$
- je prava racionalna funkcija. Ona *nema polova*, ali ima nultočku $x_1 = 1$ kratnosti 1. Njezina domena i kodomena je skup $\mathbb{R}$.

- c) Racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x^2-1}$
- je neprava racionalna funkcija. Možemo je napisati u obliku: $f(x)=x+\dfrac{2\cdot x}{x^2-1}$
-
- Ona ima polove $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$ reda 1. Njezina nultočka je $x = 0$ kratnosti 1.
- Njezina domena je skup $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$, a kodomena skup $\mathbb{R}$.

4.2.13. SKICIRANJE GRAFA PRAVE RACIONALNE FUNKCIJE

- Na temelju podataka o domeni, nultočkama i polovima prave racionalne funkcije možemo skicirati njezin kvalitativni graf.
- Kad se odrede svi polovi funkcije i ucrtaju se na os apscisa, kroz svaki od njih treba povući pravac usporedan s osi ordinata. Graf racionalne funkcije će se približavati tim pravcima, ali ih ne smije sjeći ni u jednoj točki. (Te pravce nazivamo **asimptote**.)
- Radi preciznijega skiciranja korisno je odrediti *predznak* racionalne funkcije lijevo i desno od svakoga pola.
- Prigodom skiciranja je korisno odrediti i nultočke dotične racionalne funkcije (graf funkcije siječe os apscisa u točkama čije su apscise jednake nultočkama te funkcije). Korisno je i primijeniti sljedeća pravila.
- **Pravilo 1** Ako nultočka x_0 ima parnu kratnost, onda graf polinoma/racionalne funkcije *dodiruje* os apscisa u točki $(x_0, 0)$.
- **Pravilo 2.** Ako nultočka x_0 ima neparnu kratnost, onda polinom/racionalna funkcija *mijenja predznak* pri prolazu kroz točku $(x_0, 0)$.
- **Pravilo 3.** Ako pol x_1 ima paran red, onda racionalna funkcija *ima isti predznak* „s obje strane” točke $(x_1, 0)$.
- **Pravilo 4.** Ako pol x_1 ima neparan red, onda racionalna funkcija *ima različite predznake* „s obje strane” točke $(x_1, 0)$.

4.2.14. PRIMJER 5.

- Na slici je prikazan graf racionalne funkcije

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^4 - 4 \cdot x^2}$$