

4.3. NEPREKIDNE (KONTINUIRANE) SLUČAJNE VARIJABLE

POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE.

FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI.

OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA
DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE.

4.3.1. POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Dosad smo proučavali slučajne varijable X čija je slika $R(X)$ bio *diskretan skup* (skup sastavljen od elemenata takvih da između svaka dva različita elementa postoji određeni razmak).
- Taj skup je bio konačan ili prebrojiv (beskonačan podskup skupa \mathbb{N} , odnosno skupa \mathbb{Z}).
- U ovoj ćemo točki proučavati slučajne varijable X čija je slika $R(X)$ neki *neprebrojiv* podskup skupa \mathbb{R} (otvoreni interval, segment, unija intervala i sl.).

4.3.1. POJAM NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Svaku slučajnu varijablu X čija je slika $R(X)$ neki neprebrojiv podskup skupa \mathbb{R} nazivamo *neprekidna* ili *kontinuirana slučajna varijabla*.
- Svi “klasični” podskupovi skupa \mathbb{R} (intervali i njihove unije) imaju neprebrojivo mnogo elemenata, pa ulogu konačnih zbrojeva i/li redova u definiranju osnovnih numeričkih obilježja neprekidnih slučajnih varijabli preuzimaju *integrali* (i to nepravi!).

4.3.2. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Prigodom proučavanja diskretnih slučajnih varijabli istaknuli smo da se *funkcija vjerojatnosti* za svaki $x \in R(X)$ definira kao $P(X = x)$, tj. vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi upravo vrijednost x .
- U slučaju neprekidnih slučajnih varijabli, međutim, vrijedi jednakost:
- $P(X = x) = 0$, za svaki $x \in R(X)$.
- **Klasična pogreška:** Zaključiti da je $P \equiv 0$ na cijelom skupu $R(X)$.
- **Ispravno:** Umjesto vjerojatnosti $P(X = x)$ promatra se vjerojatnost $P(a \leq X \leq b)$, tj. vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost iz nekoga intervala.
- Kad god je $a < b$, ta vjerojatnost je različita od nule, pa tada govorimo o *funkciji gustoće vjerojatnosti*.

4.3.3. FUNKCIJA GUSTOĆE VJEROJATNOSTI

- Preciznije, **funkcija gustoće vjerojatnosti** neprekidne slučajne varijable X je *svaka* realna funkcija f sa sljedećim svojstvima:

$$1. f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};$$

$$2. P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \cdot dx;$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot dx = 1.$$

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Usko vezana uz funkciju gustoće (neprekidni analogon funkcije vjerojatnosti) je **funkcija razdiobe** (*distribucije*) **vjerojatnosti** neprekidne slučajne varijable.
- *Podsjetnik*: U slučaju diskretne slučajne varijable funkcija razdiobe vjerojatnosti bila je definirana s $F(x) = P(X \leq x)$. Njezine su se vrijednosti izračunavale kao konačni zbrojevi ili zbrojevi (konvergentnih) redova.
- U slučaju neprekidnih slučajnih varijabli umjesto zbrojeva računamo *neprave integrale*.

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Preciznije, **funkcija razdiobe vjerojatnosti** neprekidne slučajne varijable X je realna funkcija F definirana pravilom:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \cdot dt,$$

- pri čemu je f funkcija gustoće varijable X .
- Iz ove definicije slijedi osnovno svojstvo funkcije razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable X :
- $F' = f$.
- Dakle, funkcija gustoće vjerojatnosti je (prva) *derivacija* funkcije razdiobe vjerojatnosti.

4.3.4. FUNKCIJA RAZDIOBE (DISTRIBUCIJE) VJEROJATNOSTI

- Osnovna svojstva funkcije razdiobe vjerojatnosti F neprekidne slučajne varijable X su:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0.$

3. $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a).$

4. $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$

4.3.5. OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Očekivanje, varijanca i standardna devijacija neprekidne slučajne varijable interpretiraju se analogno kao i kod diskretne slučajne varijable.
- Odgovarajuće formule za izračun tih veličina su “slične” onima navedenima u slučaju diskretne varijable.
- Osnovna razlika je u zamjeni konačnih zbrojeva i/li zbrojeva redova nepravim integralima.

4.3.5. OČEKIVANJE, VARIJANCA I STANDARDNA DEVIJACIJA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Ako je f funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable X , onda vrijedi:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx,$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx - (E(X))^2$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

4.3.6. NAPOMENA

- Kao i kod diskretne slučajne varijable čija je slika $R(X)$ beskonačan skup, očekivanje, varijanca i standardna devijacija neprekidne slučajne varijable ne moraju postojati (što ovisi o konvergenciji odgovarajućih nepravih integrala).
- Za brže izračunavanje tih pokazatelja korisno je primijeniti neka svojstva (vidjeti sljedeći slide).

4.3.6. NAPOMENA

- **1.** Ako je $Y = g(X)$, gdje je g realna funkcija jedne realne varijable, onda je $E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) \cdot dx$.
- Posebno, za $g(x) = a \cdot x + b$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante, dobiva se:
 - $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$.
- **2.** Ako je X neprekidna slučajna varijabla, onda je
 - $V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$.
 - Posebno, za sve $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi:
 - $V(a \cdot X + b) = a^2 \cdot V(X)$.
 - $\sigma(a \cdot X + b) = |a| \cdot \sigma(X)$.