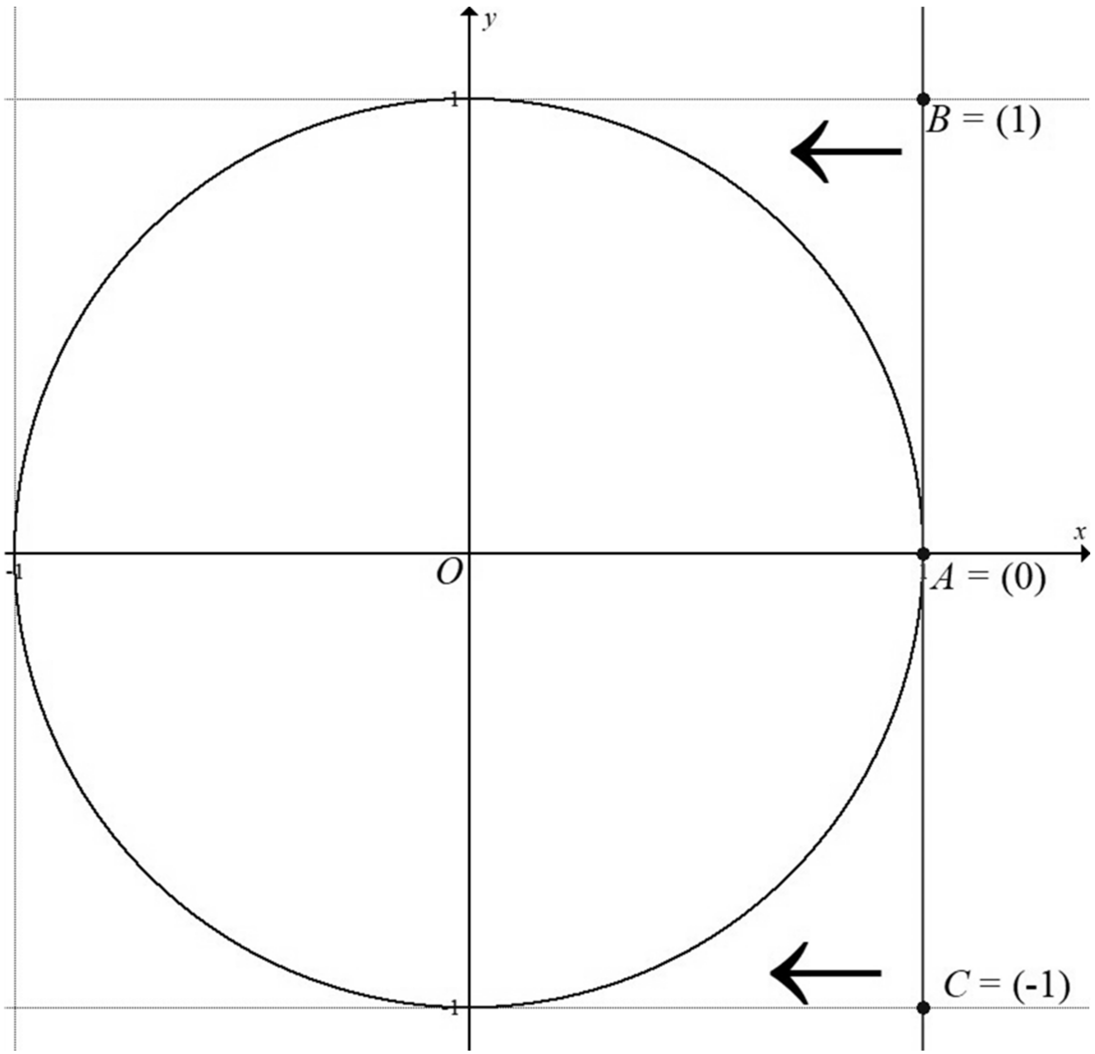
4.3. TRIGONOMETRIJSKE I CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

GRAFOVI TRIGONOMETRIJSKIH FUNKCIJA.
HARMONIJSKA FUNKCIJA.
SUPERPOZICIJA DVAJU TITRANJA.
CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

4.3.1. NAMATANJE PRAVCA NA KRUŽNICU

- Neka su u ravnini zadani pravokutni koordinatni sustav i središnja jedinična kružnica $x^2 + y^2 = 1$.
- U točki kružnice $A = (1, 0)$ povučemo tangentu na kružnicu. Ta tangenta je pravac $x = 1$.
- Na povučenom pravcu *organiziramo koordinatni sustav* tako da broju 0 pridružimo točku A, broju 1 točku (1,1) itd.
- "Namatanjem" brojevnoga pravca na kružnicu (pozitivne brojeve "namatamo" u smjeru suprotnom smjeru kretanja kazaljke na satu, dok negativne brojeve "namatamo" u smjeru kretanja kazaljke na satu) *svakom* realnom broju pridružujemo neku točku kružnice.

4.3.1. NAMATANJE PRAVCA NA KRUŽNICU



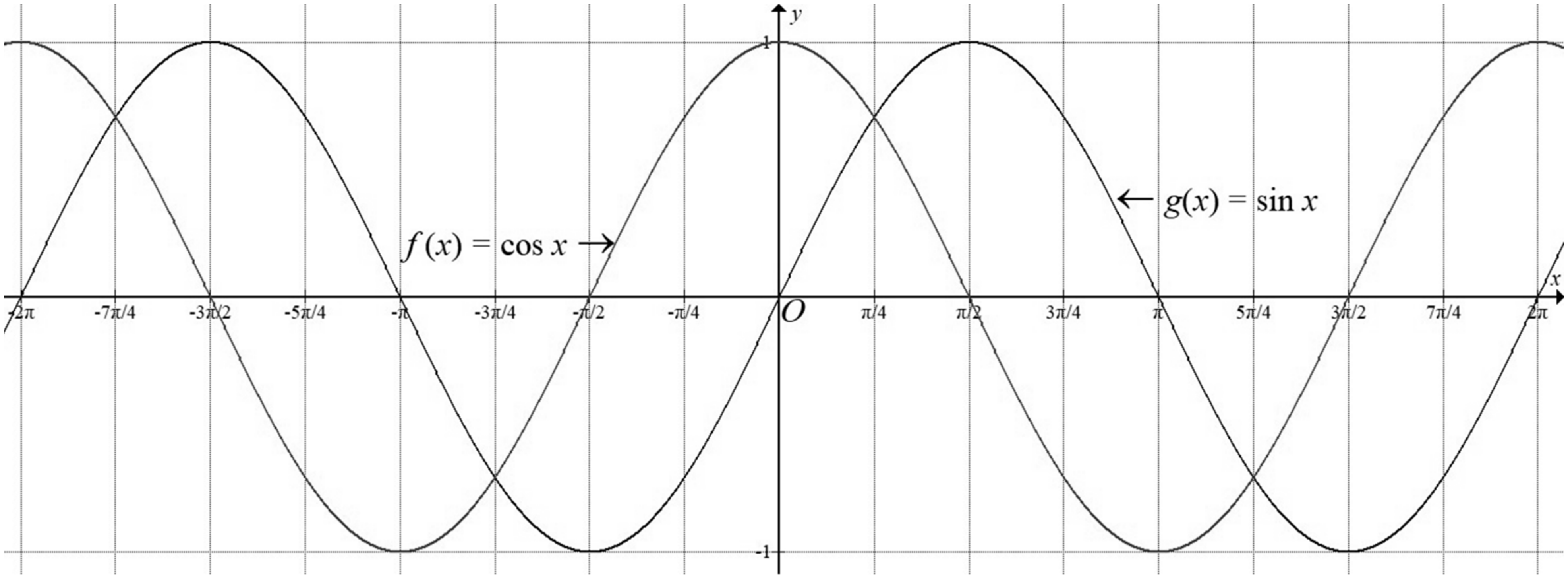
4.3.2. FUNKCIJA KOSINUS

- *Svakom* $x \in \mathbb{R}$ pridružena je *jedinstvena* točka $T = (x_T, y_T)$.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiranu pravilom $f(x) = x_T$ nazivamo **kosinus**. Pišemo: $f(x) = \cos x$.
- Ta funkcija je omeđena (jer vrijedi $-1 \leq f(x) \leq 1$) i parna, a nije bijekcija (npr. vrijedi $f(0) = f(2 \cdot \pi) = 1$).
- Funkcija kosinus je *periodična*. To znači da postoji $P \in \mathbb{R}$, $P \neq 0$, takav da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi jednakost:
- $\cos x = \cos(x + P)$.
- Broj P naziva se **period** funkcije f. *Najmanji* strogo pozitivan element skupa svih perioda naziva se **temeljni period**.
- Skup svih perioda funkcije kosinus je $S = \{k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Najmanji strogo pozitivan element skupa S je $P_1 = 2 \cdot \pi$. To je temeljni period funkcije kosinus.
- Skup svih nultočaka funkcije kosinus je $N = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4.3.3. FUNKCIJA SINUS

- Funkciju $g : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ definiranu pravilom $g(x) = y_T$ nazivamo **sinus**. Pišemo: $g(x) = \sin x$.
- Ta funkcija je omeđena (jer vrijedi $-1 \leq g(x) \leq 1$) i neparna, a nije bijekcija (npr. vrijedi $g(0) = g(\pi) = 0$).
- Funkcija sinus je *periodična.* Skup svih perioda te funkcije je $S = \{k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Najmanji strogo pozitivan element skupa S je $P_1 = 2 \cdot \pi$. To je temeljni period funkcije sinus.
- Skup svih nultočaka funkcije sinus je $N = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Grafovi funkcija sinus i kosinus prikazani su na sljedećoj slici.

