TVZ TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	**Matematika 1** (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	**4.3. Trigonometrijske i ciklometrijske funkcije. 4.4. Eksponencijalna i logaritamska funkcija.** - zadaci

1. Nacrtajte grafove sljedećih harmonijskih funkcija na njihovu osnovnu segmentu:

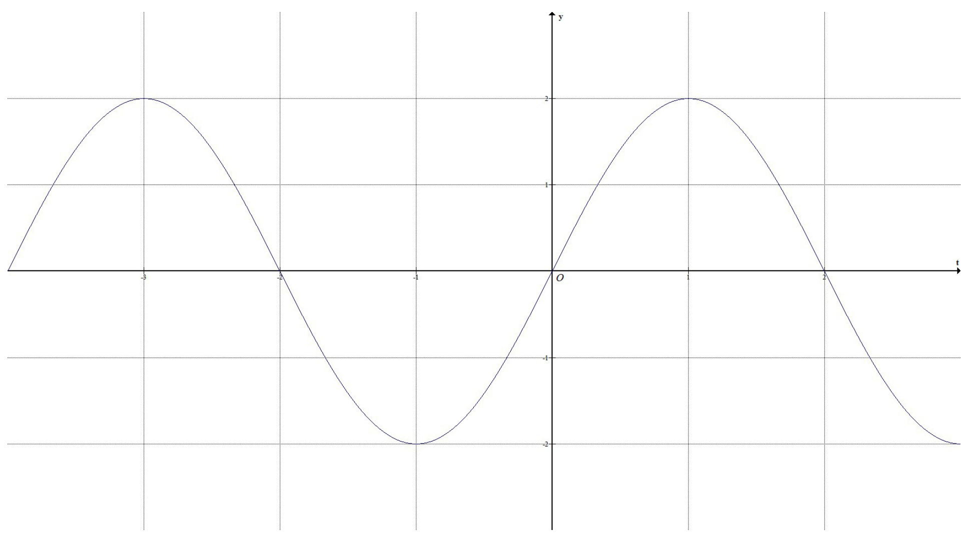
a) $f(x)=\sin\left(2\cdot x+\dfrac{\pi}{4}\right)$;

b) $g(t)=2\cdot\sin\left(\dfrac{1}{2}\cdot t-\dfrac{2\cdot\pi}{3}\right)$;

c) $h(u)=(-3)\cdot\sin\left(\dfrac{1}{3}\cdot u-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

2. Odredite superpoziciju titranja zadanih jednadžbama $f_1(t)=\sin\left(t-\dfrac{\pi}{4}\right)$ i $f_2(t)=2\cdot\sin\left(t+\dfrac{\pi}{4}\right)$. Na istoj slici nacrtajte grafove svih triju funkcija.

3. Odredite pravilo titranja $h(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ čiji je graf prikazan na slici 1. Pretpostavite da su $A,\omega>0$ i $\varphi\in\left\langle-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$.



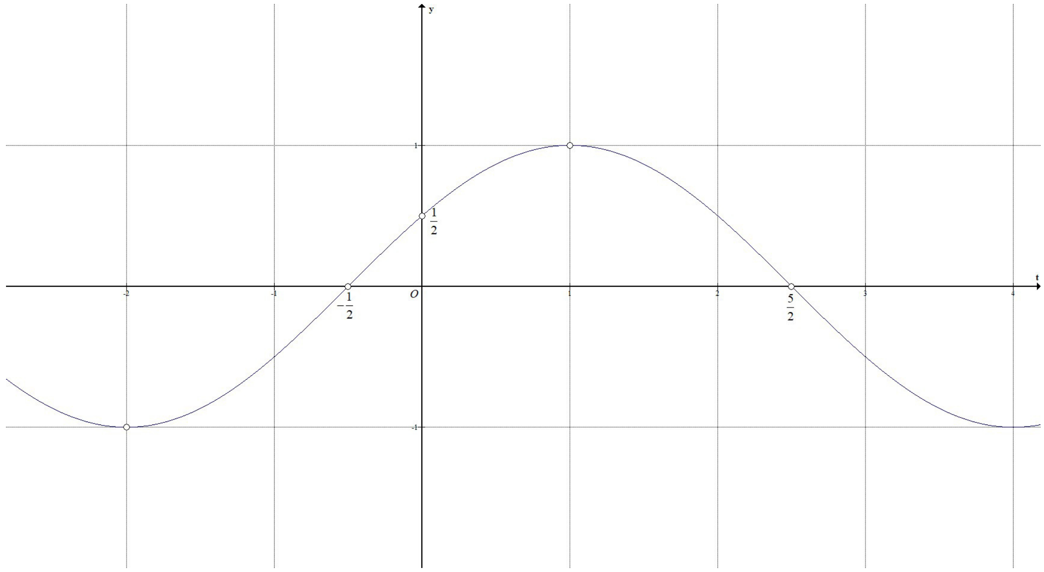
Slika 1.

