4.2. PRIMJERI DISKRETNIH RAZDIOBA

DISKRETNA JEDNOLIKA RAZDIOBA.
BINOMNA RAZDIOBA.
POISSONOVA RAZDIOBA.
GEOMETRIJSKA RAZDIOBA.

4.2.1. DISKRETNE RAZDIOBE

- Različite slučajne varijable mogu imati iste funkcije vjerojatnosti, a samim tim i iste funkcije razdiobe vjerojatnosti.
- Takve slučajne varijable možemo smatrati praktično jednakima.
- Zbog toga se proučavanje diskretnih slučajnih varijabli svodi na proučavanje njihovih funkcija (razdioba) vjerojatnosti.

4.2.2. DISKRETNA JEDNOLIKA RAZDIOBA

- Neka je $(\mathbf{\Omega}, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.
- Neka je $X : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla čija je slika *konačan* skup $R(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$.
- Kažemo da slučajna varijabla X ima **jednoliku** ili **uniformnu razdiobu** ako je pripadna funkcija vjerojatnosti dana pravilom:

$$P(X = x_k) = \frac{1}{n}, \text{ za svaki } k \in [n].$$

- Tada pišemo: $X \sim U(n)$.
- Kažemo da je slučajna varijabla X **jednolika** ili **uniformna**.

4.2.3. BINOMNA RAZDIOBA

- Pretpostavimo da neki slučajan pokus izvodimo ukupno n puta, te da je u *svakoj* izvedbi pokusa vjerojatnost pojavljivanja nekoga događaja A jednaka p.
- Ovakav model već smo promatrali u točki 2.4. (Bernoullijeva shema). Ondje je slučajni pokus imao točno dva ishoda, a događaj A bio je *uspjeh*.
- Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj pojavljivanja događaja A (pojavljivanja *uspjeha*) u svih n izvedenih pokusa.
- Slika slučajne varijable X je $R(X) = [n]_0 = \{0, 1, ..., n\}$.

4.2.3. BINOMNA RAZDIOBA

- *Funkcija vjerojatnosti* slučajne varijable X tada je:

$$p_k := P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}, \text{ za } k \in [n]_0$$

- Dakle, slučajna varijabla X potpuno je određena zadavanjem točno *dviju* vrijednosti: n i p.
- Takva slučajna varijabla naziva se **binomna slučajna varijabla**, a njezina razdioba **binomna razdioba**.
- Činjenicu da slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu s parametrima n i p pišemo kao: $X \sim B(n, p)$.
- Tipičan primjer binomne slučajne varijable su slučajne varijable koje se odnose na slučajne pokuse u kojima se pojavljuje Bernoullijeva shema (vidjeti točku 2.4.)

4.2.4. OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA BINOMNE RAZDIOBE

- Prema prethodno navedenom, *tablica razdiobe* binomne slučajne varijable je:

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ p_0 & p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

- Može se pokazati da su očekivanje, varijanca i standardna devijacija ove varijable:

$$E(X) = n \cdot p,$$

$$V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p),$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

4.2.5. NAPOMENA

- Ako je $X \sim B(n, p)$, onda iz definicije vjerojatnosti $p_k := P(X = k)$ slijedi:
- $p_0 := P(X = 0) = (1 - p)^n$;
- $p_1 := P(X = 1) = n \cdot p \cdot (1 - p)^{n-1}$;
- $p_{n-1} := P(X = n - 1) = n \cdot p^{n-1} \cdot (1 - p)$;
- $p_n = P(X = n) = p^n$.
- Ponekad je korisno definirati i:
- $p_k := 0$, za svaki $k = n + 1, n + 2, ...$

4.2.6. POISSONOVA RAZDIOBA

- Poissonova razdioba najčešće se primjenjuje kod promatranja tzv. *rijetkih događaja*.
- Formalno, pretpostavimo da slučajan pokus izvodimo ukupno n puta, pri čemu je n "velik" prirodan broj.
- Nadalje, pretpostavimo da je vjerojatnost pojavljivanja događaja A u *svakoj* izvedbi pokusa jednaka p, pri čemu je p "mali" strogo pozitivan realan broj ("blizu" nule).
- Neka je X slučajna varijabla koja označava broj pojavljivanja događaja A u izvedenih n pokusa.
- Tada se slučajna varijabla X može dobro opisati Poissonovom razdiobom čiji je parametar $\lambda = n \cdot p$.