4.3.4. GRAFOVI FUNKCIJA KOSINUS I SINUS



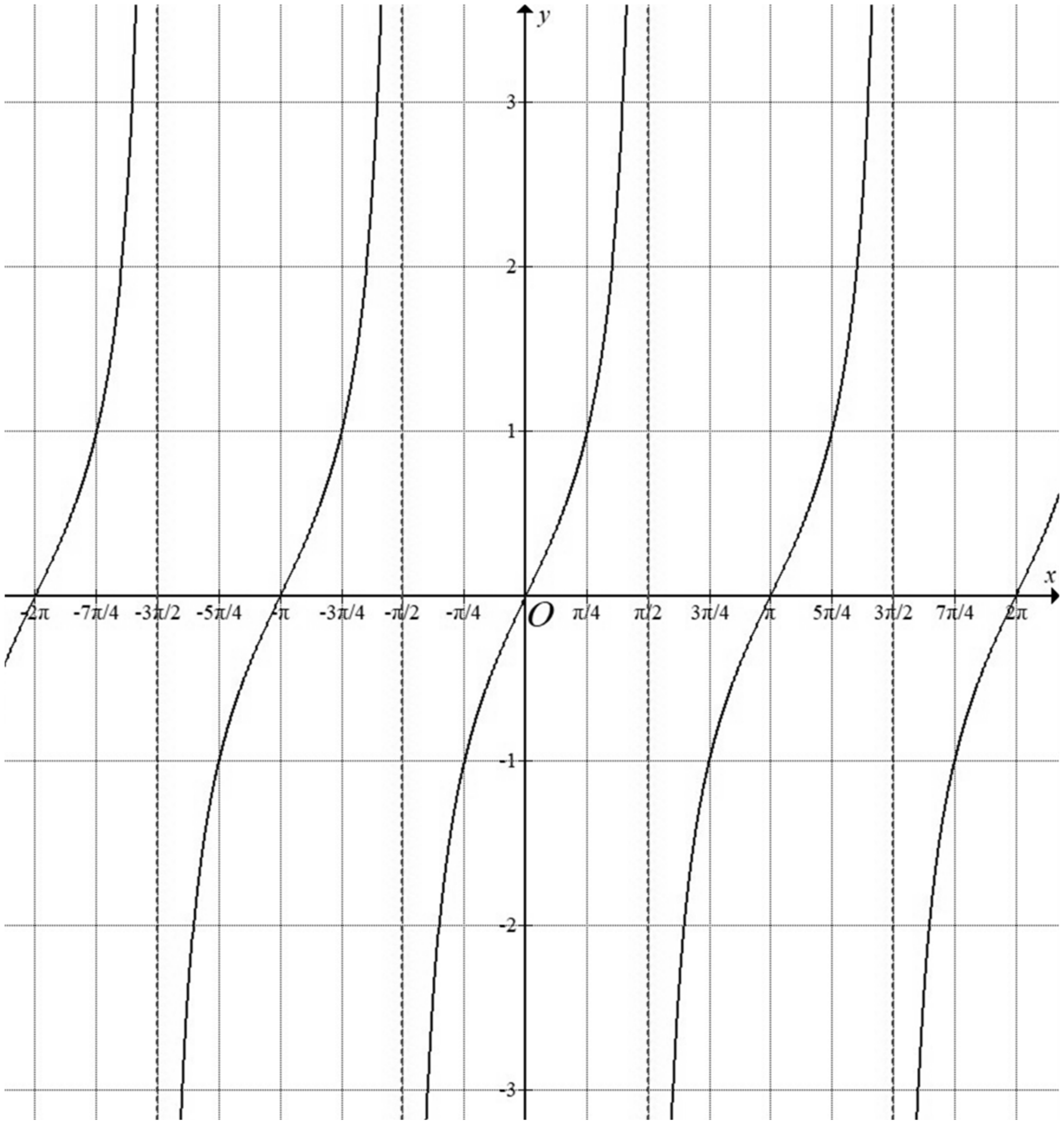
4.3.5. FUNKCIJA TANGENS

- Količnik funkcija sin i cos je funkcija **tangens**:

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

- Domena te funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \left\{ (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$, a slika skup $\mathbb{R}$.
- Funkcija tangens nije ni omeđena (bilo odozdo, bilo odozgo), ni bijekcija (npr. vrijedi $\operatorname{tg}(0) = \operatorname{tg}(\pi) = 0$).
- Funkcija tangens je neparna i periodična.
- Skup svih njezinih perioda je $S = \{k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. Njezin temeljni period je $P = \pi$.
- Skup svih nultočaka funkcije tangens je $N = S = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.
- Graf te funkcije prikazan je na sljedećoj slici.

4.3.6. GRAF FUNKCIJE TANGENS



4.3.7. FUNKCIJA KOTANGENS

- Količnik funkcija cos i sin je funkcija **kotangens**:

$$\operatorname{ctg} x := \frac{\cos x}{\sin x}$$

- Domena te funkcije je skup $\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$, a slika skup $\mathbb{R}$.
- Funkcija kotangens nije ni omeđena (bilo odozdo, bilo odozgo), ni bijekcija (npr. vrijedi jednakost

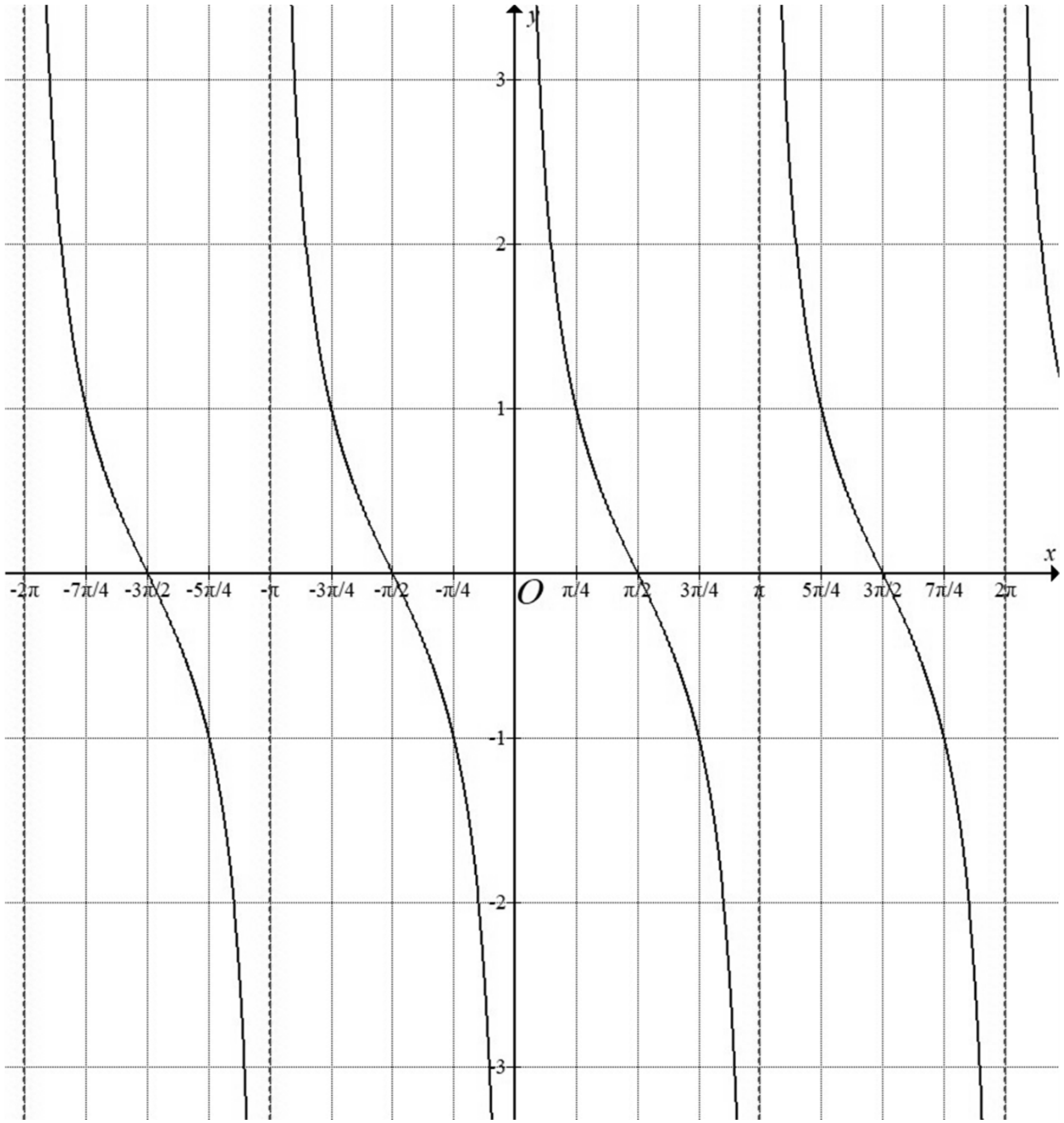
$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = 0.$$

- Funkcija kotangens je neparna i periodična.
- Skup svih njezinih perioda je $S = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Njezin temeljni period je $P = \pi$.
- Skup svih nultočaka funkcije kotangens je

$$N = \left\{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- Graf te funkcije prikazan je na sljedećoj slici.