4. Odredite pravilo titranja $h(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ čiji je graf prikazan na slici 2. Pretpostavite da su $A,\omega>0$ i $\varphi\in\left\langle-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\rangle$.

5. Dokažite sljedeće jednakosti:

a) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},\ \forall x\in[-1,1]$;

b) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\dfrac{\pi}{2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.



Slika 2.

6. S točnošću od 10^{-5} izračunajte sh 1 + ch 2 + th 3 + cth 4.

7. Odredite prirodnu domenu inverza bijekcije f i sve njegove nultočke (ako postoje) ako je:

a) $f(t) = \dfrac{2 \cdot e^t - 1}{e^t + 1}$;

b) $f(t) = \arcsin(\ln(t+1))$;

c) $f(t) = \arccos\left(e^t\right)$

RJEŠENJA ZADATAKA

2. Iz zadanih jednadžbi titranja očitamo: $A_1 = 1$, $\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}$, $A_2 = 2$, $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$. Stoga je:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \sqrt{1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos\left[\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]} = \sqrt{5},$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A} = \dfrac{1 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{5}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} > 0, \\ \cos\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}{A} = \dfrac{1 \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{5}} = \dfrac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{5}} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\varphi \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle \text{ i } \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \varphi = 0.321751 \text{ rad.}$$

Dakle, tražena superpozicija je funkcija:

$$f_1(x) + f_2(x) = \sqrt{5} \cdot \sin(x + 0.321751).$$

3. Iz slike se vidi da su amplituda $A = 2$ i fazni pomak $\varphi = 0$. Preostaje odrediti kružnu frekvenciju ω. Dvije uzastopne nultočke su očito $t_1 = 0$ i $t_2 = 2$. Udaljenost između njih jednaka je polovici temeljnoga perioda. Tako iz sustava jednadžbi

$$\begin{cases} T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}, \\ \dfrac{1}{2} \cdot T = |2 - 0| \end{cases}$$

slijedi $(T, \omega) = \left(4, \frac{\pi}{2}\right)$. Dakle, traženo pravilo je: $h(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right)$.

4. Iz slike se vidi da je amplituda $A = 1$ i da su dvije uzastopne nultočke $t_1 = -\frac{1}{2}$ i $t_2 = \frac{5}{2}$. Tako iz sustava jednadžbi

$$\begin{cases} T = \dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}, \\ \dfrac{1}{2} \cdot T = \left|\dfrac{5}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right)\right| \end{cases}$$

slijedi $(T, \omega) = \left(6, \frac{\pi}{3}\right)$. Preostaje iskoristiti podatak da krivulja prolazi točkom $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Uvrstimo li $A = 1$, $t = 0$ i $h(t) = \frac{1}{2}$ u pravilo funkcije h, dobit ćemo trigonometrijsku jednadžbu $\sin\varphi = \frac{1}{2}$. Ona u intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ima jedinstveno rješenje $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Dakle, traženo pravilo je $h(t) = \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$.

5. **a)** Zadana jednakost je ekvivalentna jednakosti $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Odatle je:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Leftrightarrow x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\arccos x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\arccos x) \Leftrightarrow x = x,$$

pa slijedi tvrdnja.

b) Zadana jednakost je ekvivalentna jednakosti $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$. Odatle je:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right) \Leftrightarrow x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)} \Leftrightarrow x = \frac{\cos(\operatorname{arcctg} x)}{\sin(\operatorname{arcctg} x)} \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) \Leftrightarrow x = x,$$

pa slijedi tvrdnja.

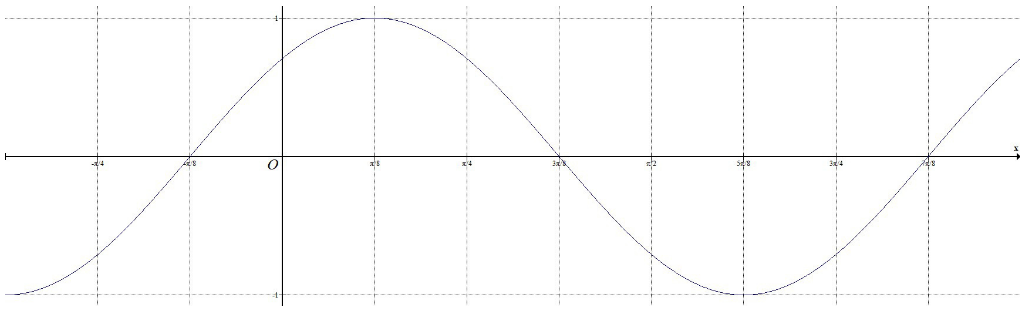
6. sh 1 + ch 2 + th 3 + cth 4 = 6.93312.

