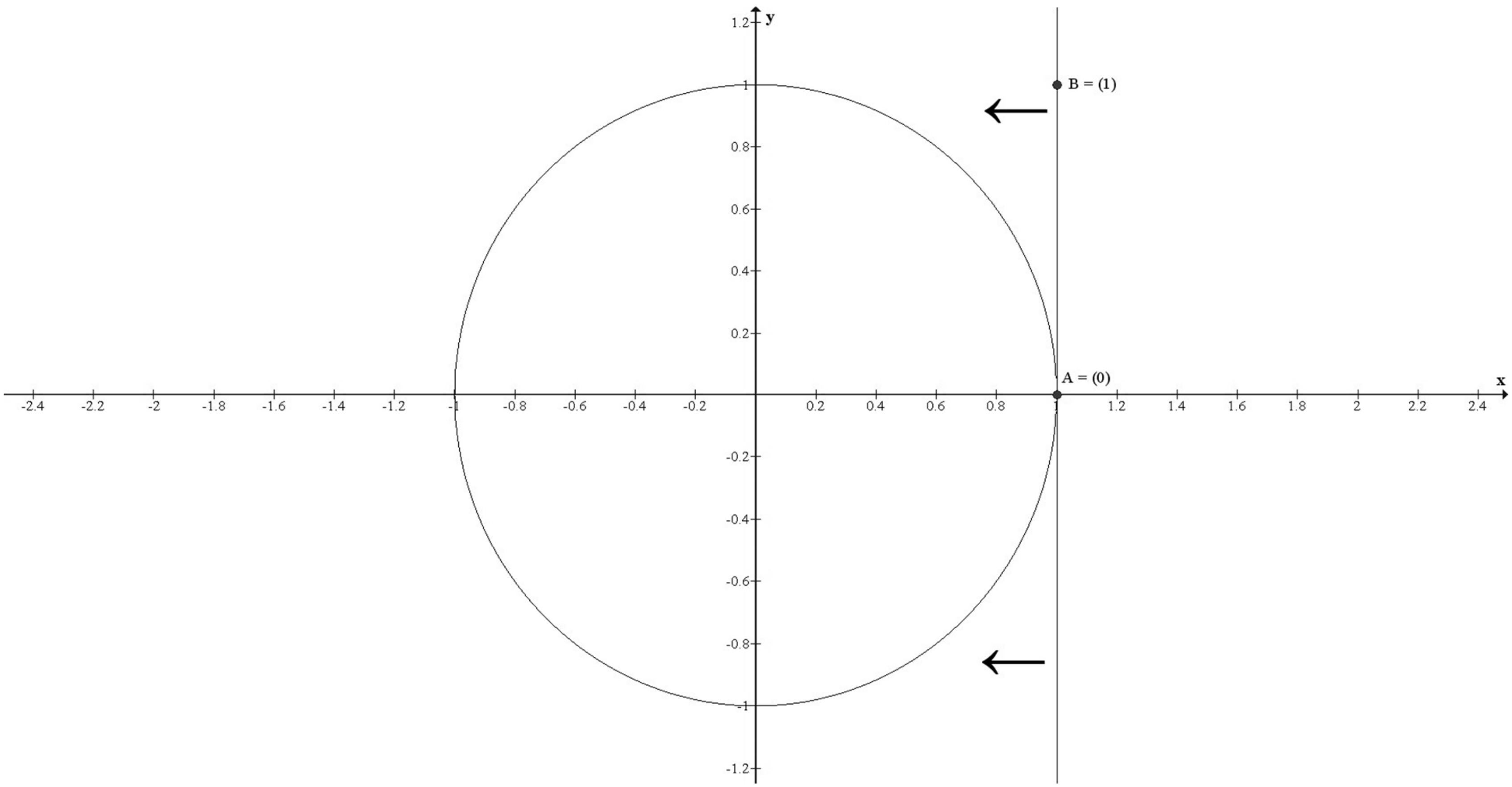
4.3. TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

GRAFOVI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA.
HARMONIJSKA FUNKCIJA.
SUPERPOZICIJA DVAJU TITRANJA.
CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

4.3.1. NAMATANJE PRAVCA NA KRUŽNICU

- Neka su u ravnini zadani pravokutni koordinatni sustav i središnja jedinična kružnica $x^2 + y^2 = 1$.
- U točki kružnice $A = (1,\ 0)$ povučemo tangentu na kružnicu. Ta tangenta je pravac $x = 1$.
- Na povučenom pravcu *organiziramo koordinatni sustav* tako da broju 0 pridružimo točku A, broju 1 točku (1,1) itd.
- "Namatanjem" brojevnoga pravca na kružnicu (pozitivne brojeve "namatamo" u smjeru suprotnom smjeru kretanja kazaljke na satu, dok negativne brojeve "namatamo" u smjeru kretanja kazaljke na satu) *svakom* realnom broju pridružujemo neku točku kružnice.