4.3.8. GRAF FUNKCIJE KOTANGENS



4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Upravo definirane funkcije sinus, kosinus, tangens i kotangens *nisu* bijekcije. Zbog toga niti jedna od njih nema inverz.
- Međutim, njihove *restrikcije*, tj. dijelovi na pojedinim segmentima jesu bijekcije i imaju inverze. Te funkcije razlikuju se od funkcija sin, cos, tg i ctg isključivo po svojim domenama.
- Konkretno, definiramo funkcije Sin, Cos, Tg i Ctg s:

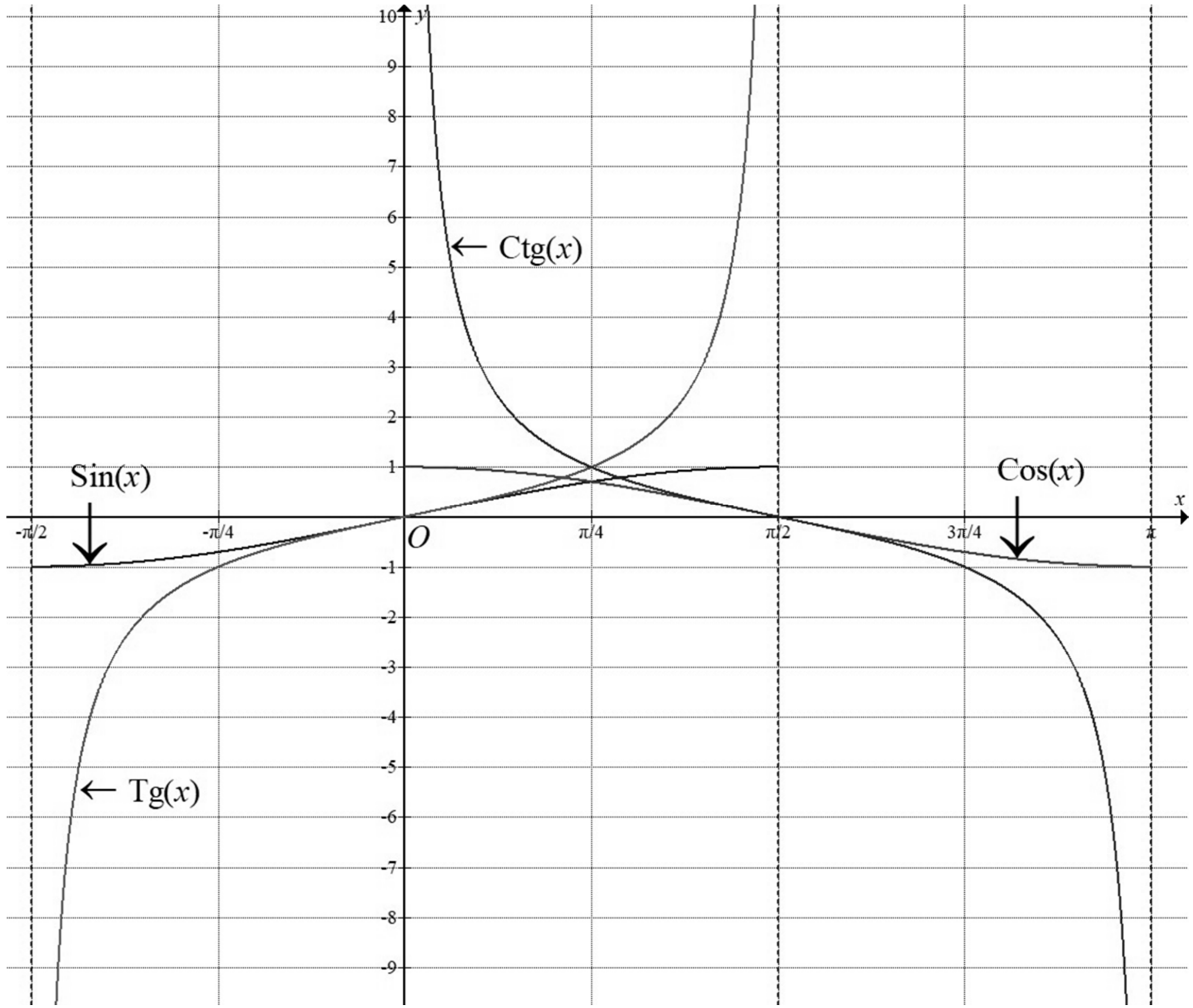
$$\mathrm{Sin} : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,\ 1],\ \mathrm{Sin}(x) = \sin x;$$

$$\mathrm{Cos} : [0,\ \pi] \to [-1,\ 1],\ \mathrm{Cos}(x) = \cos x;$$

$$\mathrm{Tg} : \left\langle\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle \to \mathbb{R},\ \mathrm{Tg}(x) = \mathrm{tg}\, x;$$

$$\mathrm{Ctg} : \langle 0,\ \pi\rangle \to \mathbb{R},\ \mathrm{Ctg}(x) = \mathrm{ctg}\, x.$$

4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE



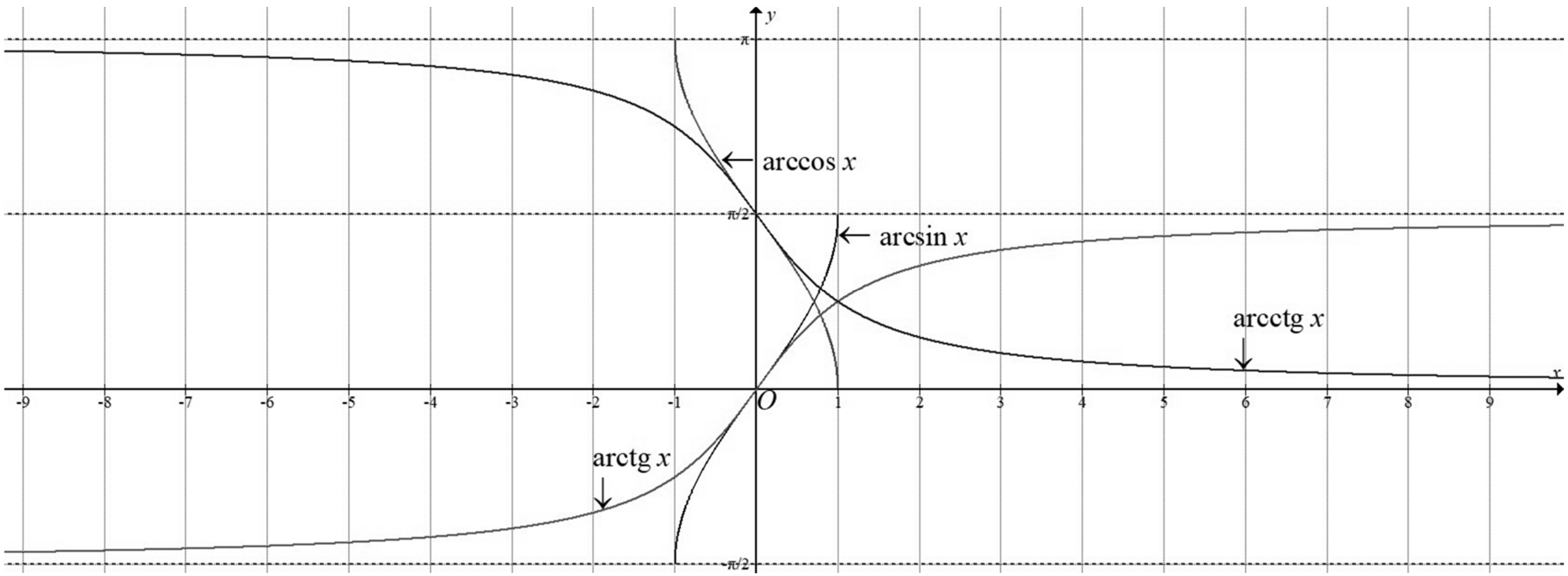
4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Sve četiri funkcije Sin, Cos, Tg i Ctg su bijekcije, pa svaka od njih ima svoj inverz.
- Inverz funkcije Sin je funkcija **arkus sinus** (oznaka: arcsin).
- $f_1(x) = \arcsin x$ ima prirodnu domenu $[-1, 1]$ i sliku $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- To je omeđena, strogo rastuća, neparna i neperiodička funkcija.
- Inverz funkcije Cos je funkcija **arkus kosinus** (oznaka: arccos).
- $f_2(x) = \arccos x$ ima prirodnu domenu $[-1, 1]$ i sliku $[0, \pi]$.
- To je omeđena, strogo padajuća i neperiodička funkcija koja nije ni parna ni neparna.

4.3.9. CIKLOMETRIJSKE FUNKCIJE

- Inverz funkcije Tg je funkcija **arkus tangens** (oznaka: arctg).
- $f_3(x) = \text{arctg } x$ ima prirodnu domenu $\mathbb{R}$ i sliku $\left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.
- To je omeđena, strogo rastuća, neparna i neperiodička funkcija.
- Inverz funkcije Ctg je funkcija **arkus kotangens** (oznaka: arcctg).
- $f_4(x) = \text{arcctg } x$ ima prirodnu domenu $\mathbb{R}$ i sliku $\langle 0, \pi \rangle$.
- To je omeđena, strogo rastuća i neperiodička funkcija.
- Sva četiri inverza jednim imenom nazivamo **ciklometrijske funkcije**.
- Njihovi grafovi prikazani su na sljedećoj slici.

