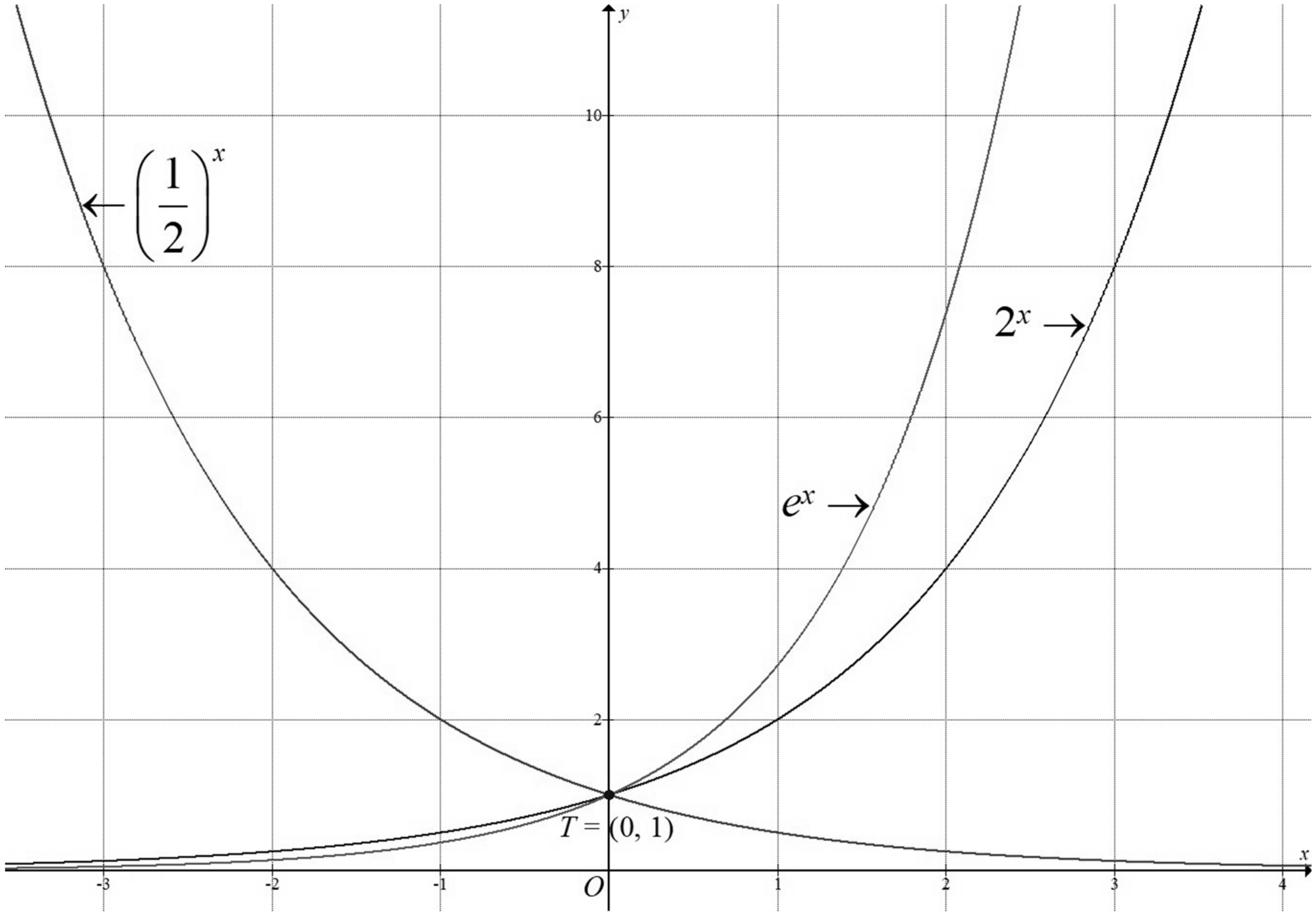
4.4. EKSPONENCIJALNA I LOGARITAMSKA FUNKCIJA

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA.
LOGARITAMSKA FUNKCIJA.
HIPERBOLNE FUNKCIJE.
AREA FUNKCIJE.

4.4.1. EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA

- Neka je $a \in \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$ konstanta.
- Funkciju $f : \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ definiranu formulom $f(x) = a^x$ nazivamo **eksponencijalna funkcija**. Broj a je **baza**, a varijabla x **eksponent** te funkcije.
- Prirodna domena eksponencijalne funkcije je skup $\mathbb{R}$. Za kodomenu uzimamo skup $\langle 0, +\infty\rangle$ (tj. sliku funkcije f) kako bismo dobili bijekciju.
- Eksponencijalna funkcija *nema* nultočaka, ali njezin graf nužno prolazi točkom $T = (0, 1)$.
- Za $a > 1$ eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:
- strogo rastuća bijekcija omeđena odozdo, a nije ni parna ni neparna ni periodička.
- Za $0 < a < 1$ eksponencijalna funkcija ima sljedeća svojstva:
- strogo padajuća bijekcija omeđena odozdo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $a = \mathrm{e} \approx 2.7182818...$ (baza prirodnoga logaritma) dobivamo funkciju $f(x) = \mathrm{e}^x$.
- Grafovi nekih eksponencijalnih funkcija prikazani su na sljedećoj slici.

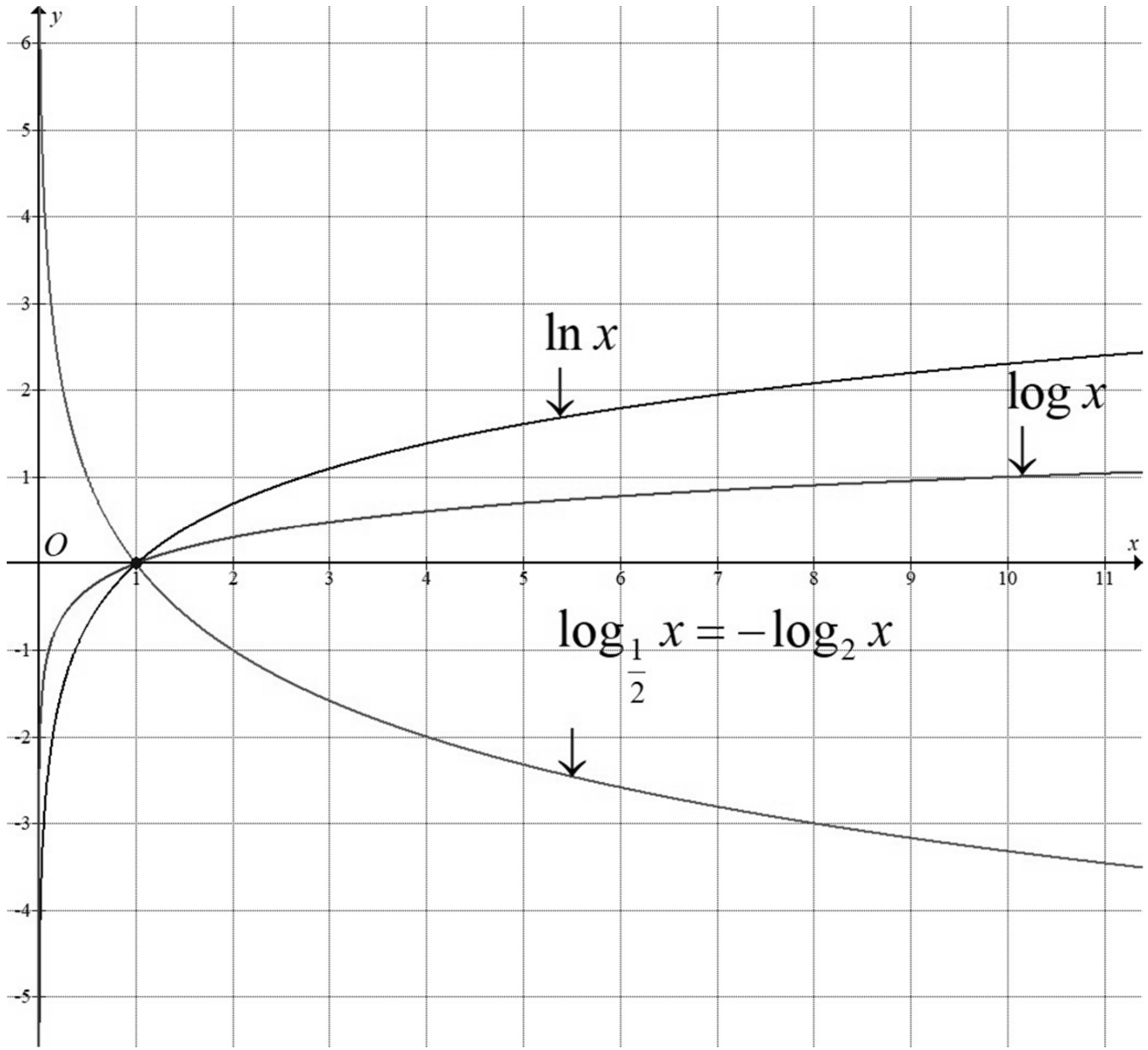
4.4.2. GRAFOVI NEKIH EKSPONENCIJALNIH FUNKCIJA



4.4.3. LOGARITAMSKA FUNKCIJA

- U točki 4.4.1. istakli smo da je svaka eksponencijalna funkcija bijekcija. Zbog toga svaka eksponencijalna funkcija ima inverz. Taj inverz nazivamo *logaritamska funkcija*.
- Za $a \in \langle 0, +\infty\rangle \setminus \{1\}$ funkciju $f : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definiranu formulom $f(x) = \log_a x$ nazivamo **logaritamska funkcija**.
- Broj a je **baza**, a varijabla x **logaritmand** te funkcije.
- Prirodna domena *svake* logaritamske funkcije gornjega oblika je skup $\langle 0, +\infty\rangle$. Kodomena i slika te funkcije je skup $\mathbb{R}$.
- Logaritamska funkcija ima točno jednu nultočku: $x = 1$. Zbog toga graf svake logaritamske funkcije nužno prolazi točkom $T = (1, 0)$.
- Za $a > 1$ logaritamska funkcija ima sljedeća svojstva:
- strogo rastuća bijekcija koja nije omeđena ni odozdo ni odozgo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $0 < a < 1$ logaritamska funkcija ima sljedeća svojstva:
- strogo padajuća bijekcija koja nije omeđena ni odozdo ni odozgo, a nije ni parna ni neparna ni periodička
- Za $a = 10$ dobivamo funkciju $f(x) = \log x$. Tu funkciju nazivamo **funkcija dekadskoga logaritma** ili, kraće, *dekadski logaritam.*
- Za $a = e \approx 2.7182818...$ (baza prirodnoga logaritma) dobivamo funkciju $f(x) = \ln x$. Tu funkciju nazivamo **funkcija prirodnoga logaritma** ili, kraće, *prirodni logaritam.*
- Grafovi nekih logaritamskih funkcija prikazani su na sljedećoj slici.

4.4.4. GRAFOVI NEKIH LOGARITAMSKIH FUNKCIJA



4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- Pomoću eksponencijalne funkcije $f(x) = e^x$ definiraju se tzv. *hiperbolne funkcije* koje su rješenja mnogih problema iz tehnike i građevine (npr. problema proračuna otpornosti nekoga materijala).
- Prvi ih je definirao Vicenzo Ricatti, a kasnije nadopunio Johann Heinrich Lambert.
- Postoje četiri osnovne hiperbolne funkcije:
- *sinus hiperbolni* (oznaka: sh);
- *kosinus hiperbolni* (oznaka: ch);
- *tangens hiperbolni* (oznaka: th);
- *kotangens hiperbolni* (oznaka: cth).

4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- **Sinus hiperbolni** je neomeđena strogo rastuća neparna bijekcija čiji su prirodna domena i slika $\mathbb{R}$. Njezina jedina nultočka je $x = 0$. Definirana je pravilom:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- **Kosinus hiperbolni** je odozdo omeđena parna funkcija koja je strogo rastuća na intervalu $\langle 0, +\infty\rangle$, a strogo padajuća na intervalu $\langle -\infty, 0\rangle$. Njezina prirodna domena je $\mathbb{R}$, a slika $[1, +\infty\rangle$. Ona nije bijekcija, te nema realnih nultočaka. Definirana je pravilom:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

4.4.5. HIPERBOLNE FUNKCIJE

- **Tangens hiperbolni** je omeđena strogo rastuća neparna bijekcija čija je prirodna domena $\mathbb{R}$, a slika $\langle -1, 1\rangle$. Njezina jedina nultočka je $x = 0$. Definirana je pravilom:

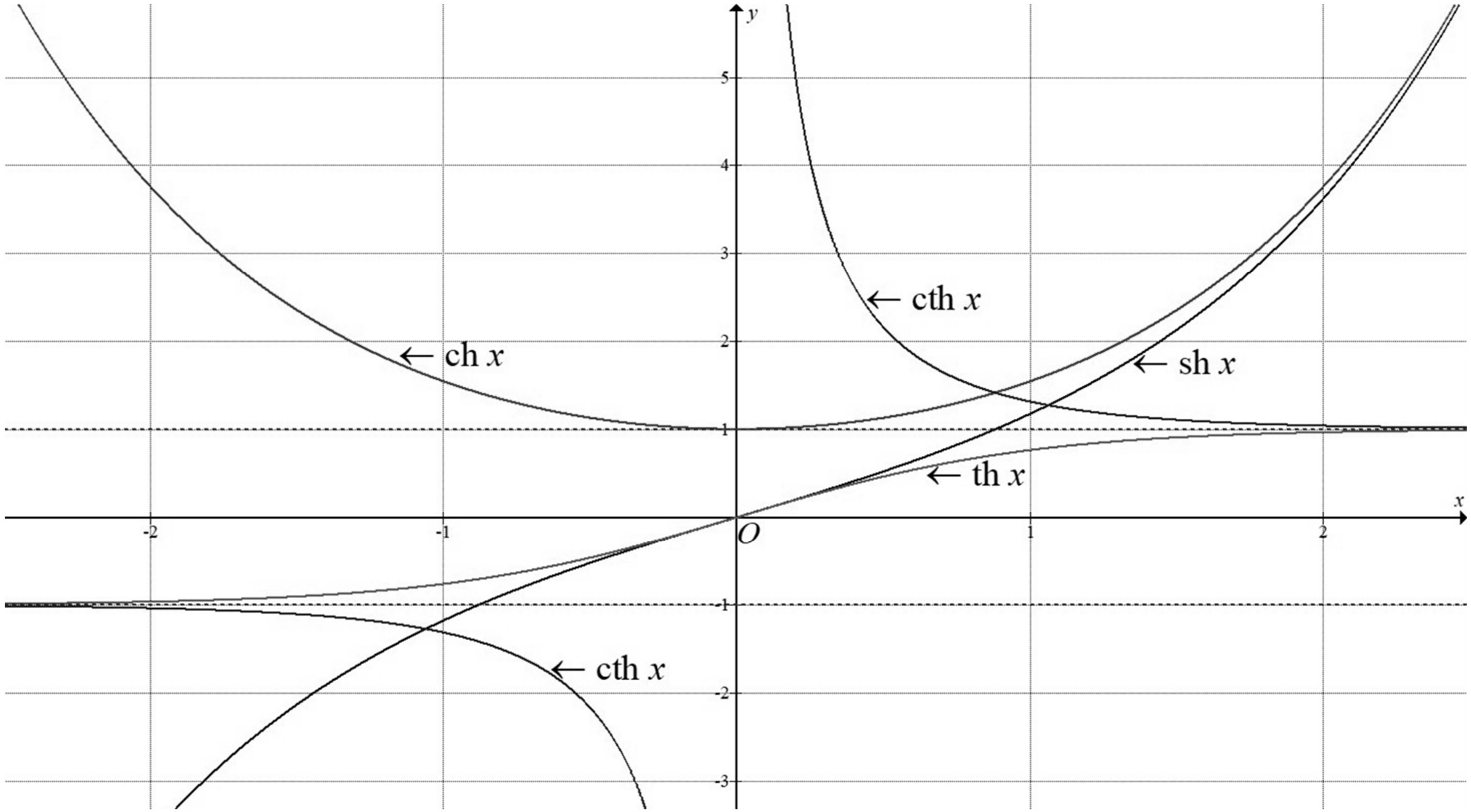
$$\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ili} \quad \mathrm{th}\, x = \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x}$$

- **Kotangens hiperbolni** je neomeđena neparna bijekcija koja je strogo padajuća na svojoj prirodnoj domeni $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Njezina slika je $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$. Nema realnih nultočaka. Definirana je pravilom:

$$\mathrm{cth}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad \text{ili} \quad \mathrm{cth}\, x = \frac{\mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}\, x}$$

- Grafovi svih četiriju hiperbolnih funkcija prikazani su na sljedećoj slici. Graf funkcije ch vrlo često se naziva *lančanica*.

4.4.6. GRAFOVI HIPERBOLNIH FUNKCIJA



4.4.7. OSNOVNI IDENTITETI VEZANI UZ HIPERBOLNE FUNKCIJE

0. $\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{x}$.

1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

2. $\operatorname{cth} x = \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$.

3. $\operatorname{ch}(2 \cdot x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x$.

4. $\operatorname{sh}(2 \cdot x) = 2 \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x$.

5. $\operatorname{th}(2 \cdot x) = \dfrac{2 \cdot \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}$.

6. $\operatorname{cth}(2 \cdot x) = \dfrac{\operatorname{cth}^2 x + 1}{2 \cdot \operatorname{cth} x}$.

7. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$.

8. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y$.

9. $\operatorname{th}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y}$

10. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \dfrac{1 \pm \operatorname{cth} x \cdot \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$.

4.4.8. AREA FUNKCIJE

- Sve hiperbolne funkcije, osim kosinusa hiperbolnog, su bijekcije sa svoje domene na svoju sliku.
- Za kosinus hiperbolni najprije definiramo pomoćnu funkciju $\mathrm{Ch} : [0, +\infty\rangle \to [1, +\infty\rangle$, $\mathrm{Ch}(x) = \mathrm{ch}\ x$. (Dakle, ta se funkcija razlikuje od funkcije ch isključivo po svojoj prirodnoj domeni.)
- Tako dobijemo bijekciju sa skupa $[0, +\infty\rangle$ u $[1, +\infty\rangle$.
- Za tri ranije definirane funkcije (sh, th i cth), te funkciju Ch postoje jedinstveni *inverzi*.
- Sve inverze hiperbolnih funkcija jednim imenom nazivamo **area funkcije**.

4.4.8. AREA FUNKCIJE

- Inverz funkcije sh naziva se **area sinus hiperbolni**. To je neomeđena, strogo rastuća, neparna bijekcija čiji su prirodna domena i slika $\mathbb{R}$. Definirana je formulom:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

- Inverz funkcije Ch naziva se **area kosinus hiperbolni**. To je odozdo omeđena, strogo rastuća bijekcija koja nije ni parna ni neparna. Njezina prirodna domena je $[1, +\infty\rangle$, a slika $[0, +\infty\rangle$. Definirana je formulom:

$$\operatorname{Arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

4.4.8. AREA FUNKCIJE

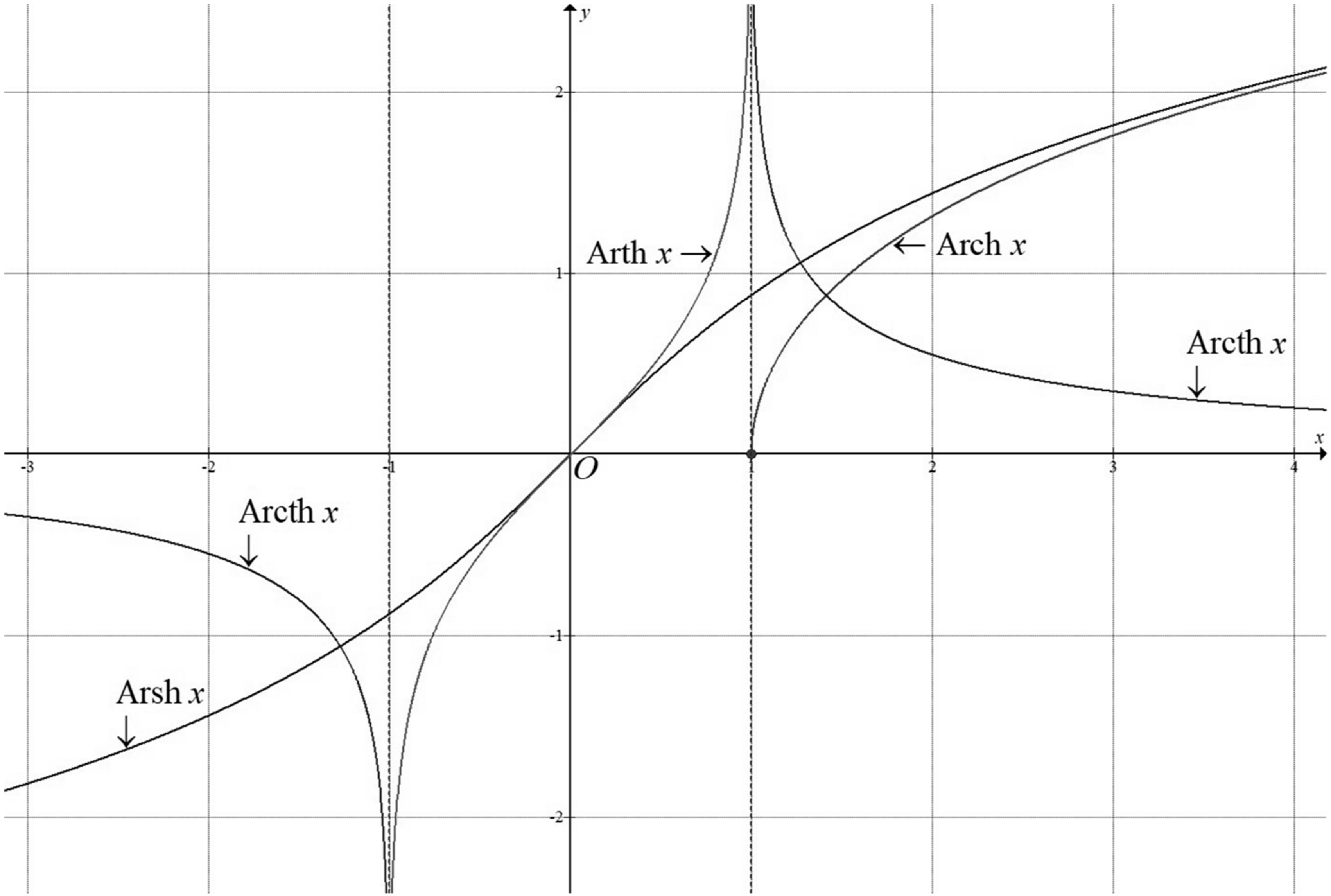
- Inverz funkcije th naziva se **area tangens hiperbolni**. To je neomeđena, strogo rastuća, neparna bijekcija čija je prirodna domena $\langle -1,\ 1\rangle$, a slika $\mathbb{R}$. Definirana je pravilom:

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln(x+1)-\ln(1-x)\right)$$

- Inverz funkcije cth naziva se **area kotangens hiperbolni**. To je neomeđena, strogo padajuća, neparna bijekcija. Njezina prirodna domena je $\mathbb{R}\setminus[-1,\ 1]$, a slika $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Definirana je pravilom:

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2}\cdot\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right)$$

4.4.9. GRAFOVI AREA FUNKCIJA



1. Odredite prirodnu domenu **inverza** bijekcije f i sve njegove nultočke (ako postoje) koje pripadaju toj domeni ako je:

a) $f(x)=\dfrac{2\cdot \mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$;

Rješenje: Odredimo najprije pravilo inverza bijekcije *f*. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&y=\frac{2\cdot \mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}, \qquad /\cdot(\mathrm{e}^{x}+1)\\
&y\cdot\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)=2\cdot \mathrm{e}^{x}-1,\\
&y\cdot \mathrm{e}^{x}+y=2\cdot \mathrm{e}^{x}-1,\\
&y\cdot \mathrm{e}^{x}-2\cdot \mathrm{e}^{x}=-y-1,\\
&\mathrm{e}^{x}\cdot(y-2)=-y-1,\\
&\mathrm{e}^{x}=\frac{y+1}{2-y}, \qquad /\ln\\
&x=\ln\left(\frac{y+1}{2-y}\right)\Rightarrow\\
&f^{-1}(x)=\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right).
\end{aligned}
$$

Prirodnu domenu inverza dobijemo iz uvjeta

$$\frac{x+1}{2-x}>0.$$

Taj je uvjet ekvivalentan nejednadžbi

$$(x+1)\cdot(2-x)>0$$

iz koje je $x\in\left\langle -1,2\right\rangle$. Dakle,

$$D\left(f^{-1}\right)=\left\langle -1,2\right\rangle.$$

Odredimo skup svih nultočaka dobivena inverza. U tu svrhu riješimo jednadžbu:

$$
\begin{aligned}
&f^{-1}(x)=0,\\
&\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)=0,\\
&\frac{x+1}{2-x}=\mathrm{e}^0,\\
&\frac{x+1}{2-x}=1,\\
&\frac{x+1}{2-x}-1=0,\\
&\frac{x+1-(2-x)}{2-x}=0,\\
&\frac{x+1-2+x}{2-x}=0,\\
&\frac{2\cdot x-1}{2-x}=0,\\
&2\cdot x-1=0,\\
&x=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle,

$$N\left(f^{-1}\right)=\left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Napomena 1. Može se pokazati da je

$$\operatorname{Im}(f)=D\left(f^{-1}\right)=\langle -1,2\rangle.$$

Zbog pretpostavljene bijektivnosti funkcije f, pa posljedično i funkcije f^{-1}, mogli smo očekivati da će skup svih nultočaka biti najviše jednočlan (tj. da će biti ili prazan skup ili jednočlan skup). Budući da je očito $0\in D(f)$, taj je skup jednočlan. Njegov jedini element je

$$\begin{aligned}
f(0)&=\frac{2\cdot \mathrm{e}^0-1}{\mathrm{e}^0+1}=\\
&=\frac{2\cdot 1-1}{1+1}=\\
&=\frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pa dobivamo isti rezultat kao i maloprije.

b) $f(t) = \arcsin(\ln(t+1))$.

Rješenje: Odredimo najprije pravilo inverza bijekcije *f*. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&y = \arcsin(\ln(t+1)),\\
&\sin y = \ln(t+1),\\
&t+1 = \mathrm{e}^{\sin y},\\
&t = \mathrm{e}^{\sin y} - 1 \Rightarrow\\
&f^{-1}(t) = \mathrm{e}^{\sin t} - 1.
\end{aligned}$$

Budući da su izrazi $\sin t$ i $\mathrm{e}^{\sin t}$ definirani za svaki $t \in \mathbb{R}$, prirodna domena inverza zadane funkcije je $D\left(f^{-1}\right) = \mathbb{R}$.

Odredimo skup svih nultočaka dobivena inverza. U tu svrhu riješimo jednadžbu:

$$\mathrm{e}^{\sin t} - 1 = 0.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\sin t} = 1,\\
&\mathrm{e}^{\sin t} = \mathrm{e}^{0},\\
&\sin t = 0,\\
&t = k \cdot \pi,\ k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Dakle, $N\left(f^{-1}\right) = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

Napomena 2. U ovom primjeru skup svih nultočaka inverza funkcije f je beskonačan skup, što je suprotno ranijem zaključku da taj skup nužno mora biti najviše jednočlan. U čemu je (prividna) pogreška? Vrijedi:

$$\mathrm{Im}(f) = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \neq \mathbb{R} = D\left(f^{-1}\right).$$

Dakle, funkcija definirana pravilom $g(t) = \mathrm{e}^{\sin t} - 1$ na $\mathbb{R}$ *nije* bijekcija (što je i očito jer je npr. $f(0) = f(\pi) = 0.$) Da bi ona postala bijekcija, njezinu prirodnu domenu morali bismo „smanjiti“ na $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Lako vidimo da vrijedi jednakost:

$$N\left(f^{-1}\right) \cap \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] = \{0\},$$

pa „smanjivanjem“ prirodne domene možemo postupiti analogno kao u napomeni 1.

2. Dokažite sve identitete navedene u točki 4.4.7.

Rješenje: Svi identiteti lako se dokazuju koristeći pravila hiperbolnih funkcija. Npr.

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \\
&= e^x;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{e^{2\cdot x} + 2 + e^{-2x}}{2} - \frac{e^{2\cdot x} - 2 + e^{-2x}}{2} = \\
&= 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \\
&= \frac{2 \cdot e^{x+y} - 2 \cdot e^{-x-y}}{4} = \\
&= \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \\
&= \operatorname{ch}(x+y),
\end{aligned}$$

itd.

3. Izvedite pravila za sve četiri area funkcije.

Rješenje: Odredimo najprije pravilo funkcije Arsh kao inverza funkcije sh. Imamo redom:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad / \cdot 2 \cdot e^x,$$
$$\left(e^x\right)^2 - 2 \cdot y \cdot e^x - 2 = 0,$$
$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Lako se vidi da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{y^2+1} > y, \ \forall y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$
$$y - \sqrt{y^2+1} < 0, \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Budući da je

$$e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

i desna strana jednakosti

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2+1}$$

mora biti strogo pozitivna. Zbog toga u toj jednakosti odbacujemo znak –, pa dobivamo:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}, \quad / \ln$$
$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right).$$

Prema tome je

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \ \forall x \in \mathbb{R},$$

što je i trebalo dokazati. Potpuno analogno se izvodi/dokazuje pravilo funkcije Arch.

Odredimo pravilo funkcije Arth kao inverza funkcije th. Imamo redom:

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \frac{\cdot e^x}{\cdot e^x},$$

$$y = \frac{e^{2\cdot x} - 1}{e^{2\cdot x} + 1}, \quad / \cdot \left(e^{2\cdot x} + 1\right),$$
$$\left(e^{2\cdot x} + 1\right) \cdot y = e^{2\cdot x} - 1,$$
$$e^{2\cdot x} \cdot (y - 1) = -1 - y,$$
$$e^{2\cdot x} = \frac{y+1}{1-y}, \quad / \ln$$
$$2 \cdot x = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right),$$
$$x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right).$$

Prema tome je

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \ \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

što je i trebalo dokazati. Potpuno analogno se dokazuje/izvodi pravilo funkcije Arcth.