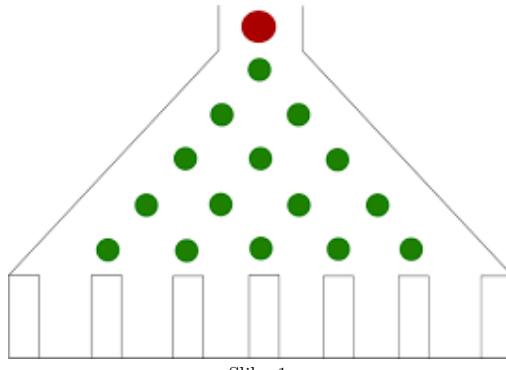


1. Za jednoliku slučajnu varijablu  $X$  vrijedi:  $R(X) = \{-2, -1, 1, 2\}$ . Napišite zakon razdiobe te slučajne varijable, pa izračunajte njezino očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju.
2. Poznato je da je od 1000 proizvedenih električnih uređaja točno 5 neispravno. Na Veleučilište u Piškorevcima prispjela je pošiljka u kojoj ima točno 200 uređaja. Neka je  $X$  binomna slučajna varijabla koja označava ukupan broj neispravnih uređaja u prispjeloj pošiljci. Izračunajte:
  - a) vjerojatnost da pošiljka sadrži točno 3 neispravna uređaja;
  - b) vjerojatnost da pošiljka sadrži barem 4 neispravna uređaja;
  - c) vjerojatnost da su svi uređaji u pošiljci ispravni;
  - d) očekivani broj neispravnih uređaja u prispjeloj pošiljci,
  - e) prosječno odstupanje broja neispravnih uređaja od očekivanoga broja neispravnih uređaja.
3. (*Galtonova daska*) Kuglica pada na čavliće simetrično posložene u pravilnu trokutastu rešetku s ukupno  $r$  redaka. Padom na svaki čavlić kuglica može skrenuti ili ulijevo ili udesno. Nakon što padne na čavlić u posljednjem retku, kuglica pada u točno jedan od  $n$  pretinaca (vidjeti sliku 1.). Pretpostavimo da su pretinci označeni redom brojevima 1, ...,  $n$  i da je  $p$  vjerojatnost skretanja ulijevo pri padu na čavlić.



Slika 1.

- a) Kakva funkcionalna veza povezuje brojeve  $r$  i  $n$ ?
  - b) Za svaki  $k \in [n]$  izračunajte vjerojatnost da kuglica padne u pretinac  $k$ .
  - c) Što se dobiva u a) podzadatku u slučaju  $p = \frac{1}{2}$ ?
4. Poznato je da se u proizvodnji rakije "Šljivovica" dobije približno 1% "defektnih" rakijâ, tj. rakijâ čija je jakost slabija od deklarirane. Neka je  $X$  Poissonova slučajna varijabla koja označava broj boca s „defektnom“ rakijom u uzorku od ukupno 500 boca.

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGABRIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>4.2.</b> <b>Primjeri diskretnih razdioba</b> - zadaci
--	--	--

- a) Izračunajte vjerojatnost da se u promatranom uzorku nalaze barem 3 boce u kojima se nalazi "defektna" rakija.
- b) Odredite očekivani broj boca iz promatranoga uzorka u kojima se nalazi "defektna" rakija.
5. Administrator internetske stranice *Podnevnoga lista* utvrdio je da u jednom satu tu stranicu posjeti prosječno 8 posjetitelja. Neka je  $X$  Poissonova slučajna varijabla koja označava broj posjetitelja u jednom satu. Izračunajte vjerojatnost da u slučajno odabranom satu stranicu posjeti:
- a) točno 8 posjetitelja;
  - b) najviše 2 posjetitelja;
  - c) barem 3 posjetitelja.
6. Tipkovnica na prijenosnom računalu "Sharpung" sastoji se od 86 tipaka. Pretpostavimo da zatvorenih očiju trebamo pritisnuti tipku za slovo Č, te da su vjerojatnosti pritiskanja bilo koje tipke na tipkovnici međusobno jednake. Izračunajte:
- a) očekivani broj ponavljanja pokusa sve dok prvi put ne pritisnemo tipku za slovo Č;
  - b) vjerojatnost da ćemo tipku za slovo Č pritisnuti u 40. pokušaju;
  - c) vjerojatnost da ćemo tipku za slovo Č pritisnuti u najviše četvrtom pokušaju;
  - d) vjerojatnost da niti nakon 10 pokušaja nismo uspjeli pritisnuti tipku za slovo Č.
7. Prigodom svojega vjenčanja Franka i Vedran su se sporazumno dogovorili da će stvarati zajedničko potomstvo sve dok im se prvi put ne rodi sin. Na temelju podataka iz Vedranova obiteljskoga stabla izračunali su da vjerojatnost rođenja sina u svakom porođaju iznosi 0.7. Izračunajte:
- a) očekivani ukupan broj njihove djece;
  - b) vjerojatnost da njih dvoje imaju samo sina jedinca;
  - c) vjerojatnost da njihov sin ima barem tri sestre.
8. Neka je  $X$  bilo koja geometrijska slučajna varijabla. Dokažite da tada  $X$  ima svojstvo „zaboravljanja“, tj. da za sve  $k, l \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$P(X = k + l \mid X > k) = P(X = l).$$

Interpretirajte dobiveni rezultat.