4.3.10. GRAFOVI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA



4.3.11. TABLICA KARAKTERISTIČNIH VRIJEDNOSTI CIKLOMETRIJSKIH FUNKCIJA

x	arcsin x	arccos x	arctg x	arcctg x
$-\sqrt{3}$	ne postoji	ne postoji	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\cdot\pi$
-1	$\frac{-\pi}{2}$	π	$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\cdot\pi$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{5}{6}\cdot\pi$	-0.713724	2.284521
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-0.61548	2.186276	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{-\pi}{6}$	$\frac{2}{3}\cdot\pi$	-0.463648	2.034444
0	0	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0.463648	1.107149
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0.61548	0.955317	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	0.713724	0.857072
1	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	ne postoji	ne postoji	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$

4.3.12. HARMONIJSKA FUNKCIJA

- Neka su A, ω, φ ∈ ℝ konstante takve da su:
- A, $\omega > 0$ i $\varphi \in \langle -\pi, \pi]$.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \to [-A, A]$ definiranu pravilom
- $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$
- nazivamo **harmonijska funkcija**.
- Veličina A naziva se **amplituda**. Veličina ω naziva se **kružna frekvencija**. Veličina φ naziva se **fazni pomak** funkcije f.
- Temeljni period funkcije f jednak je $\frac{2 \cdot \pi}{\omega}$.
- Skup svih nultočaka funkcije f je

$$N = \left\{ \frac{k \cdot \pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

4.3.12. HARMONIJSKA FUNKCIJA

- Harmonijska funkcija najčešće opisuje *valove titranja zvuka*, odnosno *tonove* (pravilne titraje, titraje koji slijede jedan za drugim u jednakim vremenskim razmacima).
- Tada se (strogo pozitivan) broj A može interpretirati kao *jačina tona*, kružna frekvencija ω kao *visina tona*, a fazni pomak φ kao *početna faza tona* koja zapravo predstavlja mjesto izvora tona (početno mjesto neke čestice prije početka titranja).
- Koristeći sve navedene podatke, možemo nacrtati graf bilo koje harmonijske funkcije.
- Jedan od načina je *translatirati* graf osnovne funkcije $f(x) = \sin x$ ulijevo/udesno, pa ga "rastegnuti" prema gore ili dolje.
- Mi ćemo opisati precizniji način koji omogućuje lakše crtanje.

4.3.13. NAPOMENA

- Zbog neparnosti funkcije sinus i identiteta
- $\sin x = \sin(\pi - x)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$,
- bez smanjenja općenitosti smo mogli pretpostaviti da su A, $\omega > 0$. (Fazni pomak φ može biti i strogo negativan realan broj.)
- U zadacima u kojima je barem jedna od navedenih veličina strogo negativna, primijenimo navedeni identitet (ako je $\omega < 0$) ili "izlučimo" minus iz zagrade, pa primijenimo navedeni identitet (ako je $A < 0$).

4.3.14. NAPOMENA

- Funkcija $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x) + B \cdot \cos(\omega \cdot x)$ može se zapisati u obliku harmonijske funkcije
- $$f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi)$$
- pri čemu se veličine A_1 i φ određuju iz jednadžbi:
- $$A_1 = \sqrt{A^2 + B^2},$$
$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{A}{A_1}, \\ \sin\varphi = \dfrac{B}{A_1}. \end{cases}$$

4.3.15. CRTANJE GRAFA HARMONIJSKE FUNKCIJE

- Korak 1. Izračunati temeljni period P harmonijske funkcije.
- Korak 2. Ucrtati točke $T_k = \left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{k \cdot P}{4}, 0 \right), \ k = 0,\ 2,\ 4$
- (tj. nultočke harmonijske funkcije).
- Korak 3. Ucrtati točke

$$T_1 = \left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{P}{4}, A \right) \ \text{ i } \ T_3 = \left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{3 \cdot P}{4}, -A \right)$$

- Korak 4. Nacrtati jedan val sinusoide unutar segmenta $[T_0,\ T_4]$. Periodički produljiti taj val na cijeli skup $\mathbb{R}$.

4.3.16. SUPERPOZICIJA DVAJU TITRANJA

- Ako imamo dva titranja
- $f_1(x) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi_1)$
- $f_2(x) = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi_2)$
- koja imaju *iste kružne frekvencije* ω, onda je njihova **superpozicija** (zajedničko djelovanje u istoj točki) ponovno titranje s istom kružnom frekvencijom ω, ali s drugom amplitudom (A) i s drugim faznim pomakom φ.
- Amplitudu A i fazni pomak φ superpozicije određujemo iz jednakosti:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

$$\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \sin\varphi_2}{A}, \\ \cos\varphi = \dfrac{A_1 \cdot \cos\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2}{A}. \end{cases}$$

1. Pokažite da se prilikom definiranja pravila funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ bez smanjenja općenitosti može pretpostaviti da su $A,\ \omega > 0.$

Rješenje: Ako je $A = 0$, onda je $h(t) = 0$, tj. konstantna funkcija.

Ako je $\omega = 0$, onda je $h(t) = A \cdot \sin \varphi$. Ta funkcija je također konstantna.

Zbog toga možemo pretpostaviti da su $A,\ \omega \neq 0.$ Razlikovat ćemo točno tri različita slučaja. U njihovu razmatranju koristit ćemo identitet

$$\sin(\pi - t) = \sin t,\ \forall t \in \mathbb{R},$$

te neparnost funkcije sinus, tj. identitet

$$\sin(-t) = -\sin t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Slučaj I. $A < 0,\ \omega > 0.$ Tada imamo:

$$\begin{aligned} h(t) &= (-1) \cdot A \cdot (-1) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \\ &= ((-1) \cdot A) \cdot \sin(-\omega \cdot t - \varphi) = \\ &= ((-1) \cdot A) \cdot \sin(\pi - (-\omega \cdot t - \varphi)) = \\ &= ((-1) \cdot A) \cdot \sin(\omega \cdot t + \pi + \varphi)). \end{aligned}$$

Preostaje definirati

$$\begin{aligned} A_1 &:= (-1) \cdot A, \\ \varphi_1 &= \pi + \varphi. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke $A < 0$ vrijedi $A_1 > 0.$ Tako smo dobili željeni oblik

$$h(t) = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1)),\ \text{gdje su } A_1, \omega > 0.$$

Slučaj II. $A > 0,\ \omega < 0.$ Tada imamo:

$$\begin{aligned} h(t) &= A \cdot \sin(\pi - (\omega \cdot t + \varphi)) = \\ &= A \cdot \sin(-\omega \cdot t + \pi - \varphi). \end{aligned}$$

Preostaje definirati

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= -\omega, \\ \varphi_1 &:= \pi - \varphi. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke $\omega < 0$ vrijedi $\omega_1 > 0.$ Tako smo dobili željeni oblik

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)\text{, gdje su } A, \omega_1 > 0.$$

Slučaj III. $A, \omega < 0$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} h(t) &= (-1) \cdot A \cdot (-1) \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = \\ &= ((-1) \cdot A) \cdot \sin(-\omega \cdot t - \varphi). \end{aligned}$$

Preostaje definirati

$$\begin{aligned} A_1 &:= (-1) \cdot A, \\ \omega_1 &:= -\omega, \\ \varphi_1 &:= -\varphi. \end{aligned}$$

Zbog pretpostavke $A, \omega < 0$ vrijedi $A_1, \omega_1 > 0$. Tako smo dobili željeni oblik

$$h(t) = A_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1)\text{, gdje su } A, \omega_1 > 0.$$

Time smo iscrpli sve moguće slučajeve i riješili postavljeni zadatak.

Napomena 1. Koristeći $2 \cdot \pi -$periodičnost funkcije sinus, može se pokazati da se bez smanjenja općenitosti može pretpostaviti da je $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$, tj. da se pravilo funkcije h uvijek može svesti na oblik u kojemu će vrijediti $A, \omega > 0$, $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$.

2. a) Pokažite da graf harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$, pri čemu su $A,\ \omega > 0$ i $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$, prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini ako i samo ako je $\varphi = 0$.

Rješenje: ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $\varphi = 0$. Tada je

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

pa je

$$\begin{aligned} h(0) &= A \cdot \sin(\omega \cdot 0) = \\ &= A \cdot \sin(0) = \\ &= A \cdot 0 = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, graf funkcije *h* prolazi točkom $(0, h(0)) = (0, 0)$, tj. ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, što smo i tvrdili.