7. **a)** $f^{-1}(t) = \ln\left(\frac{t+1}{2-t}\right) \Rightarrow D\left(f^{-1}\right) = \langle -1, 2 \rangle,\ N\left(f^{-1}\right) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

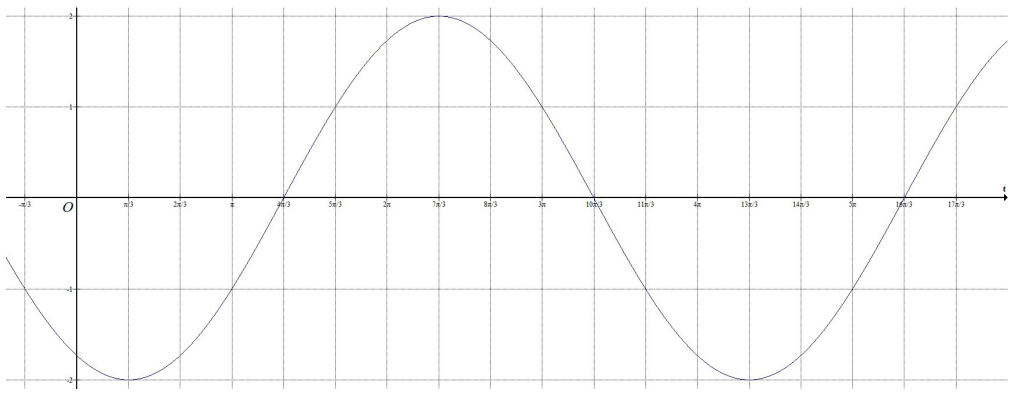
b) $f^{-1}(t) = e^{\sin t} - 1 \Rightarrow D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R},\ N\left(f^{-1}\right) = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $f^{-1}(t) = \ln(\cos t) \Rightarrow D\left(f^{-1}\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi, \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi \right\rangle,\ N\left(f^{-1}\right) = \{2 \cdot k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

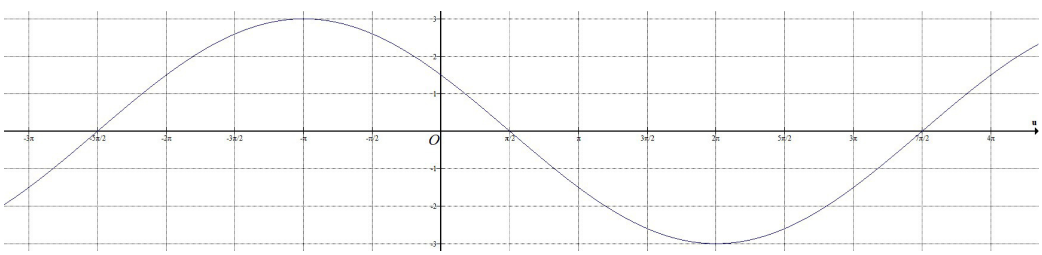
GRAFOVI IZ ZADATAKA 1. i 2.



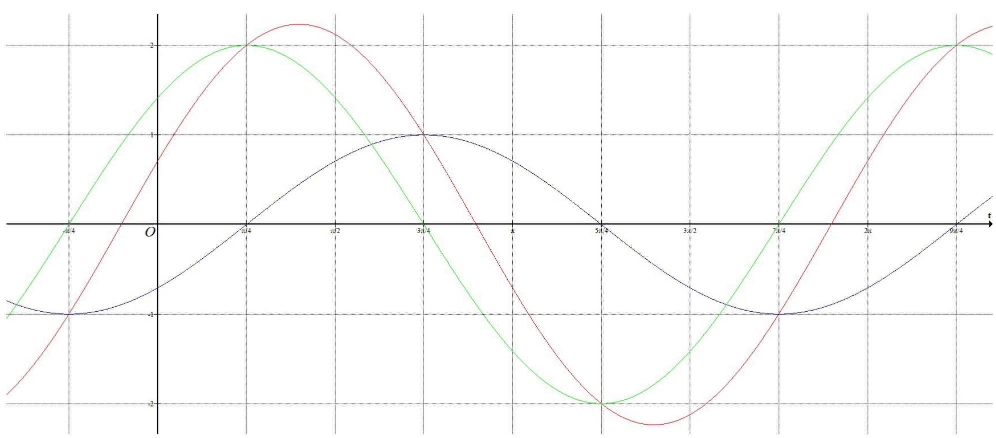
Slika 1.a)



Slika 1.b)



Slika 1.c)



Slika 2.