4.2.6. POISSONOVA RAZDIOBA

- Funkcija vjerojatnosti Poissonove slučajne varijable $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ dana je izrazom:

$$p_k := P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}, \text{ za svaki } k \in \mathbb{N}_0.$$

- Ako je $X \sim \text{Pois}(\lambda)$, onda su:

$$E(X) = V(X) = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

- Pritom je očito $\lambda \geq 0$ (najčešće vrijedi $\lambda > 0$).

4.2.7. NAPOMENA

- Iz definicije funkcije vjerojatnosti u Poissonovoj razdiobi slijedi:

$$p_0 := P(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$p_1 := P(X = 1) = \lambda \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$

$$p_2 := P(X = 2) = \frac{1}{2} \cdot \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}$$

....

4.2.8. GEOMETRIJSKA SLUČAJNA VARIJABLA

- Promatramo slučajan pokus koji ima točno dva ishoda: *uspjeh* i *neuspjeh* (npr. finale nekoga nogometnoga, rukometnoga, košarkaškoga natjecanja i sl.).
- Svaki od tih ishoda ima svoju vjerojatnost. Neka je p vjerojatnost *uspjeha*. Tada je $q = 1 - p$ vjerojatnost *neuspjeha*.
- Pretpostavimo da promatrani slučajan pokus ponavljamo sve dok se prvi put ne dogodi *uspjeh*.
- Neka je X slučajna varijabla koja označava broj pokusa napravljenih sve dok se prvi put nije dogodio *uspjeh*. (Uračunavamo i pokus u kojemu se prvi put dogodio uspjeh.)
- Tada varijablu X nazivamo **geometrijska slučajna varijabla**. Njezina slika je skup $\mathbb{N}$.

4.2.9. GEOMETRIJSKA RAZDIOBA

- Funkcija vjerojatnosti pridružena geometrijskoj slučajnoj varijabli je
- $p_k := P(X = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.
- Koristeći formulu za zbroj geometrijskoga reda pokazuje se da je pripadna funkcija razdiobe vjerojatnosti:
  - $F(k) = 1 - (1 - p)^k$.
- Navedena funkcija generira geometrijsku razdiobu, odnosno geometrijsku slučajnu varijablu $X \sim G(p)$. Ta varijabla je jednoznačno određena zadavanjem vjerojatnosti p.

4.2.9. GEOMETRIJSKA RAZDIOBA

- Može se pokazati da su očekivanje, varijanca i standardna devijacija geometrijske slučajne varijable $X \sim G(p)$ dani izrazima:

$$E(X) = \frac{1}{p},$$

$$V(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

4.2.10. NAPOMENA

- Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti geometrijske slučajne varijable X slijedi:
- $P(X = 1) = p$;
- $P(X \leq k) = F(k) = 1 - (1 - p)^k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$;
- $P(X > k) = (1 - p)^k$, za svaki $k \in \mathbb{N}$.

1. Za **jednoliku** slučajnu varijablu X vrijedi:

$$R(X) = \{-2, -1, 1, 2\}.$$

Napišite tablicu razdiobe te slučajne varijable, pa izračunajte njezino očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.

Rješenje: Ukupan broj elemenata skupa $R(X)$ jednak je 4. Budući da je razdioba, prema pretpostavci, jednolika, vjerojatnost pridružena svakom elementu jednaka je $\frac{1}{4}$. Tako zaključujemo da je tablica razdiobe varijable X:

$$X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Osnovne parametre ove razdiobe računamo prema definicijskim formulama:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{4} \cdot \left((-2) + (-1) + 1 + 2\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot 0 = 0, \\ V(X) &= \frac{1}{4} \cdot \left((-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2\right) - 0^2 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot (4 + 1 + 1 + 4) = \\ &= \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, \\ \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \\ &= \frac{\sqrt{10}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}. \end{aligned}$$

2. Poznato je da je od 1000 proizvedenih elektroničkih uređaja točno 5 neispravno. Na Veleučilište u Piškorevcima prispjela je pošiljka u kojoj ima točno 200 uređaja. Neka je X **binomna** slučajna varijabla koja označava ukupan broj neispravnih uređaja u prispjeloj pošiljci. Izračunajte:

a) vjerojatnost da pošiljka sadrži točno tri neispravna uređaja;