($\Rightarrow$) Pretpostavimo da graf funkcije *h* prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. To znači da je $h(0) = 0$. Uvrštavanjem $t = 0$ i $h(t) = 0$ u pravilo funkcije *h* dobivamo:

$$\begin{aligned} &0 = A \cdot \sin(\omega \cdot 0 + \varphi), \quad / : A > 0 \\ &\sin \varphi = 0, \\ &\varphi = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Prema zahtjevu zadatka mora vrijediti $\varphi \in \langle -\pi, \pi \rangle$. Tako dalje imamo:

$$\begin{aligned} &-\pi < k \cdot \pi < \pi, \quad / : \pi \\ &-1 < k < 1. \end{aligned}$$

Posljednja nejednadžba ima *jedinstveno* rješenje u skupu cijelih brojeva i to je rješenje $k = 0$. Zbog toga je

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 \cdot \pi = \\ &= 0, \end{aligned}$$

što smo i tvrdili.

b) Neka su t_0 *bilo koja* nultočka i T temeljni period funkcije h iz a) podzadatka. Odredite $h\left(t_0 \pm \frac{T}{4}\right)$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje:

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
h\left(t_0 \pm \frac{T}{4}\right) &= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(t_0 \pm \frac{T}{4}\right) + \varphi\right) = \\
&= A \cdot \sin\left((\omega \cdot t_0 + \varphi) \pm \omega \cdot \frac{T}{4}\right) = \\
&= A \cdot \sin\left((\omega \cdot t_0 + \varphi) \pm \frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \\
&= A \cdot \sin\left((\omega \cdot t_0 + \varphi) \pm \frac{\pi}{2}\right) = \\
&= A \cdot \left(\sin(\omega \cdot t_0 + \varphi) \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \pm \cos(\omega \cdot t_0 + \varphi) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\right) = \\
&= \pm A \cdot \cos(\omega \cdot t_0 + \varphi).
\end{aligned}$$

Prema pretpostavci, t_0 je nultočka funkcije h. To znači da je

$$\begin{aligned}
&A \cdot \sin(\omega \cdot t_0 + \varphi) = 0, \quad / : A > 0 \\
&\sin(\omega \cdot t_0 + \varphi) = 0.
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned}
|\cos(\omega \cdot t_0 + \varphi)| &= \sqrt{1 - \sin^2(\omega \cdot t_0 + \varphi)} = \\
&= \sqrt{1 - (\sin(\omega \cdot t_0 + \varphi))^2} = \\
&= \sqrt{1 - 0^2} = \\
&= \sqrt{1 - 0} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Tako je i

$$\left|h\left(t_0 \pm \frac{T}{4}\right)\right| = |\pm A \cdot \cos(\omega \cdot t_0 + \varphi)| =$$

$$
\begin{aligned}
&= |\underbrace{A}_{>0}| \cdot \underbrace{|\cos(\omega \cdot t_0 + \varphi)|}_{=1} = \\
&= A \cdot 1 = \\
&= A \Rightarrow
\end{aligned}
$$

$$h\left(t_0 \pm \frac{T}{4}\right) \in \{-A, A\}.$$

3. Definirajmo *udaljenost* ili *razmak* (oznaka: *d*) između $x, y \in \mathbb{R}$ kao

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Neka je

$$h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi), \text{ pri čemu su } A,\ \omega > 0.$$

a) Pokažite da je udaljenost između dviju uzastopnih nultočaka funkcije *h* jednaka polovici temeljnoga perioda funkcije *h*.

Rješenje: Nađimo najprije skup svih nultočaka zadane funkcije. U tu svrhu riješimo jednadžbu $h(t) = 0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = 0, \quad / : A \\
&\sin(\omega \cdot t + \varphi) = 0, \\
&\omega \cdot t + \varphi = k \cdot \pi, \\
&\omega \cdot t = k \cdot \pi - \varphi, \quad / : \omega > 0 \\
&t = \frac{k \cdot \pi - \varphi}{\omega},\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih nultočaka je

$$N(h) = \left\{ \frac{k \cdot \pi - \varphi}{\omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dvije uzastopne nultočke dobivamo uzimajući *bilo koji* cijeli broj k_0 te ili njegov prethodnik $k_0 - 1$ ili njegov sljedbenik $k_0 + 1$. U prvom slučaju dobivamo:

$$\begin{aligned}
t_0 &= \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi}{\omega}, \\
t_1 &= \frac{(k_0 - 1) \cdot \pi - \varphi}{\omega}, \\
d(t_0, t_1) &= \left| \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi}{\omega} - \frac{(k_0 - 1) \cdot \pi - \varphi}{\omega} \right| = \\
&= \left| \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi - (k_0 - 1) \cdot \pi + \varphi}{\omega} \right| = \\
&= \left| \frac{\pi}{\omega} \right| = \\
&= \frac{\pi}{\omega},
\end{aligned}$$

dok u drugom slučaju dobivamo:

$$t_0 = \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi}{\omega}$$

$$t_1 = \frac{(k_0+1) \cdot \pi - \varphi}{\omega},$$

$$\begin{aligned} d(t_0, t_1) &= \left| \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi}{\omega} - \frac{(k_0+1) \cdot \pi - \varphi}{\omega} \right| = \\ &= \left| \frac{k_0 \cdot \pi - \varphi - (k_0+1) \cdot \pi + \varphi}{\omega} \right| = \\ &= \left| \frac{-\pi}{\omega} \right| = \\ &= -\left(\frac{-\pi}{\omega} \right) = \\ &= \frac{\pi}{\omega}. \end{aligned}$$

Dakle, u oba je slučaja

$$d(t_0, t_1) = \frac{\pi}{\omega}.$$

Desne strane jednakosti

$$\begin{cases} d(t_0, t_1) = \dfrac{\pi}{\omega}, \\ \dfrac{T}{2} = \dfrac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

su jednake, pa takve moraju biti i lijeve strane tih jednakosti. Odatle slijedi

$$d(t_0, t_1) = \frac{T}{2},$$

što smo i tvrdili.

b) Pokažite da je udaljenost vrijednosti nezavisne varijable t za koje funkcija h poprima svoje *uzastopne* ekstremne vrijednosti jednaka polovici temeljnoga perioda funkcije h.

Napomena 2. Ako su $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ takvi da za $t = t_1$ funkcija h poprima svoju najmanju /najveću vrijednost, za $t = t_2$ svoju najveću/najmanju vrijednost te ako h strogo raste/pada na intervalu $\langle t_1, t_2 \rangle$, onda kažemo da su spomenute ekstremne vrijednosti *uzastopne*.

Rješenje: Nađimo najprije sve vrijednosti nezavisne varijable za koje funkcija h postiže svoju najveću vrijednost. Ta je vrijednost jednaka amplitudi A, pa treba riješiti jednadžbu $h(t) = A$ po nepoznanici t. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&h(t) = A, \\
&A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = A, \quad / : A > 0 \\
&\sin(\omega \cdot t + \varphi) = 1, \\
&\omega \cdot t + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi, \\
&\omega \cdot t = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi - \varphi, \quad / : \omega > 0 \\
&t = \frac{\frac{\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi - \varphi}{\omega} = \\
&\quad = \frac{\pi + 4 \cdot k \cdot \pi - 2 \cdot \varphi}{2 \cdot \omega} = \\
&\quad = \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k + 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega}, \ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja jednadžbe $h(t) = A$ je

$$S_1 = \left\{ \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k + 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Sada nađimo sve vrijednosti nezavisne varijable za koje funkcija h postiže svoju najmanju vrijednost. Ta je vrijednost suprotna amplitudi A, pa treba riješiti jednadžbu $h(t) = -A$ po nepoznanici t. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&h(t) = -A, \\
&A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -A, \quad / : A > 0 \\
&\sin(\omega \cdot t + \varphi) = -1,
\end{aligned}$$

$$\omega \cdot t + \varphi = \frac{-\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi,$$

$$\omega \cdot t = \frac{-\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi - \varphi, \quad / : \omega > 0$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\frac{-\pi}{2} + 2 \cdot k \cdot \pi - \varphi}{\omega} = \\ &= \frac{-\pi + 4 \cdot k \cdot \pi - 2 \cdot \varphi}{2 \cdot \omega} = \\ &= \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k - 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega}, \ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja jednadžbe $h(t) = -A$ je

$$S_2 = \left\{ \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k - 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Primjećujemo da u obama skupovima na (konstantan) član $(-2) \cdot \varphi$ dodajemo neki višekratnik broja π i dobiveni zbroj potom dijelimo (konstantnom) ω. To znači da, ako u obama skupovima odaberemo *istu* vrijednost varijable k, onda ćemo dobiti dvije vrijednosti nezavisne varijable t za koje se postižu *uzastopne* ekstremne vrijednosti.

Ako je, dakle, k_0 proizvoljan, ali fiksiran cijeli broj, onda se za:

- $t_1 = \dfrac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k_0 + 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega}$ postiže najveća vrijednost funkcije h;
- $t_2 = \dfrac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k_0 - 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega}$ postiže najmanja vrijednost funkcije h

i te dvije ekstremne vrijednosti su uzastopne. Udaljenost pripadnih vrijednosti nezavisne varijable t jednaka je:

$$\begin{aligned} d(t_1, t_2) &= \left| \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k_0 + 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} - \left(\frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k_0 - 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} \right) \right| = \\ &= \left| \frac{-2 \cdot \varphi + (4 \cdot k_0 + 1) \cdot \pi + 2 \cdot \varphi - (4 \cdot k_0 - 1) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} \right| = \\ &= \left| \frac{(4 \cdot k_0 + 1 - (4 \cdot k_0 - 1)) \cdot \pi}{2 \cdot \omega} \right| = \\ &= \left| \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot \omega} \right| = \end{aligned}$$

$$=\left|\frac{\pi}{\omega}\right|=$$
$$=\frac{\pi}{\omega},$$

pa tvrdnja slijedi potpuno analogno kao u **a)** zadatku.

