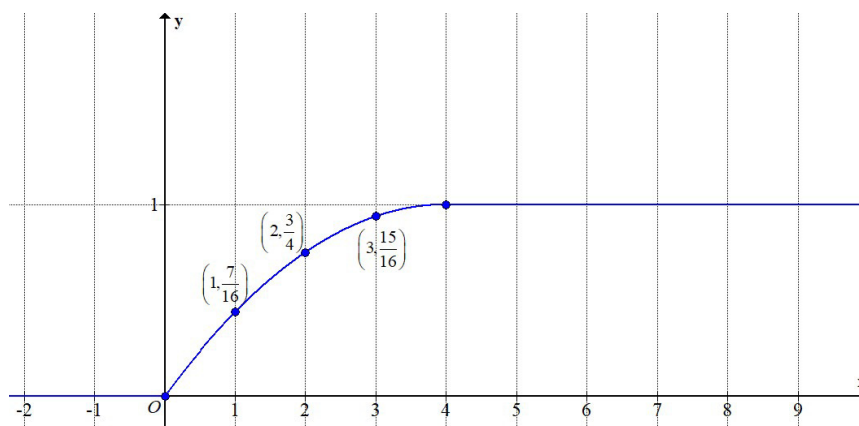


1. Na slici 1. prikazan je graf funkcije F razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X .



Slika 1.

Odredite:

- a) $P(-1 < X < 1)$;
- b) $P(0 \leq X < 2)$;
- c) $P(3 < X \leq 4)$;
- d) $P(2 \leq X \leq 5)$.

2. Realna funkcija f definirana je pravilom:


$$f(x) = \begin{cases} a - x, & \text{za } x \in [0, a]; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- a) Odredite vrijednost parametra $a > 0$ tako da f bude funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable X .
- b) Za izračunanu vrijednost parametra a odredite pripadnu funkciju razdiobe F i nacrtajte njezin graf.
- c) Izračunajte $P\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} < X \leq 2 \cdot \sqrt{2}\right)$.

3. Funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X definirana je pravilom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2}, & \text{za } x \in [1, 3], \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- a) Odredite funkciju razdiobe varijable X i prikažite je grafički.
- b) Izračunajte očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju varijable X .
- c) Izračunajte $P(0 < X \leq 2)$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.3. Neprekidne slučajne varijable - zadaci
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------

Rezultati zadataka

1.

a) $P(-1 < X < 1) = F(1) - F(-1) = \frac{7}{16} - 0 = \frac{7}{16}.$

b) $P(0 \leq X < 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4} - 0 = \frac{3}{4}.$

c) $P(3 < X \leq 4) = F(4) - F(3) = 1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16}.$

d) $P(2 \leq X \leq 5) = F(5) - F(2) = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16}.$

2. a) Zadana funkcija bit će funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable X ako i samo ako vrijedi jednakost $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1$. Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 f(x) \cdot dx + \int_0^a f(x) \cdot dx + \int_a^{+\infty} f(x) \cdot dx = 0 + \int_0^a (a-x) \cdot dx + 0 = \frac{1}{2} \cdot a^2,$$

iz jednadžbe $\frac{1}{2} \cdot a^2 = 1$ slijedi $a = \sqrt{2}$.

b) Iz definicije funkcije f slijedi da ona poprima vrijednosti isključivo unutar segmenta $[0, \sqrt{2}]$. Stoga za $x < 0$ vrijedi $P(X \leq x) = 0$, tj. $F(x) = 0$. Nadalje, za $x > \sqrt{2}$ vrijedi jednakost $P(X \leq x) = 1$ jer slučajna varijabla X sigurno poprima vrijednosti ne veće od $\sqrt{2}$. Preostaje još odrediti pravilo funkcije razdiobe na segmentu $[0, \sqrt{2}]$. Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti slijedi:

$$F(x) = \int_0^x f(t) \cdot dt = \int_0^x (\sqrt{2} - t) \cdot dt = -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot x, \quad \forall x \in [0, \sqrt{2}].$$

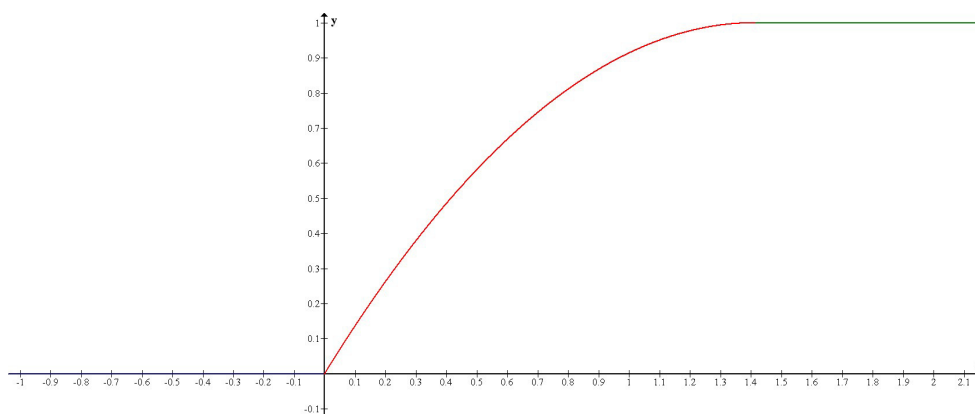
Dakle, funkcija razdiobe vjerojatnosti glasi:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 0; \\ -\frac{1}{2} \cdot x^2 + \sqrt{2} \cdot x, & \text{za } x \in [0, \sqrt{2}]; \\ 1, & \text{za } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