4.3.1. NAMATANJE PRAVCA NA KRUŽNICU



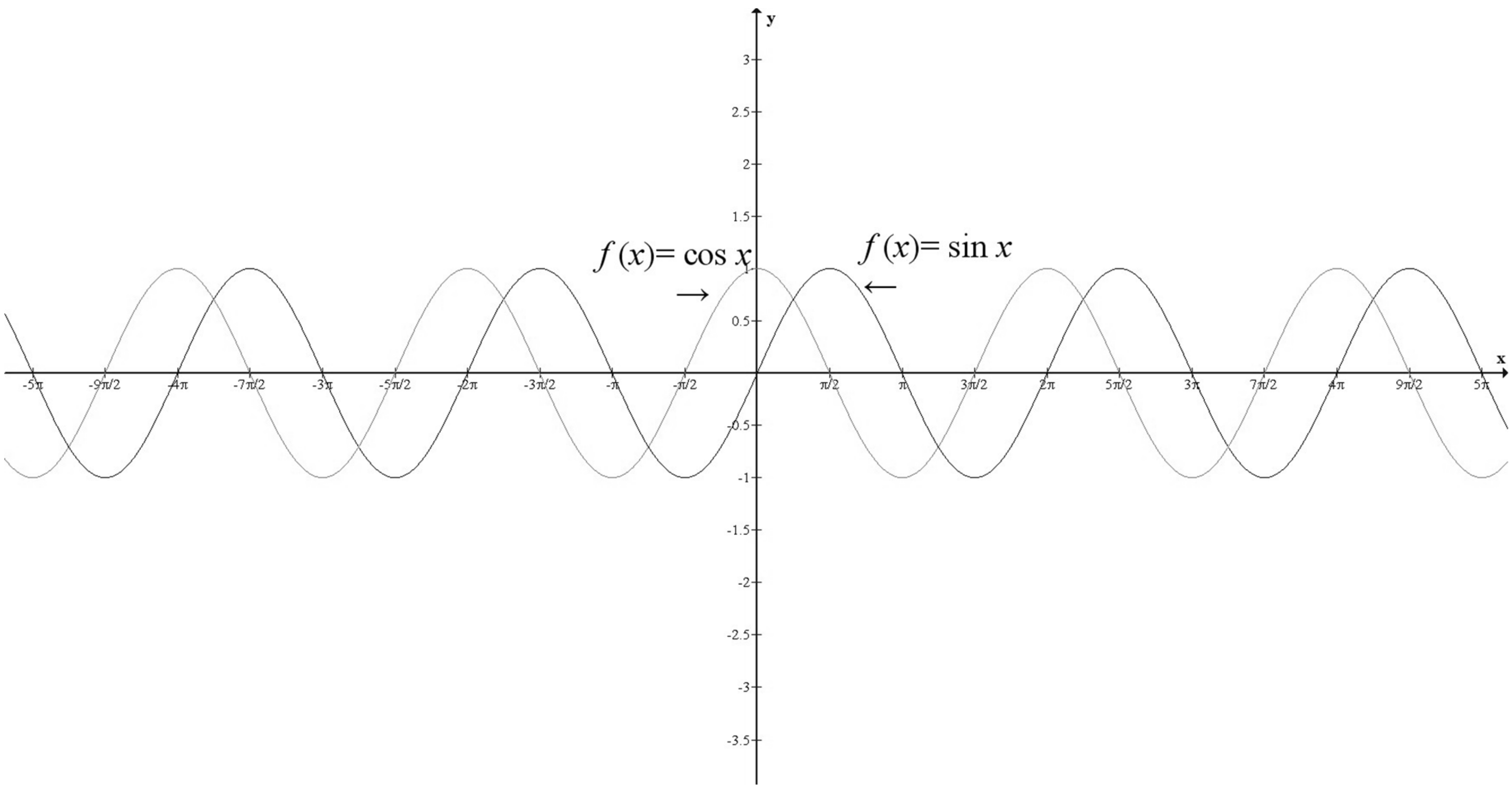
4.3.2. FUNKCIJA KOSINUS

- *Svakom* $x \in \mathbb{R}$ pridružena je *jedinstvena* točka $T = (x_T, y_T)$.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiranu pravilom $f(x) = x_T$ nazivamo **kosinus**. Pišemo: $f(x) = \cos x$.
- Ta funkcija je omeđena (jer vrijedi $-1 \leq f(x) \leq 1$) i parna, a nije bijekcija (npr. vrijedi $f(0) = f(2 \cdot \pi) = 1$).
- Funkcija kosinus je *periodična*. To znači da postoji $P \in \mathbb{R}$, $P \neq 0$, takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi jednakost:
- $\cos x = \cos(x + P)$.
- Broj P naziva se **period** funkcije f. *Najmanji* strogo pozitivan element skupa svih perioda naziva se **temeljni period**.
- Skup svih perioda funkcije kosinus je $S = \{k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Najmanji strogo pozitivan element skupa S je $P_1 = 2 \cdot \pi$. To je temeljni period funkcije kosinus.
- Skup svih nultočaka funkcije kosinus je $N = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4.3.3. FUNKCIJA SINUS

- Funkciju $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiranu pravilom $g(x) = y_T$ nazivamo **sinus**. Pišemo: $g(x) = \sin x$.
- Ta funkcija je omeđena (jer vrijedi $-1 \leq g(x) \leq 1$) i neparna, a nije bijekcija (npr. vrijedi $g(0) = g(\pi) = 0$).
- Funkcija sinus je *periodična.* Skup svih perioda te funkcije je $S = \{k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Najmanji strogo pozitivan element skupa S je $P_1 = 2 \cdot \pi$. To je temeljni period funkcije sinus.
- Skup svih nultočaka funkcije sinus je $N = \{k \cdot \pi: k \in \mathbb{Z}\}$.
- Grafovi funkcija sinus i kosinus prikazani su na sljedećoj slici.

