4.3. NEPREKIDNE (KONTINUIRANE) SLUČAJNE VARIJABLE

POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE.

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI.

OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE.

4.3.1. POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Dosad smo proučavali slučajne varijable X čija je slika $R(X)$ bio *diskretan skup* (skup sastavljen od elemenata takvih da između svaka dva različita elementa postoji određeni razmak).
- Taj skup je bio konačan ili prebrojiv (beskonačan podskup skupa $\mathbb{N}$, odnosno skupa $\mathbb{Z}$).
- U ovoj ćemo točki proučavati slučajne varijable X čija je slika $R(X)$ neki *neprebrojiv* podskup skupa $\mathbb{R}$ (otvoreni interval, segment, unija intervala i sl.).

4.3.1. POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Svaku slučajnu varijablu X čija je slika $R(X)$ neki neprebrojiv podskup skupa $\mathbb{R}$ nazivamo *neprekidna* ili *kontinuirana slučajna varijabla.*
- Svi "klasični" podskupovi skupa $\mathbb{R}$ (intervali i njihove unije) imaju neprebrojivo mnogo elemenata.
- Zbog toga „ulogu" konačnih zbrojeva i/li redova u definiranju osnovnih numeričkih obilježja neprekidnih slučajnih varijabli preuzimaju *integrali* (i to nepravi!).

4.3.2. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Prilikom proučavanja diskretnih slučajnih varijabli istaknuli smo da se *funkcija vjerojatnosti* za svaki $x \in R(X)$ definira kao $P(X = x)$, tj. vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi upravo vrijednost x.
- U slučaju neprekidnih slučajnih varijabli, međutim, vrijedi jednakost:
- $P(X = x) = 0$, za svaki $x \in R(X)$.
- **Klasična pogreška**: Zaključiti da je $P \equiv 0$ na cijelom skupu $R(X)$.
- **Ispravno**: Umjesto vjerojatnosti $P(X = x)$ promatra se vjerojatnost $P(a \leq X \leq b)$, tj. vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost iz nekoga intervala.
- Kad god je $a < b$, ta vjerojatnost je različita od nule, pa tada govorimo o *funkciji gustoće vjerojatnosti.*

4.3.3. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Preciznije, funkcija gustoće vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X je *svaka* realna funkcija f sa sljedećim svojstvima:

$$\mathbf{1}.\ f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\mathbf{2}.\ P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x;$$

$$\mathbf{3}.\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 1.$$

4.3.3. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- *Problem*: Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće, A, $B \subseteq \mathbb{R}$ i $g : A \to B$ bilo koja funkcija. Odrediti pravilo funkcije gustoće $f_Y : \mathbb{R} \to [0, 1]$ slučajne varijable $Y = g(X)$.
- Podsjetnik: U slučaju diskretnih slučajnih varijabli rješenje ovoga problema je:
- „napasti" s funkcijom g svaki element prvoga retka tablice razdiobe, prepisati drugi redak i (eventualno) „sažeti" dobivenu tablicu ako se nakon djelovanja funkcije g u njezinu prvomu retku pojavljuju međusobno jednake vrijednosti.

4.3.3. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Za neprekidne slučajne varijable rješenje je bitno kompliciranije.
- Osnovni razlog je zamjena konačnih zbrojeva i/ili redova integralima.
- Da bismo mogli riješiti ovaj problem, moramo dodati sljedeću pretpostavku.
- **Pretpostavka:** g je *strogo monotona derivabilna* bijekcija na svojoj domeni.
- Ako ta pretpostavka nije točna, moramo „rastaviti" domenu funkcije g na konačno ili prebrojivo mnogo dijelova takvih da je g strogo monotona derivabilna bijekcija na svakom dijelu.
- Takav slučaj ovdje nećemo razmatrati.

4.3.3. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Uz navedenu pretpostavku o strogoj monotonosti i derivabilnosti funkcije g, rješenje promatranoga problema je:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{\left|g'\left(g^{-1}(y)\right)\right|}, & \forall y\in B,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

- Oprez: Prije primjene ove formule **uvijek** moramo provjeriti jesu li ispunjene pretpostavke o strogoj monotonosti i derivabilnosti funkcije g.