Graf funkcije F prikazan je na slici 1.

c) Iz definicije funkcije razdiobe izravno slijedi:

$$P\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} < X < 2 \cdot \sqrt{2}\right) = F(2 \cdot \sqrt{2}) - F\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right) = 1 - \left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}\right)\right] = \frac{1}{4}.$$

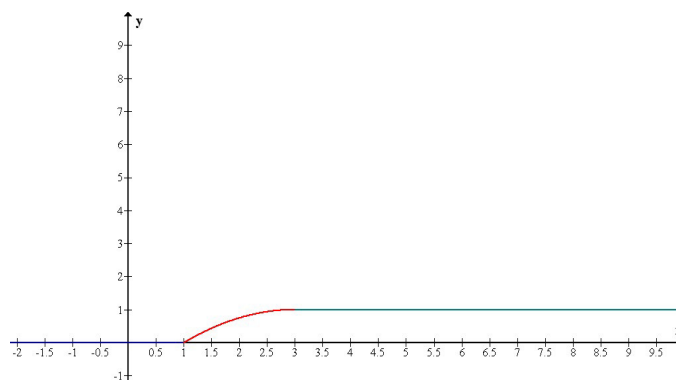


Slika 1.

3. a) Analogno kao u zadatku 2. dobiva se:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x < 1; \\ -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{4}, & \text{za } x \in [1, 3]; \\ 1, & \text{za } x > 3. \end{cases}$$

Graf funkcije F prikazan je na slici 2.



Slika 2.

b) Prema definicijskim formulama dobivamo redom:


$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^1 x \cdot f(x) \cdot dx + \int_1^3 x \cdot f(x) \cdot dx + \int_3^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = 0 + \int_1^3 \left(\frac{3 \cdot x - x^2}{2} \right) \cdot dx + 0 = \frac{5}{3},$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - \left(\frac{5}{3} \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^1 x^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_1^3 x^2 \cdot f(x) \cdot dx + \int_3^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx \right) - \frac{25}{9} =$$

$$= 0 + \int_1^3 x^2 \cdot \left(\frac{3-x}{2} \right) \cdot dx + 0 - \frac{25}{9} = \frac{2}{9},$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}.$$

c) Iz definicije funkcije razdiobe vjerojatnosti F slijedi $P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{3}{4}$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGABIENSE Elektrotehnički odjel	Vjerojatnost i statistika (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.3. Neprekidne slučajne varijable - zadaci
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------

DODATAK: Određivanje integrala u rješenjima zadataka 2. i 3.

U određivanju određenih integrala treba primijeniti Newton-Leibnizovu formulu (vidjeti *Repetitorij matematike za studente elektrotehnike*, stranica 44.).

$$1. \int_0^a (a-x) \cdot dx = \left[a \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right]_0^a = a \cdot a - \frac{1}{2} \cdot a^2 - 0 = \frac{1}{2} \cdot a^2.$$

$$2. \int_0^x (\sqrt{2}-t) \cdot dt = \left[\sqrt{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_0^x = \sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - 0 = \sqrt{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2.$$

$$3. \int_1^x \left(\frac{3-t}{2} \right) \cdot dt = \int_1^x \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot t \right) \cdot dt = \left[\frac{3}{2} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \right]_1^x = \frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{4} \cdot x^2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{4} \cdot x^2 + \frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{4}.$$

$$4. \int_1^3 x \cdot \left(\frac{3-x}{2} \right) \cdot dx = \int_1^3 \left(\frac{3}{2} \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 \right) \cdot dx = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]_1^3 = \frac{3}{4} \cdot 9 - \frac{1}{6} \cdot 27 - \left(\frac{3}{4} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot 1 \right) = \frac{5}{3}.$$

$$5. \int_1^3 x^2 \cdot \left(\frac{3-x}{2} \right) \cdot dx = \int_1^3 \left(\frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{2} \cdot x^3 \right) \cdot dx = \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 \right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot 27 - \frac{1}{8} \cdot 81 - \left(\frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1}{8} \cdot 1 \right) = 3.$$