Napomena 3. U gornjem je slučaju očito $t_2 < t_1$, tj. najprije se postiže najmanja, a potom najveća vrijednost. Ako bismo razmatrali suprotan slučaj, tj. interval na kojemu se najprije postiže najveća vrijednost, a potom najmanja (pa su posljedično te dvije ekstremne vrijednosti uzastopne), onda bismo prilikom određivanja vrijednosti t_1 uzeli istu vrijednost varijable k, tj. $k = k_0$, dok bismo prilikom određivanja vrijednosti t_2 uzeli vrijednost $k = k_0 + 1$. U tom bismo slučaju dobili:

$$d(t_1,t_2)=\left|\frac{-2\cdot\varphi+(4\cdot k_0+1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}-\left(\frac{-2\cdot\varphi+(4\cdot(k_0+1)-1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right)\right|=$$
$$=\left|\frac{-2\cdot\varphi+(4\cdot k_0+1)\cdot\pi+2\cdot\varphi-(4\cdot(k_0+1)-1)\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right|=$$
$$=\left|\frac{(4\cdot k_0+1-(4\cdot(k_0+1)-1))\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right|=$$
$$=\left|\frac{(-2)\cdot\pi}{2\cdot\omega}\right|=$$
$$=\left|\frac{-\pi}{\omega}\right|=$$
$$=-\left(\frac{-\pi}{\omega}\right)=$$
$$=\frac{\pi}{\omega},$$

s istim konačnim zaključkom.

Napomena 4. Iz prethodnih dvaju zadataka zaključujemo:

Neka su t_0 *bilo koja* nultočka i T temeljni period funkcije h. Tada h:

- postiže (lokalni i globalni) ekstrem u točki $t_1 = t_0 + \frac{T}{4}$;
- ima nultočku $t_2 = t_0 + \frac{T}{2}$;

- postiže (lokalni i globalni) ekstrem u točki $t_3 = t_0 + \frac{3}{4} \cdot T$, pri čemu je taj ekstrem suprotan onome koji se postiže u točki t_1;
- ima nultočku $t_4 = t_0 + T$.

Dakle, u *svakom* segmentu oblika $[t_0, t_0 + T]$ funkcija *h* ima točno tri različite nultočke i točno dva (lokalna i globalna) ekstrema.

Posebno, ako je t_0 najveća strogo negativna ili najmanja nenegativna nultočka funkcije *h*, dobiva se tzv. *osnovni* ili *temeljni* segment te funkcije. Preciznije,

- ako je $\varphi \le 0$, onda se za t_0 bira najmanja nenegativna nultočka funkcije *h*. Ta je nultočka jednaka $\frac{-\varphi}{\omega}$.
- ako je $\varphi > 0$, onda se za t_0 bira najveća strogo negativna nultočka funkcije *h*. Ta je nultočka (također) jednaka $\frac{-\varphi}{\omega}$.

Uočimo da vrijede jednakosti:

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}\right) &= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}\right) + \varphi\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(-\varphi + \omega \cdot \frac{T}{4} + \varphi\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{T}{4}\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \\
&= A \cdot 1 = \\
&= A.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h\left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{3}{4} \cdot T\right) &= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \left(\frac{-\varphi}{\omega} + \frac{3}{4} \cdot T\right) + \varphi\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(-\varphi + \omega \cdot \frac{3}{4} \cdot T + \varphi\right) = \\
&= A \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{3}{4} \cdot T\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= A \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \frac{3}{4} \cdot T\right) = \\ &= A \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \pi\right) = \\ &= A \cdot (-1) = \\ &= -A. \end{aligned}$$

To znači da *h strogo raste* na intervalima $\left\langle \frac{-\varphi}{\omega}, \frac{-\varphi}{\omega} + \frac{T}{4} \right\rangle$ i $\left\langle \frac{-\varphi}{\omega} + \frac{3}{4} \cdot T, \frac{-\varphi}{\omega} + T \right\rangle$, a strogo pada na intervalu $\left\langle \frac{-\varphi}{\omega} + \frac{T}{4}, \frac{-\varphi}{\omega} + \frac{3}{4} \cdot T \right\rangle$. Na potpuno analogan način se „ponaša“ i tzv. *osnovna sinusioda* $y = \sin t$ na svojem osnovnom intervalu $[0, 2 \cdot \pi]$.

Zbog svega toga se u zadacima često zahtijeva *crtanje grafa harmonijske funkcije na njezinu osnovnu segmentu*. U tom slučaju treba nacrtati sinusoidu koja prolazi točkama

$$T_0 = (t_0, 0),\ T_1 = (t_1, A),\ T_2 = (t_2, 0),\ T_3 = (t_3, -A) \text{ i } T_4 = (t_4, 0).$$

Navedene točke su tzv. *karakteristične točke* grafa funkcije *h* na njezinu osnovnu segmentu.

Isti se graf može dobiti translacijom (ulijevo ili udesno) i „stezanjem“/ „rastezanjem“ (tako da joj lokalni i globalni ekstremi budu u točkama s ordinatom *A*, odnosno $-A$) krivulje $y = \sin t$. Međutim, gore opisani način smatramo bitno jednostavnijim.

4. Neka je $h(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, pri čemu su $A, \omega > 0$. Ispitajte vrijede li tvrdnje iz zadataka 2. i 3. za funkciju *h*. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Koristit ćemo jednakost

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \forall x \in \mathbb{R}$$

koja se lako dokaže koristeći adicijski teorem za funkciju sinus. (Učinite to sami za vježbu.) Zbog te jednakosti je:

$$\begin{aligned} h(t) &= A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = \\ &= A \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_1), \end{aligned}$$

pri čemu je $\varphi_1 := \varphi + \frac{\pi}{2}$. To znači da funkcija *h* ima *istu amplitudu* i *istu kružnu frekvenciju* kao i funkcija *h* iz zadataka 1. – 3., ali *različit fazni pomak*. Sada zaključujemo:

- Temeljni period „standardne“ harmonijske funkcije ovisi jedino o kružnoj frekvenciji te funkcije. Zbog toga i funkcija *h* iz ovoga zadatka ima temeljni period jednak $\frac{2 \cdot \pi}{\omega}$.

- Udaljenost između dviju uzastopnih nultočaka „standardne“ harmonijske funkcije jednaka je polovici njezina temeljnoga perioda. Tako je udaljenost između dviju uzastopnih nultočaka funkcije *h* također jednaka $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.

- Udaljenost između vrijednosti nezavisne varijable t za koje se postižu dvije uzastopne ekstremne vrijednosti „standardne“ harmonijske funkcije jednaka je polovici njezina temeljnoga perioda. Tako je udaljenost između vrijednosti nezavisne varijable t za koje se postižu dvije uzastopne ekstremne vrijednosti funkcije *h* također jednaka $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$.

- Lako se provjeri da graf funkcije *h* prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini ako i samo ako je $\varphi = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}$. U zadacima se tada obično postavi dodatni zahtjev $\varphi \in [0, \pi]$ kako bi se prilikom rješavanja mogla primijeniti funkcija arccos.

- Vrijedi sljedeća tvrdnja.

  Funkcija h ima točku lokalnoga maksimuma na osi ordinata ako i samo ako je $\varphi = 0.$

  Dokažimo je.

  ($\Leftarrow$) Ako je $\varphi = 0,$ onda je

$$\begin{aligned} h(0) &= A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + 0) = \\ &= A \cdot \cos 0 = \\ &= A \cdot 1 = \\ &= A. \end{aligned}$$

  Dakle, graf funkcije h prolazi točkom $(0, A)$, a ta je točka očito točka lokalnoga maksimuma funkcije h jer je njezina najveća vrijednost jednaka A.

  ($\Rightarrow$) Pretpostavimo da graf funkcije h prolazi točkom $(0, A)$. Tada imamo:

$$\begin{aligned} &h(0) = A, \\ &A \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi) = A, \quad / : A \\ &\cos \varphi = 1. \end{aligned}$$

  Prema pretpostavci je $\varphi \in [0, \pi]$, pa primjenom funkcije arccos slijedi:

$$\varphi = \arccos 1 = 0.$$

  Potpuno analogno se dokazuje i sljedeća tvrdnja.

- Funkcija h ima točku lokalnoga minimuma na osi ordinata ako i samo ako je $\varphi = \pi.$

  Provedite njezin dokaz za vježbu.

5. Nacrtajte grafove sljedećih harmonijskih funkcija na njihovu osnovnu segmentu:

a) $f(x)=\sin\left(2\cdot x+\frac{\pi}{4}\right)$;

Rješenje: Iz pravila funkcije f očitamo:

$$A=1,\ \omega=2,\ \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Zbog toga je temeljni period funkcije f jednak

$$\begin{aligned}T&=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\\&=\frac{2\cdot\pi}{2}=\\&=\pi.\end{aligned}$$

Pripadni osnovni segment je

$$\begin{aligned}\left[\frac{-\varphi}{\omega},\frac{-\varphi}{\omega}+T\right]&=\left[\frac{-\frac{\pi}{4}}{2},\frac{-\frac{\pi}{4}}{2}+\pi\right]=\\&=\left[\frac{-\pi}{8},\frac{7}{8}\cdot\pi\right].\end{aligned}$$

Karakteristične točke na tom segmentu su:

$$\begin{aligned}T_0&=\left(\frac{-\pi}{8},0\right),\\T_1&=\left(\frac{-\pi}{8}+\frac{\pi}{4},1\right)=\left(\frac{\pi}{8},1\right),\\T_2&=\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{3}{8}\cdot\pi,0\right),\\T_3&=\left(\frac{3}{8}\cdot\pi+\frac{\pi}{4},-1\right)=\left(\frac{5}{8}\cdot\pi,-1\right),\\T_4&=\left(\frac{5}{8}\cdot\pi+\frac{\pi}{4},0\right)=\left(\frac{7}{8}\cdot\pi,0\right).\end{aligned}$$

Pripadni graf prikazan je na slici 1. a).