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Usko vezana uz funkciju gustoće (neprekidni analogon funkcije vjerojatnosti) je **funkcija razdiobe** (*distribucije*) **vjerojatnosti** neprekidne slučajne varijable.
- *Podsjetnik*: U slučaju diskretne slučajne varijable funkcija razdiobe vjerojatnosti bila je definirana s $F(x) = P(X \leq x)$. Njezine su se vrijednosti izračunavale kao konačni zbrojevi ili zbrojevi (konvergentnih) redova.
- U slučaju neprekidnih slučajnih varijabli umjesto zbrojeva računamo *neprave integrale.*

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Preciznije, **funkcija razdiobe vjerojatnosti** neprekidne slučajne varijable X je realna funkcija F definirana pravilom:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t,$$

- pri čemu je f funkcija gustoće varijable X.
- Iz ove definicije slijedi osnovno svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X:

$$F' = f$$

- Dakle, funkcija gustoće vjerojatnosti je (prva) *derivacija* funkcije razdiobe vjerojatnosti.

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Osnovna svojstva funkcije razdiobe vjerojatnosti F neprekidne slučajne varijable X su:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1.$

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0.$

3. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) =$

$= P(a < X < b) = F(b) - F(a).$

4. $F'(x) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}.$

4.3.5. OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Očekivanje, varijanca i standardna devijacija neprekidne slučajne varijable interpretiraju se analogno kao i kod diskretne slučajne varijable.
- Odgovarajuće formule za izračun tih veličina su "slične" onima navedenima u slučaju diskretne varijable.
- Osnovna razlika je u zamjeni konačnih zbrojeva i/li zbrojeva redova nepravim integralima.

4.3.5. OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Ako je f funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X, onda vrijedi:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x,$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-E(X)\right)^2\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x-(E(X))^2,$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}.$$

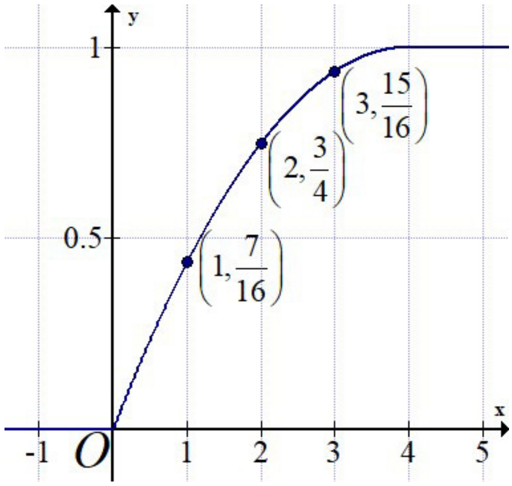
4.3.6. NAPOMENA

- Kao i kod diskretne slučajne varijable čija je slika $R(X)$ beskonačan skup, očekivanje, varijanca i standardna devijacija neprekidne slučajne varijable ne moraju postojati (što ovisi o konvergenciji odgovarajućih nepravih integrala).
- Za brže izračunavanje tih pokazatelja korisno je primijeniti neka svojstva (vidjeti sljedeći slide).

4.3.6. NAPOMENA

- 1. Ako je $Y = g(X)$, gdje je g realna funkcija jedne realne varijable, onda je $$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x.$$
- Posebno, za $g(x) = a \cdot x + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante, dobiva se:
$$E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b.$$
- 2. Ako je X neprekidna slučajna varijabla, onda je
$$V(X) = E\left((X - E(X)^2\right) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2.$$
- Posebno, za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi:
$$V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X),$$
$$\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X).$$

1. Na slici 1. prikazan je graf funkcije F razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X.



Slika 1.

Odredite:

a) $P(-1 < X < 1)$;

Rješenje: Znamo da je

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a),$$

pri čemu se *svaki* znak < može zamijeniti znakom ≤, a da jednakost pritom ostane valjana. Tako sada imamo:

$$P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) =$$
$$= \frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16}.$$

b) $P(0 \le X < 2)$;

Rješenje: $P(0 \le X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$

c) $P(3 < X \le 4)$;

Rješenje: $P(3 < X \le 4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}.$

d) $P(2 \le X \le 5)$.