Rješenje: Vjerojatnost da je slučajno izabrani uređaj neispravan iznosi

$$p = \frac{5}{1000} = 0.005.$$

Ukupan broj uređaja koje treba ispitati je $n = 200$. Zbog toga je

$$X \sim B(200, 0.005).$$

Tražimo

$$p_3 = P(X = 3).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$p_3 = \binom{200}{3} \cdot 0.005^3 \cdot (1 - 0.005)^{200-3} \approx 0.06116 = 6.116\%.$$

b) vjerojatnost da pošiljka sadrži barem dva neispravna uređaja;

Rješenje: Tražimo

$$p = \sum_{k=2}^{200} p_k = \sum_{k=2}^{200} P(X = k).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p &= 1 - \sum_{k=0}^{1} P(X = k) = \\ &= 1 - (1 - 0.005)^{200} - \binom{200}{1} \cdot 0.005^1 \cdot (1 - 0.005)^{199} \approx \\ &\approx 0.26424 = 26.424\%. \end{aligned}$$

c) vjerojatnost da su svi uređaji u pošiljci ispravni;

Rješenje: Tražimo

$$p_0 = P(X = 0).$$

Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p_0 &= P(X=0) = \\ &= (1-0.005)^{200} \approx \\ &\approx 0.36696 = 36.696\%. \end{aligned}$$

d) očekivani broj neispravnih uređaja u prispjeloj pošiljci;

Rješenje: Očekivani broj neispravnih uređaja u pošiljci jednak je očekivanju varijable X. Ono iznosi

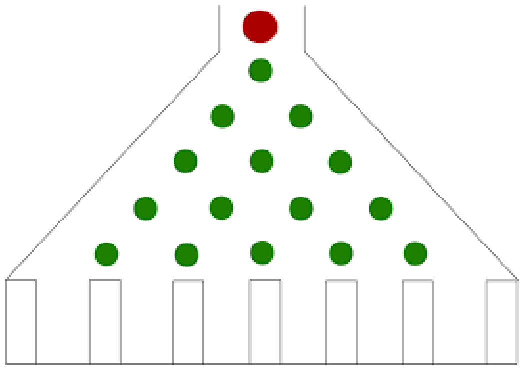
$$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot 0.005 = 1.$$

e) prosječno odstupanje broja neispravnih uređaja od očekivanoga broja neispravnih uređaja.

Rješenje: Traženo je odstupanje jednako je standardnoj devijaciji varijable X. Ona iznosi:

$$\begin{aligned} \sigma(X) &= \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \\ &= \sqrt{200 \cdot 0.005 \cdot (1-0.005)} = \\ &= \sqrt{0.995} \approx 0.9975. \end{aligned}$$

3. (*Galtonova daska*) Kuglica pada na čavliće simetrično posložene u pravilnu trokutastu rešetku s ukupno r redaka. Padom na svaki čavlić kuglica može skrenuti ili ulijevo ili udesno. Nakon što padne na čavlić u posljednjem retku, kuglica pada u točno jedan od n pretinaca (vidjeti sliku 1.). Pretpostavimo da su pretinci označeni redom brojevima 1, ..., n i da je p vjerojatnost skretanja ulijevo pri padu na čavlić.



Slika 1.

a) Kakva funkcijska veza povezuje brojeve r i n?

Rješenje: Broj pretinaca očito nužno mora biti za jedan veći od broja redaka. Dakle, $n = r + 1$ ili, ekvivalentno, $r = n - 1$.

b) Za svaki $k \in [n]$ izračunajte vjerojatnost da kuglica padne u pretinac k.

Rješenje: Putanju kuglice do k-toga pretinca modeliramo kao $r = n - 1$ nezavisnih Bernoullijevih pokusa. Pritom je *uspjeh* ako kuglica skrene ulijevo, a *neuspjeh* ako kuglica skrene udesno. Kuglica će pasti u pretinac k ako i samo ako točno $k - 1$ od tih $n - 1$ pokusa završi *neuspjehom*, a preostalih $(n-1)-(k-1) = n-k$ pokusa završi *uspjehom*. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p_k = \binom{n-1}{n-k} \cdot p^{n-k} \cdot (1-p)^{k-1} = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{n-k} \cdot (1-p)^{k-1}, \ \forall k \in [n].$$

c) Što se dobiva u b) podzadatku u slučaju $p = \frac{1}{2}$?