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>4.2.</b> <b>Primjeri diskretnih razdioba</b> - zadaci
---	--	--

## Rezultati zadataka

1. Tablica razdiobe varijable  $X$  je:  $X \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ .

Očekivanje varijable  $X$  iznosi:  $E(X) = \frac{1}{4} \cdot [(-2) + (-1) + 1 + 2] = 0$ .

Varijanca varijable  $X$  iznosi:  $V(X) = \frac{1}{4} \cdot [(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 2^2] = \frac{5}{2}$ .

Standardna devijacija varijable  $X$  iznosi  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10}$ .

2. Vjerojatnost da je slučajno izabrani uređaj neispravan iznosi  $p = \frac{5}{1000} = \frac{1}{200}$ . Ukupan broj uređaja koje treba ispitati je  $n = 200$ . Zbog toga je  $X \sim B\left(200, \frac{1}{200}\right)$ .

a) Tražimo  $p_3 = P(X = 3)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $p_3 = \binom{200}{3} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200-3} \approx 0.06116$ .

b) Tražimo  $\sum_{k=4}^{200} p_k = \sum_{k=4}^{200} P(X = k)$ . Ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} \sum_{k=4}^{200} p_k &= 1 - \sum_{k=0}^3 p_k = 1 - \sum_{k=0}^3 P(X = k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200} - 200 \cdot \frac{1}{200} \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{199} - \\ &- \binom{200}{2} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{198} - \binom{200}{3} \cdot \left(\frac{1}{200}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{197} \approx 0.01868. \end{aligned}$$

c) Tražimo  $p_0 = P(X = 0)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $p_0 = P(X = 0) = \left(1 - \frac{1}{200}\right)^{200} \approx 0.36696$ .

- d) Očekivani broj neispravnih uređaja u pošiljci jednak je očekivanju varijable  $X$ . Ono iznosi:

$$E(X) = n \cdot p = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1.$$

- e) Prosječno odstupanje broja neispravnih uređaja u pošiljci od očekivanoga broja neispravnih uređaja jednako je standardnoj devijaciji varijable  $X$ . Ona iznosi:

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{200} \cdot \left(1 - \frac{1}{200}\right)} = \sqrt{\frac{199}{200}} = \frac{1}{20} \cdot \sqrt{398}.$$

3. a) Broj pretinaca nužno mora biti za jedan veći od broja redaka. Dakle,  $n = r+1$  ili, ekvivalentno,  $r = n-1$ .
- b) Putanju kuglice do  $k$ -toga pretinca modeliramo kao  $r = n-1$  nezavisnih Bernoullijevih pokusa. Pritom je *uspjeh* ako kuglica skrene uljevo, a *neuspjeh* ako kuglica skrene udesno. Kuglica će

 <b>TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU</b> <b>POLYTECHNICUM ZAGREBIENSE</b> <b>Elektrotehnički odjel</b>	<b>Vjerojatnost i statistika</b> (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	<b>4.2.</b> <b>Primjeri diskretnih razdioba</b> - zadaci
--	--	--

pasti u pretinac  $k$  ako i samo ako točno  $k-1$  od tih  $n-1$  pokusa završi *neuspjehom*, a preostalih  $(n-1)-(k-1)=n-k$  pokusa završi *uspjehom*. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p_k = \binom{n-1}{n-k} \cdot p^{n-k} \cdot (1-p)^{k-1} = \binom{n-1}{k-1} \cdot p^{n-k} \cdot (1-p)^{k-1}, \quad \forall k \in [n].$$

c) Lako se dobiva  $p_k = \binom{n-1}{k-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ,  $\forall k \in [n]$ .

**Napomena:** Da bismo mogli primijeniti binomnu slučajnu varijablu, pretince bismo morali označiti brojevima 0, 1, ...,  $n-1$  jer slika svake binomne slučajne varijable sadrži nulu. Definirajte  $X$  kao binomnu slučajnu varijablu koja označava broj pretinca u koji će pasti kuglica, pa riješite zadatak u tom slučaju. Dobiva se  $X \sim B(n-1, p)$  i  $p_k = \binom{n-1}{k} \cdot p^{n-k-1} \cdot (1-p)^k$ ,  $\forall k \in [n-1]$ .