Rješenje: $P(2 \le X \le 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

2. Funkcija f je definirana pravilom:

$$f(x)=\begin{cases} a-x, \text{ za } x\in[0,\ a]; \\ 0, \text{ inače.} \end{cases}$$

a) Odredite vrijednost parametra $a>0$ tako da f bude funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable X.

Rješenje: Zadana funkcija će biti funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable X ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x=1.$$

Tako imamo:

$$\begin{aligned}
1&=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\\
&=\int_{-\infty}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\\
&=0+\int_{0}^{a}(a-x)\cdot \mathrm{d}x+0=\\
&=\int_{0}^{a}(a-x)\cdot \mathrm{d}x=\\
&=\left(a\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Bigg|_0^a=\\
&=\left(a\cdot a-\frac{1}{2}\cdot a^2-a\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0^2\right)=\\
&=\frac{1}{2}\cdot a^2,
\end{aligned}$$

a odatle slijedi

$$a=\sqrt{2}.$$

To ujedno znači da je

$$\int_{0}^{\sqrt{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_{0}^{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-x\right)\cdot \mathrm{d}x=1.$$

b) Za izračunanu vrijednost parametra a odredite pripadnu funkciju razdiobe F.

Rješenje: Iz definicije funkcije f slijedi da ona poprima vrijednosti isključivo unutar segmenta $\left[0,\sqrt{2}\right]$. Zbog toga za svaki $x<0$ vrijedi $P(X \leq x)=0$, tj. $F(x)=0$.

Nadalje, za $x>\sqrt{2}$ vrijedi:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} \underbrace{f(x)}_{=0}\cdot \mathrm{d}x + \underbrace{\int_{0}^{\sqrt{2}} f(x)\cdot \mathrm{d}x}_{=1} + \int_{\sqrt{2}}^{x} \underbrace{f(x)}_{=0}\cdot \mathrm{d}x = \\
&= 0+1+0=1.
\end{aligned}
$$

Preostaje još odrediti pravilo funkcije razdiobe na segmentu $\left[0,\sqrt{2}\right]$. Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti F slijedi:

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{0}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{0}^{x} \left(\sqrt{2}-t\right)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \left.\left(\sqrt{2}\cdot t-\frac{1}{2}\cdot t^{2}\right)\right|_{0}^{x} = \\
&= \sqrt{2}\cdot x-\frac{1}{2}\cdot x^{2}-\sqrt{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0^{2} = \\
&= -\frac{1}{2}\cdot x^{2}+\sqrt{2}\cdot x,\ \forall x\in\left[0,\sqrt{2}\right]
\end{aligned}
$$

Dakle, tražena funkcija razdiobe vjerojatnosti glasi:

$$
F(x)=\begin{cases} 0, \text{ za } x<0; \\ -\frac{1}{2}\cdot x^{2}+\sqrt{2}\cdot x, \text{ za } x\in\left[0,\sqrt{2}\right]; \\ 1, \text{ za } x>\sqrt{2}. \end{cases}
$$

c) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable X.

Rješenje: Koristit ćemo definicijske relacije za pojedine pokazatelje. Pritom ćemo svaki nepravi integral zamijeniti određenim integralom u granicama od 0 do $\sqrt{2}$ jer je (samo) na segmentu $\left[0, \sqrt{2}\right]$ funkcija f različita od nulfunkcije. Tako redom dobivamo:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^{\sqrt{2}} x \cdot \left(\sqrt{2} - x\right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \cdot x - x^2\right) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3\right)\right|_0^{\sqrt{2}} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 - \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} - 0 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_0^{\sqrt{2}} x^2 \cdot \left(\sqrt{2} - x\right) \cdot \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}\right)^2 = \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} \cdot x^2 - x^3\right) \cdot \mathrm{d}x - \frac{2}{9} = \\
&= \left.\left(\frac{\sqrt{2}}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4\right)\right|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{9} = \\
&= \left(\frac{4}{3} - 1\right) - (0 - 0) - \frac{2}{9} = \frac{1}{9},
\end{aligned}
$$

$$
\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}.
$$

d) Izračunajte $P\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} < X \leq 2\cdot\sqrt{2}\right)$.