Rješenje: U rezultat prethodnoga podzadatka uvrstimo $p = \frac{1}{2}$. Lako se dobiva:

$$p_k = \binom{n-1}{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k-1} = \\ = \binom{n-1}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \ \forall k \in [n].$$

4. Poznato je da se u proizvodnji rakije "*Šljivovica*" dobije približno 1% "defektnih" rakijâ, tj. rakijâ čija je jakost slabija od deklarirane. Neka je X Poissonova slučajna varijabla koja označava broj boca s „defektnom" rakijom u uzorku od ukupno 500 boca.

a) Izračunajte vjerojatnost da se u promatranom uzorku nalaze barem 3 boce u kojima se nalazi "defektna" rakija.

Rješenje: Iz podataka u zadatku razabiremo da su

$$n = 500 \text{ i } p = 1\% = 0.01.$$

Prema pretpostavci, X je Poissonova slučajna varijabla, pa je

$$\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 0.01 = 5.$$

Dakle, $X \sim \text{Pois}(5)$.

Tražimo $P(X \geq 3)$. Ta je vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{2} P(X = k) = \\ &= 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)), \end{aligned}$$

pa dobivamo:

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - \left(1 + \frac{5^1}{1!} + \frac{5^2}{2!}\right) \cdot \mathrm{e}^{-5} = \\ &= 1 - \left(1 + 5 + \frac{25}{2}\right) \cdot \mathrm{e}^{-5} = \\ &= 1 - \frac{37}{2} \cdot \mathrm{e}^{-5} \approx \\ &\approx 0.87535 = 87.535\%. \end{aligned}$$

b) Odredite očekivani broj boca iz promatranoga uzorka u kojima se nalazi "defektna" rakija.

Rješenje: Traženi očekivani broj boca u kojima se nalazi „defektna" rakija jednak je matematičkom očekivanju varijable X, a ono je jednako parametru Poissonove razdiobe. Dakle,

$$N = \lambda = 5.$$

5. Administrator internetske stranice *Podnevnoga lista* utvrdio je da u jednom satu tu stranicu posjeti prosječno 8 posjetitelja. Neka je X **Poissonova** slučajna varijabla koja označava **ukupan** broj posjetitelja u jednom satu. Izračunajte vjerojatnost da u slučajno odabranom satu stranicu posjeti:

a) točno 8 posjetitelja;

Rješenje: Iz podataka u zadatku zaključujemo da je

$$E(X) = 8.$$

Budući da je X, prema pretpostavci, Poissonova slučajna varijabla, njezino je očekivanje jednako njezinom parametru. Dakle, $\lambda = 8$, pa je $X \sim \text{Pois}(8)$.

Tražimo $P(X = 8)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$p_8 = \frac{8^8}{8!} \cdot \mathrm{e}^{-8} \approx 0.13959 = 13.959\%.$$

b) najviše 2 posjetitelja;

Rješenje: Tražimo $P(X \le 2)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!}\right) \cdot \mathrm{e}^{-8} = \\ &= 41 \cdot \mathrm{e}^{-8} \approx \\ &\approx 0.01375 = 1.375\%. \end{aligned}$$

c) barem 3 posjetitelja.

Rješenje: Tražimo $P(X \ge 3)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} 1 - P(X \le 2) &= 1 - 41 \cdot \mathrm{e}^{-8} \approx \\ &\approx 0.98625 = 98.625\%. \end{aligned}$$

6. Tipkovnica na prijenosnom računalu "*Sharpung*" sastoji se od 86 tipaka. Pretpostavimo da zatvorenih očiju trebamo pritisnuti tipku za slovo Č, te da su vjerojatnosti pritiskanja bilo koje tipke na tipkovnici međusobno jednake. Izračunajte:

   a) očekivani ukupan broj ponavljanja pokusa sve dok prvi put ne pritisnemo tipku za slovo Č;

   Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava broj pritisnutih tipki sve dok prvi put ne pritisnemo tipku za slovo Č. X je očito geometrijska slučajna varijabla. Budući da su vjerojatnosti pritiskanja bilo koje tipke na tipkovnici međusobno jednake i da se tipkovnica sastoji od ukupno 86 tipaka, vjerojatnost da ćemo u *svakom* pokusu pritisnuti tipku za slovo *Č* jednaka je $p = \frac{1}{86}$. Dakle,

$$X \sim G\left(\frac{1}{86}\right).$$

   Tražimo $E(X)$. Ta vrijednost je jednaka:

$$E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{86}} = 86.$$

   b) vjerojatnost da ćemo tipku za slovo Č pritisnuti u 40. pokušaju;

   Rješenje: Tražimo $P(X = 40)$, a ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p_{40} &:= P(X = 40) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{86}\right)^{40-1} \cdot \frac{1}{86} \approx \\ &\approx 0.00737 = 0.737\%. \end{aligned}$$

   c) vjerojatnost da ćemo tipku za slovo Č pritisnuti u najviše četvrtom pokušaju;

   Rješenje: Tražimo $P(X \leq 4)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p_1 &= F(4) = \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{86}\right)^4 \approx \\ &\approx 0.04571 = 4.571\%. \end{aligned}$$

d) vjerojatnost da niti nakon 10 pokušaja nismo uspjeli pritisnuti tipku za slovo Č.