4.3.4. GRAFOVI FUNKCIJA KOSINUS I SINUS



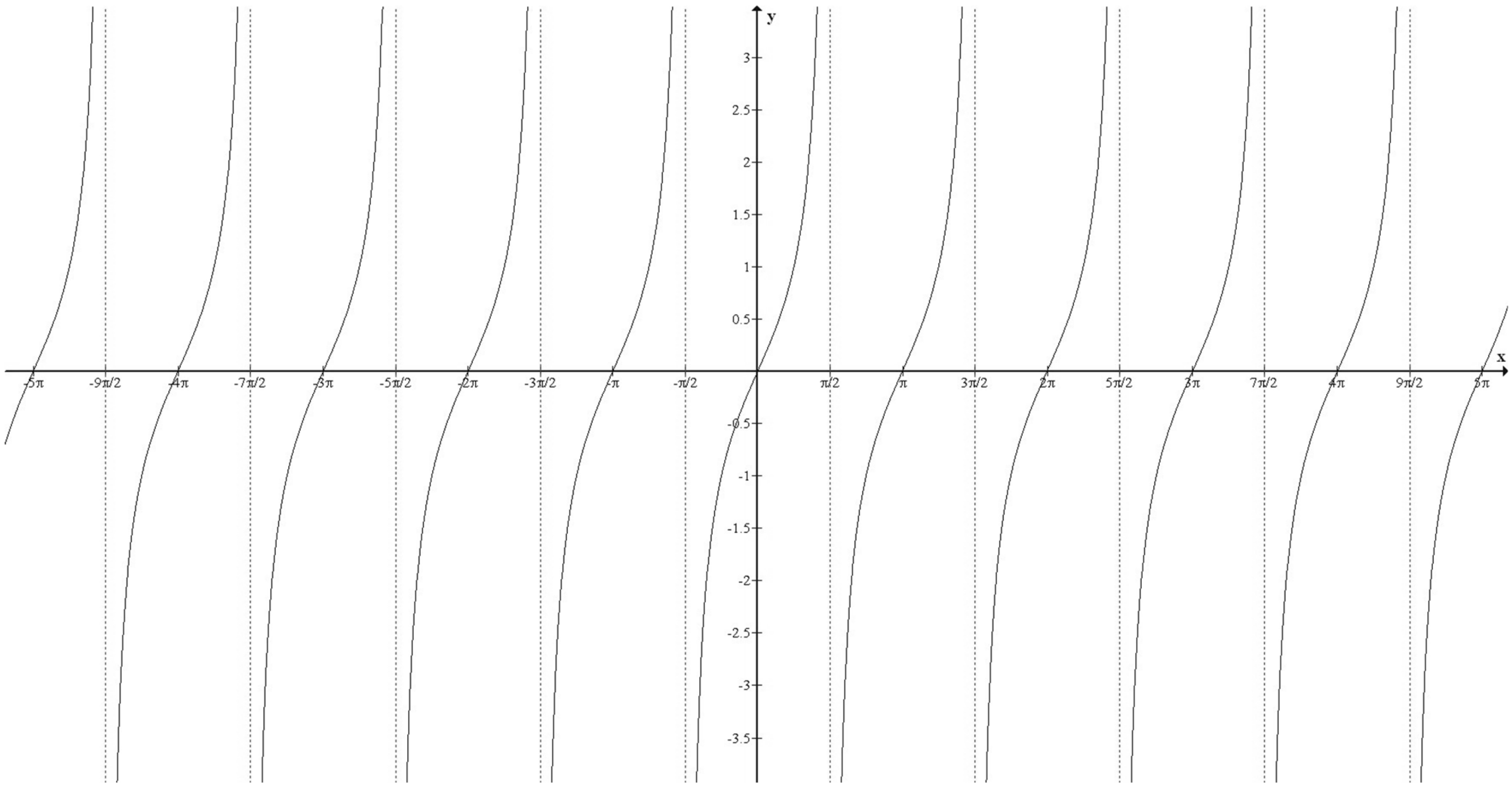
4.3.5. FUNKCIJA TANGENS

- Količnik funkcija sin i cos je funkcija **tangens**:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

- Domena te funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$, a slika skup $\mathbb{R}$.
- Funkcija tangens nije ni omeđena (bilo odozdo, bilo odozgo), ni bijekcija (npr. vrijedi $\operatorname{tg}(0) = \operatorname{tg}(\pi) = 0$).
- Funkcija tangens je neparna i periodična.
- Skup svih njezinih perioda je $S = \{k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Njezin temeljni period je $P = \pi$.
- Skup svih nultočaka funkcije tangens je $N = S = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Graf te funkcije prikazan je na sljedećoj slici.

4.3.6. GRAF FUNKCIJE TANGENS



4.3.7. FUNKCIJA KOTANGENS

- Količnik funkcija cos i sin je funkcija **kotangens**:

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Domena te funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a slika skup $\mathbb{R}$.
- Funkcija kotangens nije ni omeđena (bilo odozdo, bilo odozgo), ni bijekcija (npr. vrijedi jednakost