Rješenje: Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti F izravno slijedi:

$$P\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} < X < 2\cdot\sqrt{2}\right) = F\left(2\cdot\sqrt{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right) =$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{4}.$$

3. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X definirana je pravilom:

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-a\cdot x}, & \text{za } x \geq 0, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

pri čemu je $a>0$ parametar.

a) Odredite vrijednost a.

Rješenje: Prilikom rješavanja ovoga zadatka koristit ćemo definicijsku formulu Laplaceove transformacije i tablicu osnovnih Laplaceovih transformata. U ovom ćemo podzadatku koristiti jednakost:

$$\mathcal{L}\{1\}(s)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-s\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=\frac{1}{s}.$$

Prema definiciji funkcije gustoće mora vrijediti jednakost

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x=1.$$

Budući da je $f(x)=0,\ \forall x<0,$ zaključujemo da je

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0} 0\cdot \mathrm{d}x=0.$$

Dakle, mora vrijediti jednakost:

$$\int_{0}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x=1.$$

Uvrštavanjem pravila funkcije f i primjenom gornje jednakosti odmah dobivamo:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x=1,$$
$$\frac{1}{a}=1,$$
$$a=1.$$

b) Odredite funkciju razdiobe varijable *X*.

Rješenje: Za svaki $x < 0$ je $f(x) = 0$, pa je u tom slučaju:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = 0.$$

Za svaki $x \geq 0$ je

$$f(x) = \mathrm{e}^{-a \cdot x} = (\text{zbog } a = 1) = \mathrm{e}^{-x},$$

pa je u tom slučaju:

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-t} \cdot \mathrm{d}t = \\ &= 0 + \left(-\mathrm{e}^{-t}\right)\Big|_{0}^{x} = \\ &= -\mathrm{e}^{-x} - (-1) = \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-x}. \end{aligned}$$

Time smo iscrpili sve slučajeve, pa je konačno:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & \text{za } x \geq 0, \\ 0, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

c) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable *X*.

Rješenje: U rješavanju ovoga podzadatka koristit ćemo jednakosti

$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_{0}^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{s^2},$$

$$\mathcal{L}\{x^2\}(s) = \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{s^3}.$$

Prema definicijskim formulama traženih parametara neprekidne slučajne varijable dobivamo redom:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 0 + \frac{1}{1^2} = \\
&= 1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x - (E(X))^2 = \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x}_{=0} + \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{d}x - 1^2 = \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-x} \cdot \mathrm{d}x - 1 = \\
&= \frac{2}{1^3} - 1 = 2 - 1 = 1,
\end{aligned}
$$

$$
\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1.
$$

d) Izračunajte $P(0 < X \le 2)$.

Rješenje: Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti F slijedi:

$$
\begin{aligned}
P(0 < X \le 2) &= F(2) - F(0) = \\
&= \left(1 - \mathrm{e}^{-2}\right) - 0 = \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-2}.
\end{aligned}
$$

4. Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, te $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, proizvoljne, ali fiksirane konstante. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti f_Y slučajne varijable $Y = a \cdot X + b$.

Rješenje: Primijetimo najprije da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g(x) = a \cdot x + b$$

strogo monotona bijekcija. Naime, riječ je o polinomu 1. stupnja koji je strogo rastuća funkcija ako i samo ako je $a > 0$, a strogo padajuća funkcija ako i samo ako je $a < 0$. Njegov inverz je funkcija

$$g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
$$g^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a},$$

a prva derivacija

$$g'(x) = a, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

(Sami provjerite valjanosti prethodnih dviju jednakosti.) Koristeći formulu navedenu na predavanjima dobivamo da je tražena funkcija gustoće $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana pravilom:

$$f_Y(y) = \frac{f_X\left(\frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a}\right)}{|a|} =$$
$$= \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a}\right).$$