4. Budući da je ukupan broj rakija u uzorku  $n = 500$ , a vjerojatnost da slučajno izabrana boca rakije sadrži „defektnu“ rakiju  $p = 1\%$ , riječ je o Poissonovoj razdiobi s parametrom  $\lambda = n \cdot p = 500 \cdot 1\% = 5$ . Dakle,  $X \sim Po(5)$ .

- a) Tražimo  $P(X \geq 3)$ . Ta je vjerojatnost jednaka  $1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(X = k)$ , pa dobivamo:

$$P(X \geq 3) = 1 - \sum_{k=0}^2 P(X = k) = 1 - \sum_{k=0}^2 \frac{5^k}{k!} \cdot e^{-5} = 1 - \frac{37}{2} \cdot e^{-5} \approx 0.87535.$$

- b) Traženi očekivani broj boca u kojima se nalazi „defektan“ rakija jednak je matematičkom očekivanju varijable  $X$ , a ono je jednako parametru Poissonove razdiobe. Dakle,  $x = \lambda = 5$ .

5. Očito su  $\lambda = 8$  i  $X \sim Po(8)$ .

- a) Tražimo  $P(X = 8)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $\frac{8^8}{8!} \cdot e^{-8} \approx 0.13959$ .

- b) Tražimo  $P(X \leq 2)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $\left(\frac{8^0}{0!} + \frac{8^1}{1!} + \frac{8^2}{2!}\right) \cdot e^{-8} = 41 \cdot e^{-8} \approx 0.01375$ .

- c) Tražimo  $P(X \geq 3)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $1 - P(X \leq 2) = 1 - 41 \cdot e^{-8} \approx 0.98625$ .

6. Neka je  $X$  slučajna varijabla koja označava broj pritisnutih tipki sve dok prvi put ne pritisnemo tipku za slovo Č. Očito je  $X \sim G\left(\frac{1}{86}\right)$ .

- a) Tražimo  $E(X)$ , a ta vrijednost je jednaka  $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{86}} = 86$ .

- b) Tražimo  $P(X = 40)$ , a ta vjerojatnost je jednaka  $p_{40} := P(X = 40) = \left(1 - \frac{1}{86}\right)^{40-1} \cdot \frac{1}{86} \approx 0.00737$ .

- c) Tražimo  $P(X \leq 4)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $p_1 = F(4) = 1 - \left(1 - \frac{1}{86}\right)^4 \approx 0.04571$ .
- d) Tražimo  $P(X > 10)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \left(1 - \frac{1}{86}\right)^{10} \approx 0.88962$ .

7. Neka je  $X$  slučajna varijabla koja označava broj rođene djece sve dok se prvi put ne rodi sin. Očito je  $X \sim G(0.7)$ .

a) Tražimo  $E(X)$ . Ta vrijednost je jednaka  $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.7} = \frac{10}{7} \approx 1.42857 \approx 2$ .

b) Tražimo  $P(X = 1)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $p_1 = P(X = 1) = p = 0.7$ .

c) Tražimo  $P(X \geq 4)$ . Ta vjerojatnost je jednaka  $p_2 = 1 - P(X \leq 3) = (1 - 0.7)^3 = 0.3^3 = 0.027$ .

8. Pretpostavimo da je  $X \sim G(p)$  za neki  $p \in [0,1]$ . Tada redom imamo:

$$\begin{aligned} P(X = k+l \mid X > k) &= \frac{P(X = k+l, X > k)}{P(X > k)} = \frac{P(X = k+l)}{1 - P(X \leq k)} = \frac{P(X = k+l)}{1 - F(k)} = \frac{p \cdot (1-p)^{k+l-1}}{(1-p)^k} = \\ &= p \cdot (1-p)^{l-1} = P(X = l), \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Dokazani rezultat možemo interpretirati ovako:

Geometrijska varijabla  $X$  označava broj slučajnih pokusa izvedenih sve do pojave nekoga događaja. Ako se u prvih  $k$  bacanja nije dogodio željeni događaj, onda je vjerojatnost da će se on dogoditi u sljedećoj izvedbi pokusa jednaka vjerojatnosti da će se taj događaj dogoditi (odmah) u prvoj izvedbi pokusa. Također, ako se u prvih  $k$  pokusa nije dogodio željeni događaj, onda očekivani broj (novih) pokusa izvedenih do pojave željenoga događaja ostaje nepromijenjen i jednak  $\frac{1}{p}$  (jednako kao i prije izvođenja prvoga pokusa).

**Napomena:** Može se pokazati da vrijedi i obrat dokazane tvrdnje, tj. ako je  $X$  slučajna varijabla čija je slika skup  $\mathbb{N}$  i ako za sve  $k, l \in \mathbb{N}$  vrijedi  $P(X = k+l \mid X > k) = P(X = l)$ , onda je  $X$  nužno geometrijska slučajna varijabla. Zbog toga kažemo da je svojstvo „zaboravljanja“ osnovno svojstvo geometrijske slučajne varijable.