Rješenje: Tražimo $P(X > 10)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p &= 1 - P(X \le 10) = \\ &= 1 - F(10) = \\ &= \left(1 - \frac{1}{86}\right)^{10} \approx \\ &\approx 0.88962 = 88.962\%. \end{aligned}$$

7. Prigodom svojega vjenčanja Brunhilda i Ksenofont su se sporazumno dogovorili da će stvarati zajedničko potomstvo sve dok im se prvi put ne rodi sin. Na temelju podataka iz Ksenofontova obiteljskoga stabla izračunali su da vjerojatnost rođenja sina u svakom porođaju iznosi 0.7. Izračunajte:

a) očekivanje slučajne varijable koja označava ukupan broj Brunhildine i Ksenofontove djece sve dok im se prvi put ne rodi sin;

Rješenje: Neka je X promatrana slučajna varijabla. X je očito geometrijska slučajna varijabla. Vjerojatnost da *svako* dijete bude sin jednaka je 0.7, pa je $p = 0.7$. Dakle,

$$X \sim G(0.7).$$

Tražimo $E(X)$. Ta vrijednost je jednaka:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{p} = \\ &= \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7} \approx \\ &\approx 1.42857 \approx 2. \end{aligned}$$

b) vjerojatnost da njih dvoje imaju samo sina jedinca;

Rješenje: Tražimo $P(X = 1)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p_1 &= P(X = 1) = \\ &= p = 0.7. \end{aligned}$$

c) vjerojatnost da njihov sin ima barem tri sestre.

Rješenje: Tražimo $P(X \geq 4)$. Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 - P(X \leq 3) = \\ &= 1 - F(3) = \\ &= 1 - \left(1 - (1 - 0.7)^3\right) = \\ &= (1 - 0.7)^3 = \\ &= 0.3^3 = \\ &= 0.027 = 2.7\%. \end{aligned}$$

8. Neka je X bilo koja geometrijska slučajna varijabla. Dokažite da tada X ima *svojstvo „zaboravljanja"*, tj. da za sve $k, l \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$P(X = k + l \mid X > k) = P(X = l).$$

Interpretirajte dobiveni rezultat.

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim G(p)$ za neki $p \in [0,1]$. Tada redom imamo:

$$\begin{aligned}
P(X = k + l \mid X > k) &= \frac{P((X = k + l) \cdot (X > k))}{P(X > k)} = \\
&= \frac{P(X = k + l)}{1 - P(X \leq k)} = \\
&= \frac{P(X = k + l)}{1 - F(k)} = \\
&= \frac{p \cdot (1 - p)^{k+l-1}}{(1 - p)^k} = \\
&= p \cdot (1 - p)^{l-1} = \\
&= P(X = l),
\end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokazani rezultat možemo interpretirati ovako:

Geometrijska varijabla X označava broj slučajnih pokusa izvedenih sve do pojave nekoga događaja. Ako se u prvih k bacanja nije dogodio željeni događaj, onda je vjerojatnost da će se on dogoditi u sljedećoj izvedbi pokusa jednaka vjerojatnosti da će se taj događaj dogoditi (odmah) u prvoj izvedbi pokusa. Također, ako se u prvih k pokusa nije dogodio željeni događaj, onda očekivani broj (novih) pokusa izvedenih do pojave željenoga događaja ostaje nepromijenjen i jednak $\frac{1}{p}$ (jednako kao i prije izvođenja prvoga pokusa).

Napomena: Može se pokazati da vrijedi i obrat dokazane tvrdnje, tj. ako je X slučajna varijabla čija je slika skup $\mathbb{N}$ i ako za sve $k, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $P(X = k + l \mid X > k) = P(X = l)$, onda je X nužno geometrijska slučajna varijabla. Zbog toga kažemo da je svojstvo „zaboravljanja" osnovno svojstvo geometrijske slučajne varijable.