Slika 1.a)

b) $h(u)=(-3)\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot u-\frac{\pi}{6}\right)$.

Rješenje: Pravilo funkcije *f* najprije transformirajmo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} h(u)&=(-3)\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot u-\frac{\pi}{6}\right)=\\ &=3\cdot\sin\left(\frac{-1}{3}\cdot u+\frac{\pi}{6}\right)=\\ &=3\cdot\sin\left(\pi-\left(\frac{-1}{3}\cdot u+\frac{\pi}{6}\right)\right)=\\ &=3\cdot\sin\left(\frac{1}{3}\cdot u+\frac{5}{6}\cdot\pi\right). \end{aligned}$$

Iz pravila funkcije *h* očitamo:

$$A=3,\ \omega=\frac{1}{3},\ \varphi=\frac{5}{6}\cdot\pi.$$

Zbog toga je temeljni period funkcije f jednak

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\frac{1}{3}}=6\cdot\pi.$$

Pripadni osnovni segment je

$$\begin{aligned}\left[\frac{-\varphi}{\omega},\frac{-\varphi}{\omega}+T\right]&=\left[\frac{-\frac{5}{6}\cdot\pi}{\frac{1}{3}},\frac{-\frac{5}{6}\cdot\pi}{\frac{1}{3}}+6\cdot\pi\right]=\\ &=\left[\frac{-5}{2}\cdot\pi,\frac{7}{2}\cdot\pi\right].\end{aligned}$$

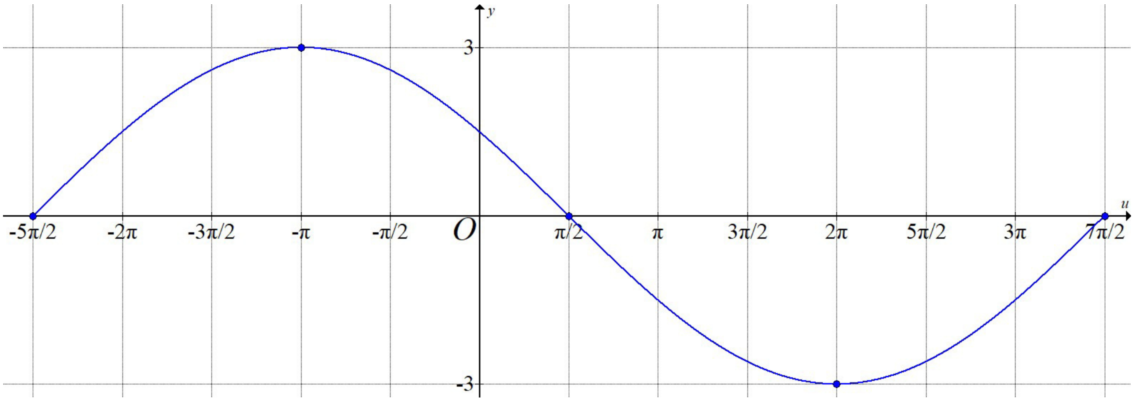
Karakteristične točke na tom segmentu su:

$$\begin{aligned} T_0&=\left(\frac{-5}{2}\cdot\pi,0\right),\\ T_1&=\left(\frac{-5}{2}\cdot\pi+\frac{6\cdot\pi}{4},3\right)=(-\pi,3),\\ T_2&=\left(-\pi+\frac{6\cdot\pi}{4},0\right)=\left(\frac{\pi}{2},0\right), \end{aligned}$$

$$T_3 = \left(\frac{\pi}{2} + \frac{6 \cdot \pi}{4}, -3\right) = (\pi, -3),$$

$$T_4 = \left(\pi + \frac{6 \cdot \pi}{4}, 0\right) = \left(\frac{7}{2} \cdot \pi, 0\right).$$

Pripadni graf prikazan je na slici 1. b).



Slika 1. b)

6. (pismeni ispit 12. 6. 2017.) Zadane su harmonijske funkcije

$$h_1(t) = 2\cdot\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),$$
$$h_2(t) = \sin\left(t-\frac{3}{4}\cdot\pi\right).$$

Nacrtajte graf njihove superpozicije $h_3(t) = A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$ na njezinu osnovnu segmentu. (Pretpostavite da su $A,\ \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.)

Rješenje: Vidjeti sliku 2. Iz pravila zadanih harmonijskih funkcija očitamo:

$$\omega = 1,$$
$$A_1 = 2,\ \varphi_1 = \frac{\pi}{4},$$
$$A_2 = 1,\ \varphi_2 = \frac{-3}{4}\cdot\pi.$$

Superpozicija zadanih funkcija također ima kružnu frekvenciju $\omega = 1$ i temeljni period

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \\ &= \frac{2\cdot\pi}{1} = \\ &= 2\cdot\pi. \end{aligned}$$

Računamo njezinu amplitudu i fazni pomak:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2\cdot A_1\cdot A_2\cdot\cos(\varphi_2-\varphi_1)} = \\ &= \sqrt{2^2+1^2+2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\left(\left(-\frac{3}{4}\cdot\pi\right)-\frac{\pi}{4}\right)} = \\ &= \sqrt{4+1+4\cdot\cos(-\pi)} = \\ &= \sqrt{4+1+4\cdot(-1)} = \\ &= \sqrt{1} = \\ &= 1, \end{aligned}$$

$$\left\{\begin{aligned} \sin\varphi &= A_1\cdot\sin\varphi_1 + A_2\cdot\sin\varphi_2 = \\ &= 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\cdot\sin\left(-\frac{3}{4}\cdot\pi\right)= \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\varphi &= A_1\cdot\cos\varphi_1 + A_2\cdot\cos\varphi_2 = \\ &= 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+1\cdot\cos\left(-\frac{3}{4}\cdot\pi\right)= \\ &= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+1\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)= \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Tako zaključujemo da je pravilo superpozicije zadanih funkcija:

$$\begin{aligned} h_3(t) &= 1\cdot\sin\left(1\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)= \\ &= \sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Zbog toga je temeljni period funkcije f jednak

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\cdot\pi}{1}= \\ &= 2\cdot\pi. \end{aligned}$$

Pripadni osnovni segment je

$$\begin{aligned} \left[\frac{-\varphi}{\omega},\frac{-\varphi}{\omega}+T\right] &= \left[\frac{-\frac{\pi}{4}}{1},\frac{-\frac{\pi}{4}}{1}+2\cdot\pi\right]= \\ &= \left[-\frac{\pi}{4},\frac{7}{4}\cdot\pi\right]. \end{aligned}$$

Karakteristične točke na tom segmentu su:

$$T_0 = \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right),$$

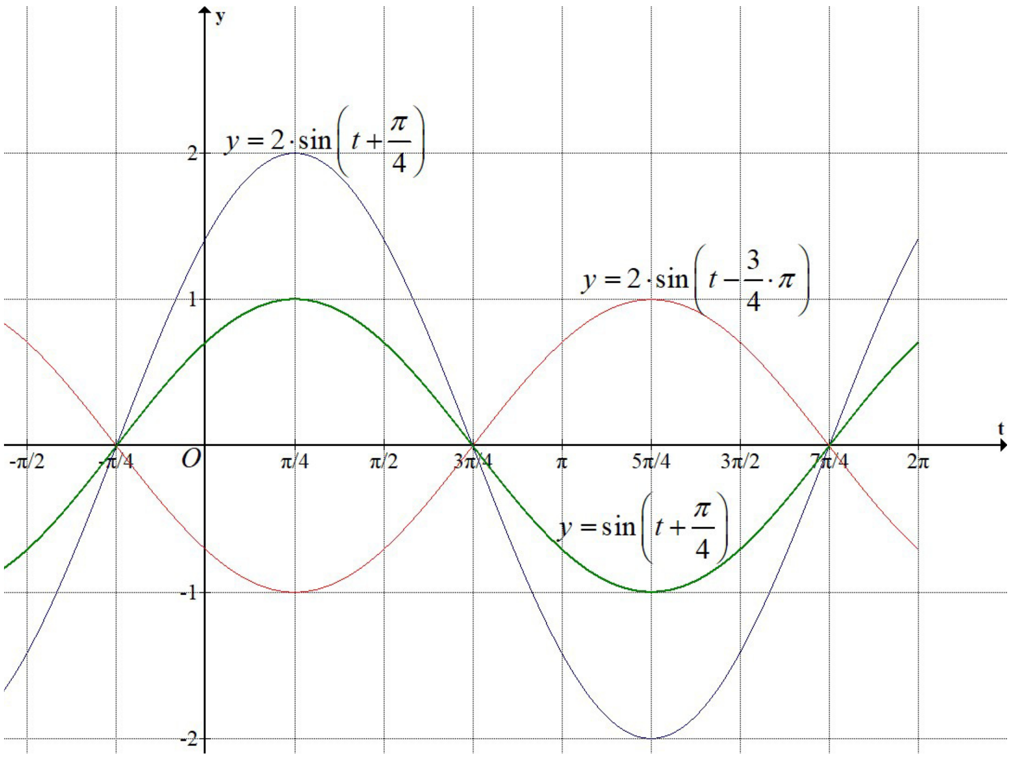
$$T_1 = \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2\cdot\pi}{4}, 1\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 1\right),$$

$$T_2 = \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{2\cdot\pi}{2}, 0\right) = \left(\frac{3}{4}\cdot\pi, 0\right),$$

$$T_3 = \left(\frac{-\pi}{4} + \frac{3}{4}\cdot 2\cdot\pi, 1\right) = \left(\frac{5}{4}\cdot\pi, -1\right),$$