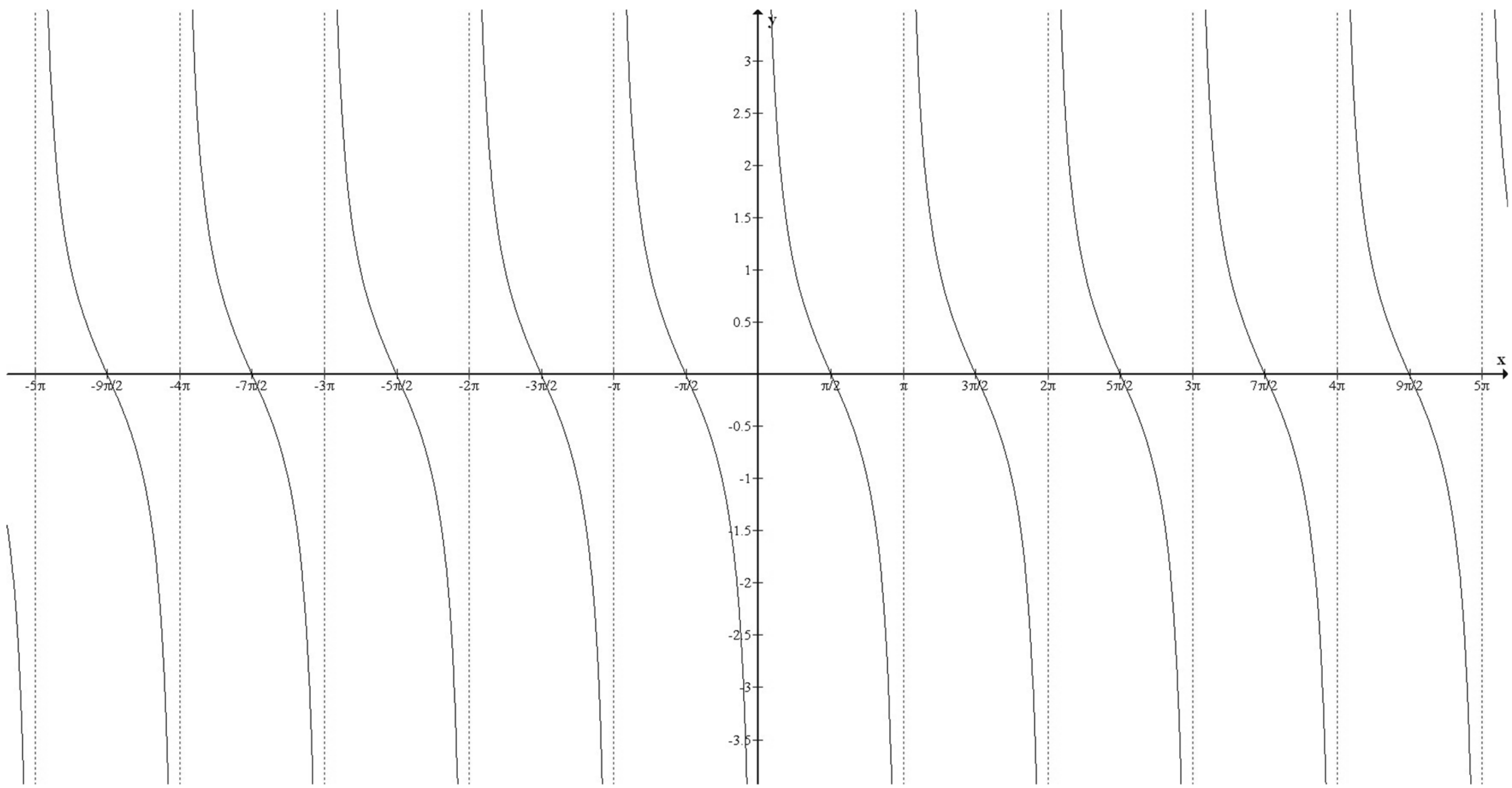
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 0).$$

-
- Funkcija kotangens je neparna i periodična.
- Skup svih njezinih perioda je $S = \{k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Njezin temeljni period je $P = \pi$.
- Skup svih nultočaka funkcije kotangens je

$$N = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Graf te funkcije prikazan je na sljedećoj slici.

4.3.8. GRAF FUNKCIJE KOTANGENS



4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Upravo definirane funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens *nisu* bijekcije. Zbog toga niti jedna od njih nema inverz.
- Međutim, njihove *restrikcije*, tj. dijelovi na pojedinim segmentima jesu bijekcije i imaju inverze. Te funkcije razlikuju se od funkcija sin, cos, tg i ctg isključivo po svojim domenama.
- Konkretno, definiramo funkcije Sin, Cos, Tg i Ctg s:

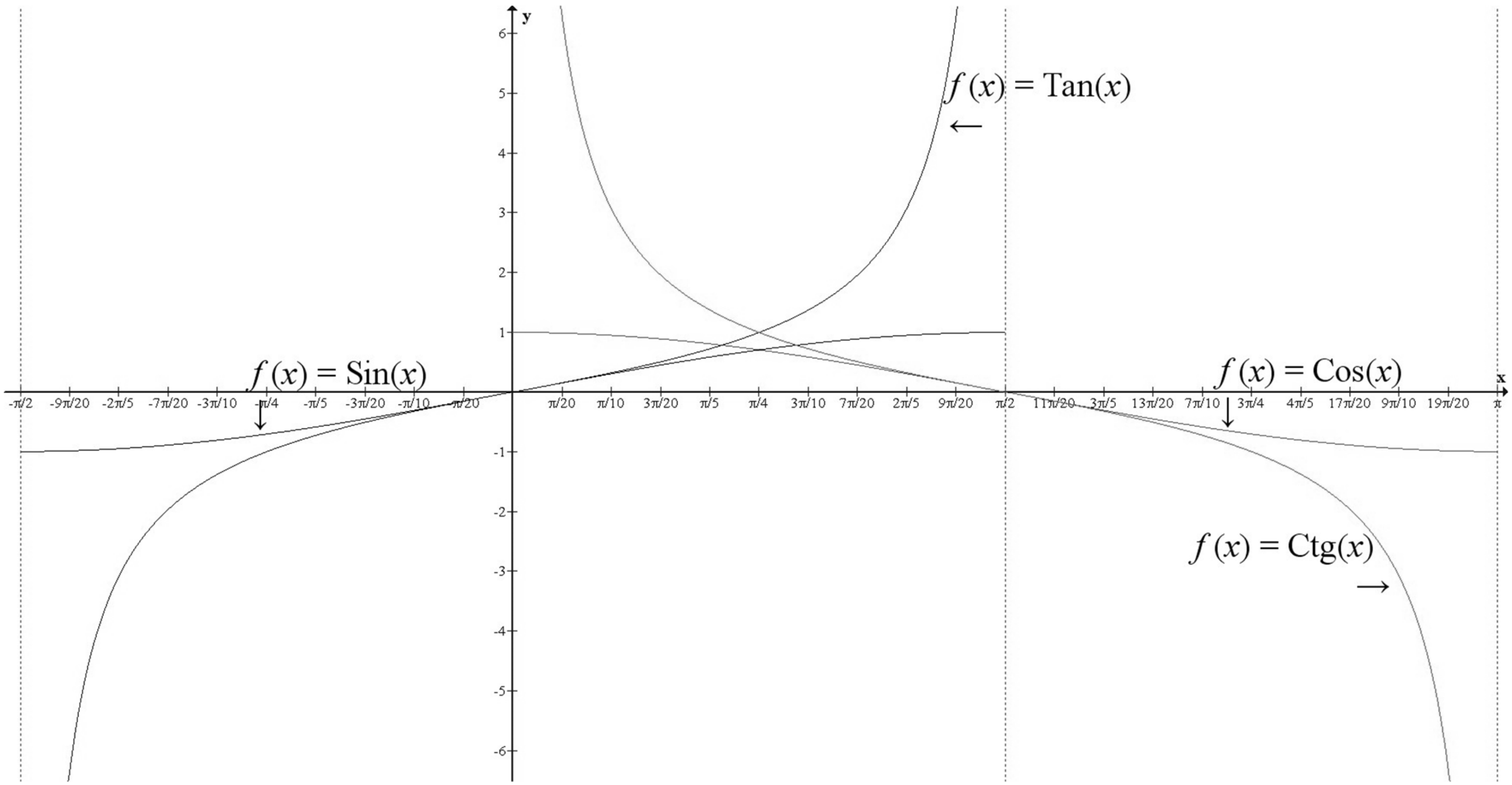
$$\mathrm{Sin} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1],\ \mathrm{Sin}(x) = \sin x;$$

$$\mathrm{Cos} : [0,\ \pi] \to [-1,\ 1],\ \mathrm{Cos}(x) = \cos x;$$

$$\mathrm{Tg} : \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \mathbb{R},\ \mathrm{Tg}(x) = \mathrm{tg}\, x;$$

$$\mathrm{Ctg} : \langle 0,\ \pi\rangle \to \mathbb{R},\ \mathrm{Ctg}(x) = \mathrm{ctg}\, x.$$

4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE



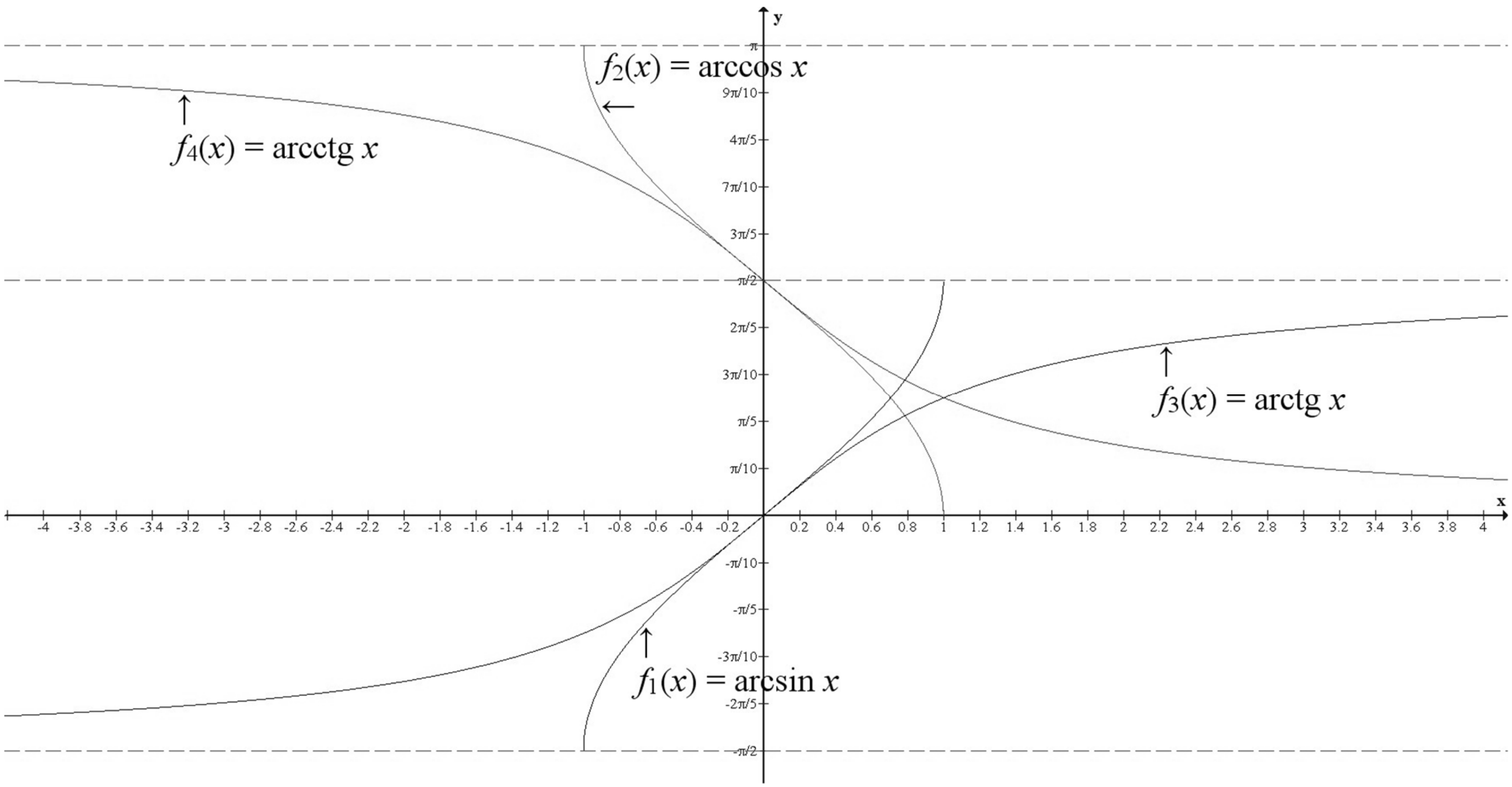
4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Sve četiri funkcije Sin, Cos, Tg i Ctg su bijekcije, pa svaka od njih ima svoj inverz.
- Inverz funkcije Sin je funkcija **arkus sinus** (oznaka: arcsin).
- $f_1(x) = \arcsin x$ ima prirodnu domenu $[-1, 1]$ i sliku $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- To je omeđena, strogo rastuća, neparna i neperiodička funkcija.
- Inverz funkcije Cos je funkcija **arkus kosinus** (oznaka: arccos).
- $f_2(x) = \arccos x$ ima prirodnu domenu $[-1, 1]$ i sliku $[0, \pi]$.
- To je omeđena, strogo padajuća i neperiodička funkcija koja nije ni parna ni neparna.

4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Inverz funkcije Tg je funkcija **arkus tangens** (oznaka: arctg).
- $f_3(x) = \operatorname{arctg} x$ ima prirodnu domenu $\mathbb{R}$ i sliku $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- To je neomeđena, strogo rastuća, neparna i neperiodička funkcija.
- Inverz funkcije Ctg je funkcija **arkus kotangens** (oznaka: arcctg).
- $f_4(x) = \operatorname{arcctg} x$ ima prirodnu domenu $\mathbb{R}$ i sliku $\langle 0, \pi \rangle$.
- To je neomeđena, strogo rastuća i neperiodička funkcija.
- Sva četiri inverza jednim imenom nazivamo **ciklometrijske funkcije**.
- Njihovi grafovi prikazani su na sljedećoj slici.

4.3.10. GRAFOVI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA



4.3.11. TABLICA KARAKTERISTIČNIH VRIJEDNOSTI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA

x	arcsin x	arccos x	arctg x	arcctg x
$-\sqrt{3}$	ne postoji	ne postoji	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\cdot\pi$
-1	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\cdot\pi$	-0.713724	2.284521
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-0.61548	2.186276	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$	-0.463648	2.034444
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0.463648	1.107149
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.61548	0.955317	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0.713724	0.857072
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	ne postoji	ne postoji	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

4.3.12. HARMONIJSKA FUNKCIJA

- Neka su A, ω, $\varphi \in \mathbb{R}$ konstante takve da su:
- A, $\omega > 0$ i $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \to [-A, A]$ definiranu pravilom
- $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$
- nazivamo **harmonijska funkcija**.
- Veličina A naziva se **amplituda**. Veličina ω naziva se **kružna frekvencija**. Veličina φ naziva se **fazni pomak** funkcije f.
- Temeljni period funkcije f jednak je $\dfrac{2 \cdot \pi}{\omega}$.
- Skup svih nultočaka funkcije f je

$$N = \left\{ \frac{k \cdot \pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.3.12. HARMONIJSKA FUNKCIJA

- Harmonijska funkcija najčešće opisuje *valove titranja zvuka*, odnosno *tonove* (pravilne titraje, titraje koji slijede jedan za drugim u jednakim vremenskim razmacima).
- Tada se (strogo pozitivan) broj A može interpretirati kao *jačina tona*, kružna frekvencija ω kao *visina tona*, a fazni pomak φ kao *početna faza tona* koja zapravo predstavlja mjesto izvora tona (početno mjesto neke čestice prije početka titranja).
- Koristeći sve navedene podatke, možemo nacrtati graf bilo koje harmonijske funkcije.
- Jedan od načina je *translatirati* graf osnovne funkcije $f(x) = \sin x$ ulijevo/udesno, pa ga "rastegnuti" prema gore ili dolje.
- Mi ćemo opisati precizniji način koji omogućuje lakše crtanje.

4.3.13. NAPOMENA

- Zbog neparnosti funkcije sinus i identiteta
- $\sin x = \sin(\pi - x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- bez smanjenja općenitosti smo mogli pretpostaviti da su A, $\omega > 0$. (Fazni pomak φ može biti i strogo negativan realan broj.)
- U zadacima u kojima je barem jedna od navedenih veličina strogo negativna, primijenimo navedeni identitet (ako je $\omega < 0$) ili "izlučimo" minus iz zagrade, pa primijenimo navedeni identitet (ako je $A < 0$).

4.3.14. NAPOMENA

- Funkcija $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)$ može se zapisati u obliku harmonijske funkcije
- $$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$$
- pri čemu se veličine A_1 i φ određuju iz jednadžbi:
- $$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2},$$
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{A_1}, \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{A_1}. \end{cases}$$

4.3.15. CRTANJE GRAFA HARMONIJSKE FUNKCIJE

- **Korak 1.** Izračunati temeljni period P harmonijske funkcije.
- **Korak 2.** Ucrtati točke $T_k = \left(-\dfrac{\varphi}{\omega} + \dfrac{k \cdot P}{4}, 0\right)$, $k = 0,\ 2,\ 4$
- (tj. nultočke harmonijske funkcije).
- **Korak 3.** Ucrtati točke

$$T_1 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{P}{4}, A\right) \text{ i } T_3 = \left(-\frac{\varphi}{\omega} + \frac{3 \cdot P}{4}, -A\right)$$

- **Korak 4.** Nacrtati jedan val sinusoide unutar segmenta $[T_0,\ T_4]$. Periodički produljiti taj val na cijeli skup $\mathbb{R}$.

4.3.16. SUPERPOZICIJA DVAJU TITRANJA

- Ako imamo dva titranja
- $f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi_1)$
- $f_2(x) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi_2)$
- koja imaju *iste kružne frekvencije* ω, onda je njihova **superpozicija** (zajedničko djelovanje u istoj točki) ponovno titranje s istom kružnom frekvencijom ω, ali s drugom amplitudom (A) i s drugim faznim pomakom φ.
- Amplitudu A i fazni pomak φ superpozicije određujemo iz jednakosti:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A}, \\ \cos\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}{A}. \end{cases}$$