

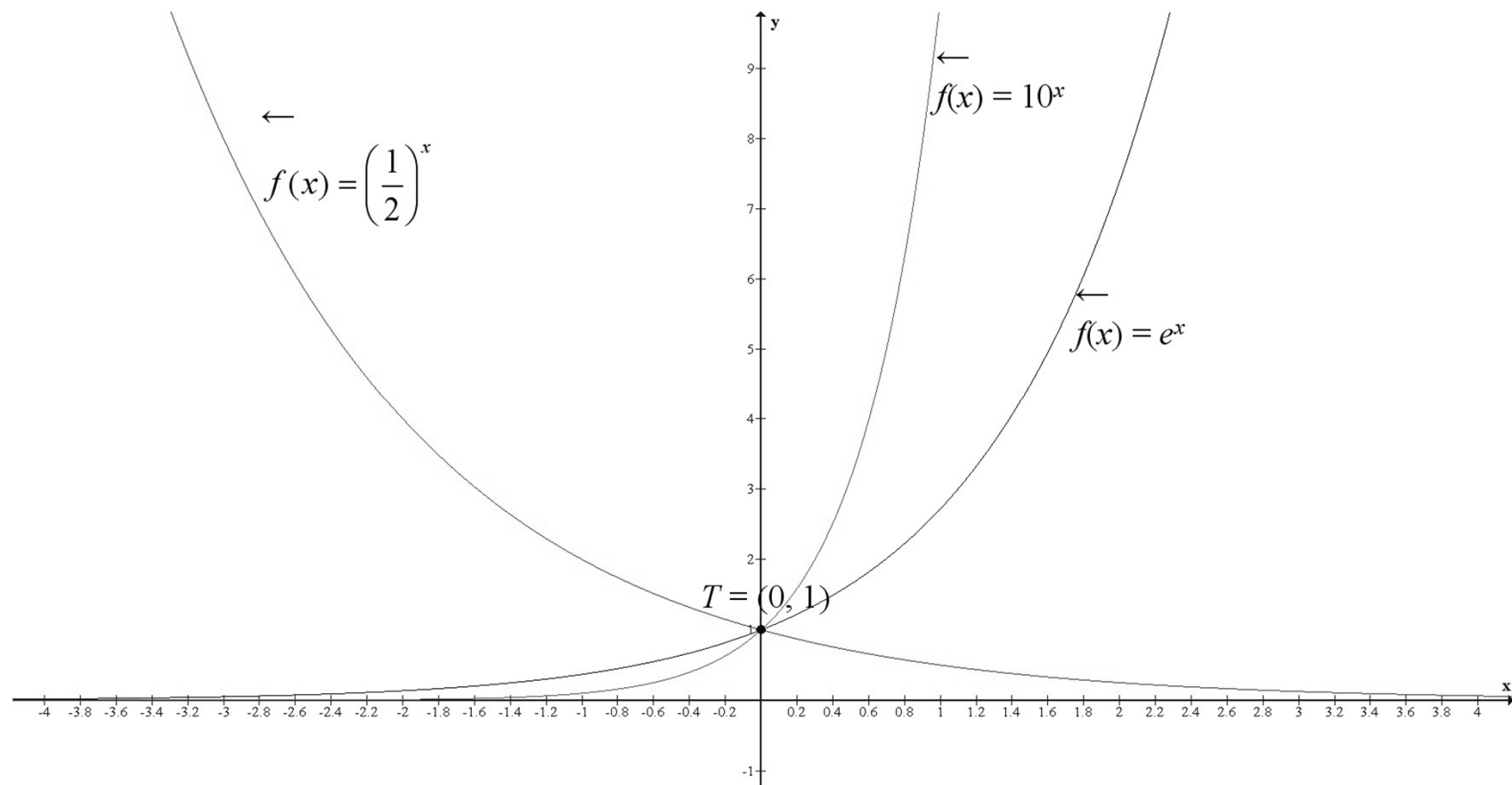
4.4. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA.
LOGARITAMSKA FUNKCIJA.
HIPERBOLNE FUNKCIJE.
AREA FUNKCIJE

4.4.1. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

- Neka je $a \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ konstanta.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0, +\infty \rangle$ definiranu formulom $f(x) = a^x$ nazivamo **eksponencijalna funkcija**. Broj a je **baza**, a varijabla x **eksponent** te funkcije.
- Prirodna domena eksponencijalne funkcije je skup \mathbb{R} . Za kodomenu uzimamo skup $\langle 0, +\infty \rangle$ (tj. sliku funkcije f) kako bismo dobili bijekciju.
- Eksponencijalna funkcija *nema* nultočaka, ali njezin graf nužno prolazi točkom $T = (0, 1)$.
- Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:
 - strogo rastuća bijekcija omeđena odozdo, a nije ni parna ni neparna ni periodička.
- Za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:
 - strogo padajuća bijekcija omeđena odozdo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $a = e \approx 2.7182818\dots$ (baza prirodnoga logaritma) dobivamo funkciju $f(x) = e^x$.
- Grafovi nekih eksponencijalnih funkcija prikazani su na sljedećoj slici.

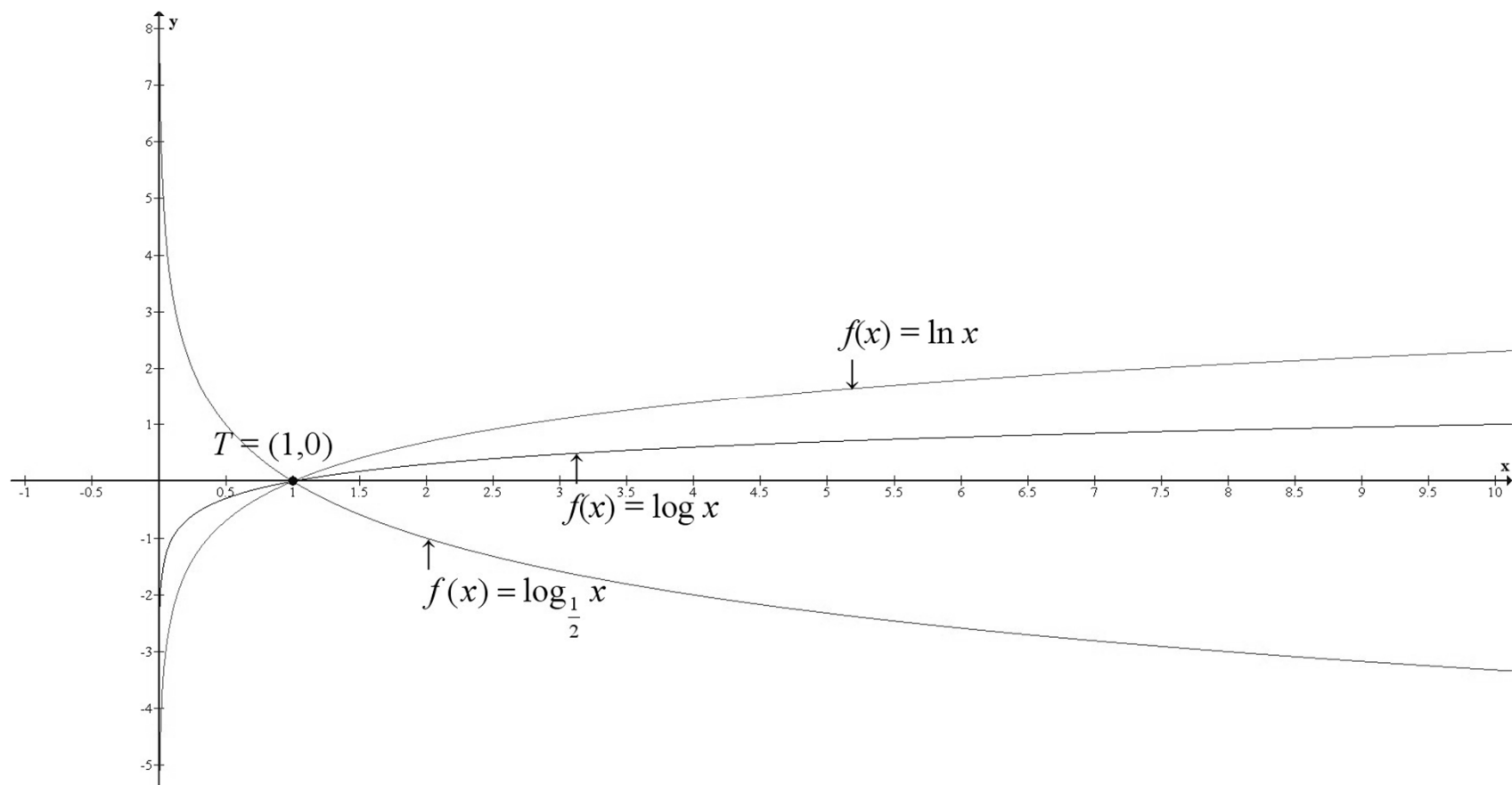
4.4.2. GRAFOVI NEKIH EKSPONENCIJALNIH FUNKCIJA



4.4.3. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

- U točki 4.4.1. istakli smo da je svaka eksponencijalna funkcija bijekcija. Zbog toga svaka eksponencijalna funkcija ima inverz. Taj inverz nazivamo *logaritamska funkcija*.
- Za $a \in \langle 0, +\infty \rangle \setminus \{1\}$ funkciju $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ definiranu formulom $f(x) = \log_a x$ nazivamo **logaritamska funkcija**.
- Broj a je **baza**, a varijabla x **logaritmand** te funkcije.
- Prirodna domena *svake* logarithamske funkcije gornjega oblika je skup $\langle 0, +\infty \rangle$. Kodomena i slika te funkcije je skup \mathbb{R} .
- Logarithamska funkcija ima točno jednu nultočku: $x = 1$. Zbog toga graf svake logarithamske funkcije nužno prolazi točkom $T = (1, 0)$.
- Za $a > 1$ logarithamska funkcija ima sljedeća svojstva:
 - strogo rastuća bijekcija koja nije omeđena ni odozdo ni odozgo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $0 < a < 1$ logarithamska funkcija ima sljedeća svojstva:
 - strogo padajuća bijekcija koja nije omeđena ni odozdo ni odozgo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $a = 10$ dobivamo funkciju $f(x) = \log x$. Tu funkciju nazivamo **funkcija dekadskoga logaritma** ili, kraće, *dekadski logaritam*.
- Za $a = e \approx 2.7182818\dots$ (baza prirodnoga logaritma) dobivamo funkciju $f(x) = \ln x$. Tu funkciju nazivamo **funkcija prirodnoga logaritma** ili, kraće, *prirodni logaritam*.
- Grafovi nekih logarithamskih funkcija prikazani su na sljedećoj slici.

4.4.4. GRAFOVI NEKIH LOGARITAMSKIH FUNKCIJA



4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- Pomoću eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$ definiraju se tzv. *hiperbolne funkcije* koje su rješenja mnogih problema iz tehnike i građevine (npr. problema proračuna otpornosti nekoga materijala).
- Prvi ih je definirao Vincenzo Ricatti, a kasnije nadopunio Johann Heinrich Lambert.
- Postoje četiri osnovne hiperbolne funkcije:
- *sinus hiperbolni* (oznaka: sh);
- *kosinus hiperbolni* (oznaka: ch);
- *tangens hiperbolni* (oznaka: th);
- *kotangens hiperbolni* (oznaka: cth).

4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- **Sinus hiperbolni** je neomeđena strogo rastuća neparna bijekcija čiji su prirodna domena i slika \mathbb{R} . Njezina jedina nultočka je $x = 0$. Definirana je formulom:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **Kosinus hiperbolni** je odozdo omeđena parna funkcija koja je strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$. Njezina prirodna domena je \mathbb{R} , a slika $[1, +\infty)$. Ona nije bijekcija, te nema realnih nultočaka. Definirana je formulom:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- **Tangens hiperbolni** je omeđena strogo rastuća neparna bijekcija čija je prirodna domena \mathbb{R} , a slika $\langle -1, 1 \rangle$. Njezina jedina nultočka je $x = 0$. Definirana je formulom:

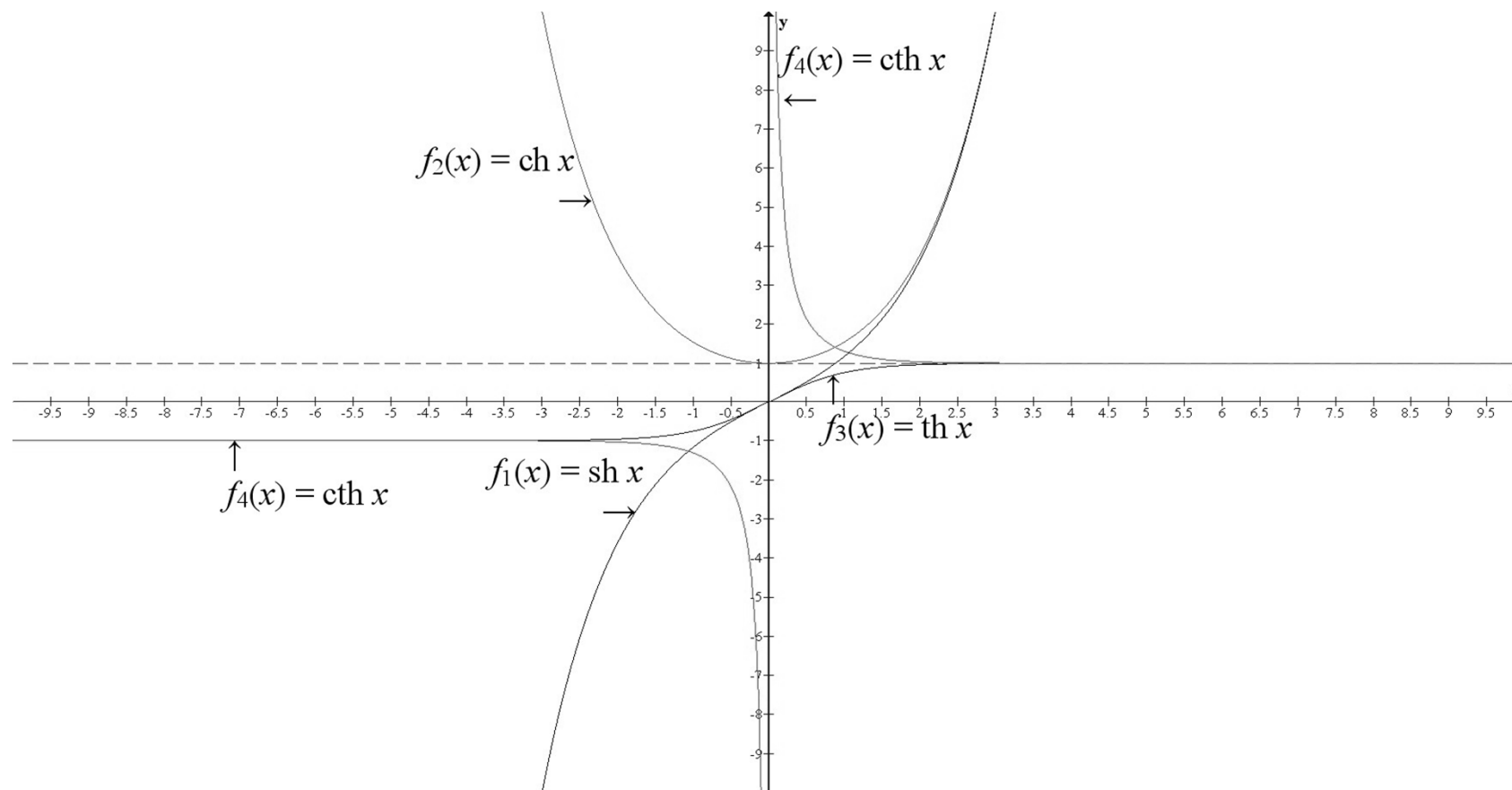
$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ili} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

- **Kotangens hiperbolni** je neomeđena neparna bijekcija koja je strogo padajuća na svojoj prirodnoj domeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Njezina slika je $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Nema realnih nultočaka. Definirana je formulom:

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{ili} \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$$

- Grafovi svih četiriju hiperbolnih funkcija prikazani su na sljedećoj slici. Graf funkcije ch vrlo često se naziva *lančanica*.

4.4.6. GRAFOVI HIPERBOLNIH FUNKCIJA



4.4.7. OSNOVNI IDENTITETI VEZANI UZ HIPERBOLNE FUNKCIJE

0. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x.$

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$

2. $\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$

3. $\operatorname{ch}(2 \cdot x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x.$

4. $\operatorname{sh}(2 \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x.$

5. $\operatorname{th}(2 \cdot x) = \frac{2 \cdot \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$

6. $\operatorname{cth}(2 \cdot x) = \frac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \cdot \operatorname{cth} x}.$

7. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y.$

8. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y.$

9. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$

10. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$

4.4.8. AREA FUNKCIJE

- Sve hiperbolne funkcije, osim kosinusa hiperbolnog, su bijekcije sa svoje domene na svoju sliku.
- Za kosinus hiperbolni najprije definiramo pomoćnu funkciju $\text{Ch} : [0, +\infty) \rightarrow [1, +\infty)$, $\text{Ch}(x) = \text{ch } x$. (Dakle, ta se funkcija razlikuje od funkcije ch isključivo po svojoj prirodnoj domeni.)
- Tako dobijemo bijekciju sa skupa $[0, +\infty)$ u $[1, +\infty)$.
- Za tri ranije definirane funkcije (sh , th i cth), te funkciju Ch postoje jedinstveni *inverzi*.
- Sve inverze hiperbolnih funkcija jednim imenom nazivamo **area funkcije**.

4.4.8. AREA FUNKCIJE

- Inverz funkcije sh naziva se **area sinus hiperbolni**. To je neomeđena, strogo rastuća, neparna bijekcija čiji su prirodna domena i slika \mathbb{R} . Definirana je formulom:

$$\operatorname{arsh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)$$

- Inverz funkcije Ch naziva se **area kosinus hiperbolni**. To je odozdo omeđena, strogo rastuća bijekcija koja nije ni parna ni neparna. Njezina prirodna domena je $[1, +\infty)$, a slika $[0, +\infty)$. Definirana je formulom:

$$\operatorname{arch} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

4.4.8. AREA FUNKCIJE

- Inverz funkcije th naziva se **area tangens hiperbolni**. To je neomeđena, strogo rastuća, neparna bijekcija čija je prirodna domena $\langle -1, 1 \rangle$, a slika \mathbb{R} . Definirana je formulom:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{1+x}{1-x}$$

- Inverz funkcije cth naziva se **area kotangens hiperbolni**. To je neomeđena, strogo padajuća bijekcija koja nije ni parna ni neparna. Njezina prirodna domena je $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, a slika $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Definirana je formulom:

$$\operatorname{arch} x = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{x+1}{x-1}$$

4.4.9. GRAFOVI AREA FUNKCIJA