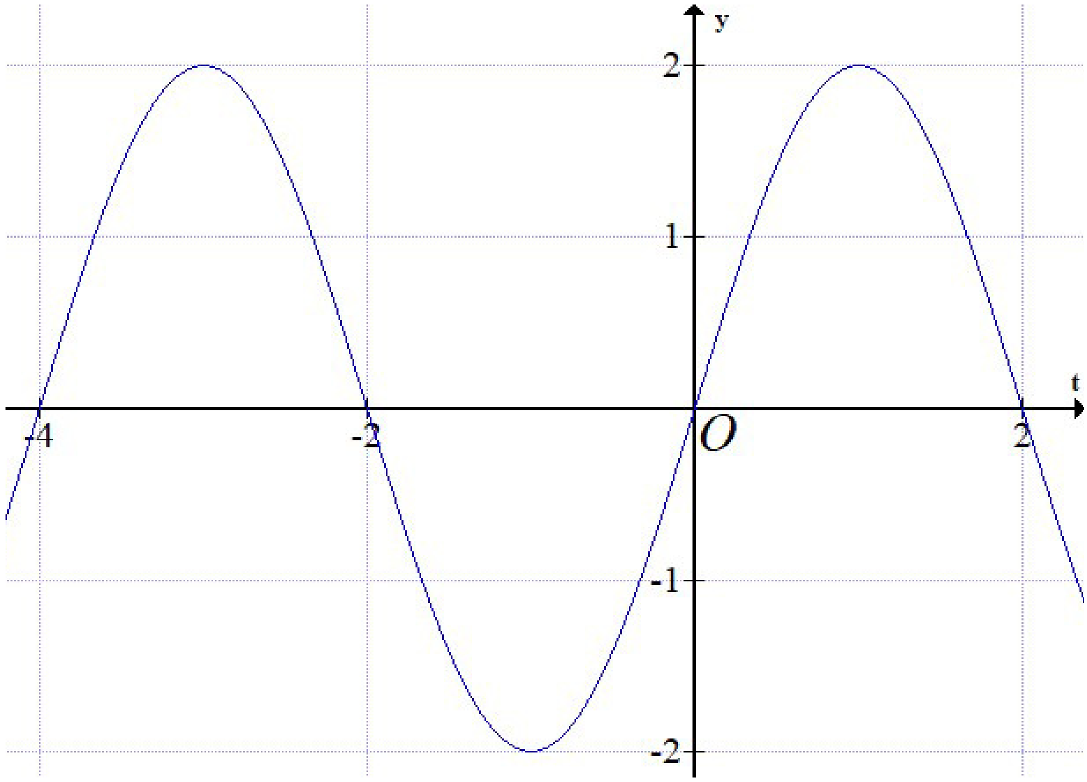
$$T_4 = \left(\frac{7}{4}\cdot\pi, 0\right),$$

Grafovi svih triju funkcija prikazani su na donjoj slici.



Slika 2.

7. Odredite pravilo titranja $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na slici 3. Pretpostavite da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$.



Slika 3.

Rješenje: Iz slike se vidi da su amplituda $A = 2$ i fazni pomak $\varphi = 0$ (jer zadani graf prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini).

Odredimo kružnu frekvenciju ω. Dvije uzastopne nultočke su očito $t_1 = 0$ i $t_2 = 2$. Udaljenost između njih jednaka je količniku broja π i kružne frekvencije ω:

$$\frac{\pi}{\omega} = 2 - 0,$$

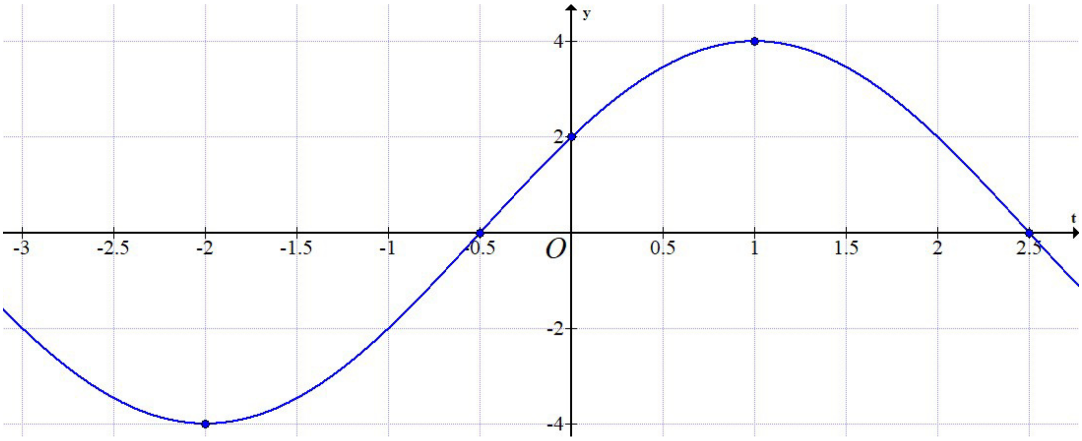
$$\omega = \frac{\pi}{2-0} =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, traženo pravilo je:

$$h(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot t\right).$$

8. Odredite pravilo titranja $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na slici 4. Pretpostavite da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$



Slika 4.

Rješenje: Iz slike se vidi da su amplituda $A = 4$ i dvije uzastopne nultočke $t_1 = -0.5$ i $t_2 = 2.5$. Tako odmah slijedi

$$\omega = \frac{\pi}{2.5 - (-0.5)} = \\ = \frac{\pi}{3}.$$

Preostaje iskoristiti podatak da krivulja prolazi točkom $(0, 2)$. Uvrstimo li $A = 4,\ t = 0$ i $h(t) = 2$ u pravilo funkcije *h*, dobit ćemo trigonometrijsku jednadžbu:

$$4 \cdot \sin \varphi = 2, \qquad / : 4$$
$$\sin \varphi = \frac{1}{2}.$$

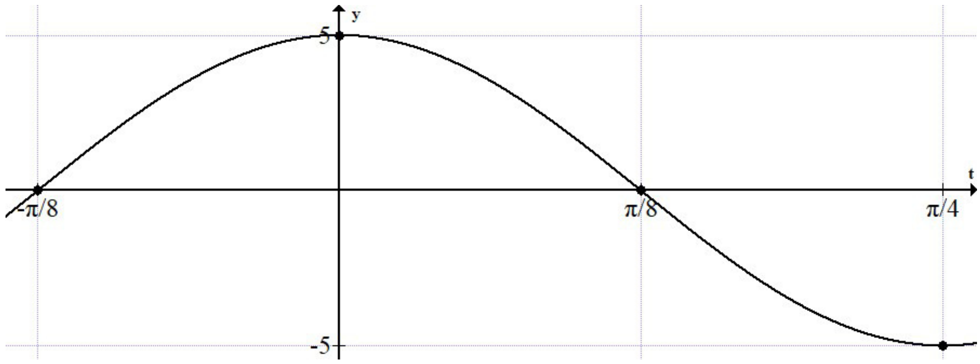
Ona u intervalu $\left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ ima jedinstveno rješenje

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \\ = \frac{\pi}{6}.$$

Dakle, traženo pravilo glasi:

$$h(t) = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right).$$

9. Odredite pravilo funkcije $h(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na slici 5. Pretpostavite da su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in [0, \pi]$.



Slika 5.

Rješenje: Iz slike se vidi da su amplituda $A = 5$ i dvije uzastopne nultočke $t_1 = \frac{-\pi}{8}$ i $t_2 = \frac{\pi}{8}$. Tako odmah slijedi

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{8} - \left(\frac{-\pi}{8}\right)} = \\ &= \frac{\pi}{\frac{\pi}{4}} = \\ &= 4. \end{aligned}$$

Preostaje iskoristiti podatak da krivulja prolazi točkom $(0, 5)$. Uvrstimo li $A = 5,\ t = 0$ i $h(t) = 5$ u pravilo funkcije *h*, dobit ćemo trigonometrijsku jednadžbu:

$$\begin{aligned} &5 \cdot \cos \varphi = 5, \quad / : 5 \\ &\cos \varphi = 1. \end{aligned}$$

Ona u intervalu $[0, \pi]$ ima jedinstveno rješenje

$$\varphi = \arccos(1) = 0.$$

Dakle, traženo pravilo je

$$h(t) = 5 \cdot \cos(4 \cdot t).$$

10. Dokažite sljedeće jednakosti:

a) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in [-1,1];$

Rješenje: Zadana jednakost je ekvivalentna jednakosti

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x .$$

Odatle je:

$$\begin{aligned}
&\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right),\\
&x = \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \cdot \underbrace{\cos(\arccos x)}_{=x} - \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} \cdot \sin(\arccos x), ,\\
&x = 1 \cdot x,
\end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja.

b) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Rješenje: Zadana jednakost je ekvivalentna jednakosti $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$.

Odatle je:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}_{=x} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right),\\
&x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x\right)},\\
&x = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\operatorname{arcctg} x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\operatorname{arcctg} x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos(\operatorname{arcctg} x) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(\operatorname{arcctg} x)}\\
&x = \frac{\cos(\operatorname{arcctg} x)}{\sin(\operatorname{arcctg} x)},\\
&x = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x),\\
&x = x,
\end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja.