4.4. PRIMJERI NEPREKIDNIH RAZDIOBA.

NEPREKIDNA JEDNOLIKA RAZDIOBA.

EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA.

4.4.1. NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Analogno kao i kod diskretnih slučajnih varijabli, i neprekidna slučajna varijabla potpuno je određena zadavanjem svoje *funkcije gustoće* ili zadavanjem svoje *funkcije razdiobe vjerojatnosti.*
- U nekim slučajevima jednostavnije je promatrati funkciju gustoće, a u drugima funkciju razdiobe vjerojatnosti.
- Posebnu vrstu neprekidne slučajne varijable – *normalnu slučajnu varijablu* – razmatrat ćemo u zasebnoj cjelini.

4.4.2. NEPREKIDNA JEDNOLIKA RAZDIOBA

- Neka je X neprekidna slučajna varijabla čija je slika $R(X) = [a,\ b]$. (Pretpostavljamo: $a < b$.)
- Kažemo da varijabla X ima **jednoliku razdiobu** ako je njezina *funkcija gustoće* vjerojatnosti

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{za } x \in [a,b]; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- Pišemo: $X \sim U(a,\ b)$

4.4.2. NEPREKIDNA JEDNOLIKA RAZDIOBA

- Napomena: Iz definicije funkcije gustoće *bilo koje* neprekidne jednolike slučajne varijable slijedi:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \lim_{x\to b-} f(x) = f(a) = f(b) = \frac{1}{b-a},$$

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to b+} f(x) = 0.$$

- Budući da je $a < b$, slijedi da f ima prekid u $x = a$ i $x = b$.

4.4.3. EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

- Neka je $a > 0$ konstanta.
- Kažemo da neprekidna slučajna varijabla X ima eksponencijalnu razdiobu ako je $R(X) = \mathbb{R}$ i ako je funkcija gustoće vjerojatnosti varijable X definirana pravilom:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}, \text{ za } x \geq 0; \\ 0, \text{ za } x < 0. \end{cases}$$

- Pišemo: $X \sim Ex(a)$.

4.4.3. EKSPONENCIJALNA RAZDIOBA

- Napomena: Iz definicije funkcije gustoće vjerojatnosti *bilo koje* eksponencijalne slučajne varijable slijedi:

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0) = a,$$

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0.$$

- Budući da je $a > 0$, zaključujemo da f ima prekid u $x = 0$.

1. a) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ konstante takve da je $a < b$. Provjerite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, \text{ za } x \in [a, b]; \\ 0, \text{ inače} \end{cases}$$

funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable.

Rješenje: Prema pretpostavci je $a < b$, pa je $b - a > 0$, odnosno $\frac{1}{b-a} > 0$. Zbog toga je $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Nadalje,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{a} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{a}^{b} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \cdot \mathrm{d}x + \int_{b}^{+\infty} 0 \cdot \mathrm{d}x = \\ &= 0 + \left(\left(\frac{1}{b-a} \cdot x \right) \Bigg|_{a}^{b} \right) + 0 = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot b - \frac{1}{b-a} \cdot a = \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot (b-a) = 1. \end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja.

b) Odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju proizvoljne neprekidne jednolike slučajne varijable.

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim U(a,b)$, za neke $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Za svaki $x < a$ je

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \le x) = \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0\cdot \mathrm{d}t = 0.
\end{aligned}$$

Za svaki $x > b$ je

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \le x) = \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{b} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{b}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{a} 0\cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{d}t + \int_{b}^{x} 0\cdot \mathrm{d}t = \\
&= 0 + 1 + 0 = 1.
\end{aligned}$$

Za $x \in [a,b]$ prema definiciji funkcije razdiobe vjerojatnosti vrijedi:

$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \le x) = \\
&= \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{a} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{x} 0\cdot \mathrm{d}t + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{d}t = \\
&= 0 + \left.\left(\frac{1}{b-a}\cdot t\right)\right|_{a}^{x} = \\
&= \frac{1}{b-a}\cdot x - \frac{1}{b-a}\cdot a = \\
&= \frac{1}{b-a}\cdot (x-a) = \\
&= \frac{x-a}{b-a} = \\
&= \frac{1}{b-a}\cdot x - \frac{a}{b-a}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$F(x)=\begin{cases}0, \text{ za } x<a; \\ \dfrac{x-a}{b-a}, \text{ za } x\in[a,b]; \\ 1, \text{ za } x>b.\end{cases}$$

Nadalje, prema definiciji očekivanja, varijance i standardne devijacije neprekidne slučajne varijable slijedi:

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x= \\
&=\int_{-\infty}^{a} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_{a}^{b} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty} x\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x= \\
&=\int_{-\infty}^{a} x\cdot 0\cdot \mathrm{d}x+\int_{a}^{b} x\cdot \frac{1}{b-a}\cdot \mathrm{d}x+\int_{b}^{+\infty} x\cdot 0\cdot \mathrm{d}x= \\
&=\int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\cdot x\cdot \mathrm{d}x= \\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\int_{a}^{b} x\cdot \mathrm{d}x= \\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Big|_a^b\right)= \\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot b^2-\frac{1}{2}\cdot a^2\right)= \\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(b^2-a^2\right)= \\
&=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}\cdot(b-a)\cdot(b+a)= \\
&=\frac{a+b}{2};
\end{aligned}$$

$$V(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\cdot \mathrm{d}x-(E(X))^2=$$
$$=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\cdot\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b x^2\cdot\mathrm{d}x-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\left.\left(\frac{1}{3}\cdot x^3\right)\right|_a^b\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot b^3-\frac{1}{3}\cdot a^3\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(b^3-a^3\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{3}\cdot(b-a)\cdot\left(b^2+b\cdot a+a^2\right)-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$
$$=\frac{a^2+a\cdot b+b^2}{3}-\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$
$$=\frac{4\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)-3\cdot\left(a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{12}=$$
$$=\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{12}=$$
$$=\frac{(a-b)^2}{12}=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{12};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}=\text{ (zbog } a<b\text{)}=$$
$$=\frac{b-a}{\sqrt{12}}=$$
$$=\frac{(b-a)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}}=$$
$$=\frac{(b-a)\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{36}}=$$
$$=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3}\cdot(b-a).$$

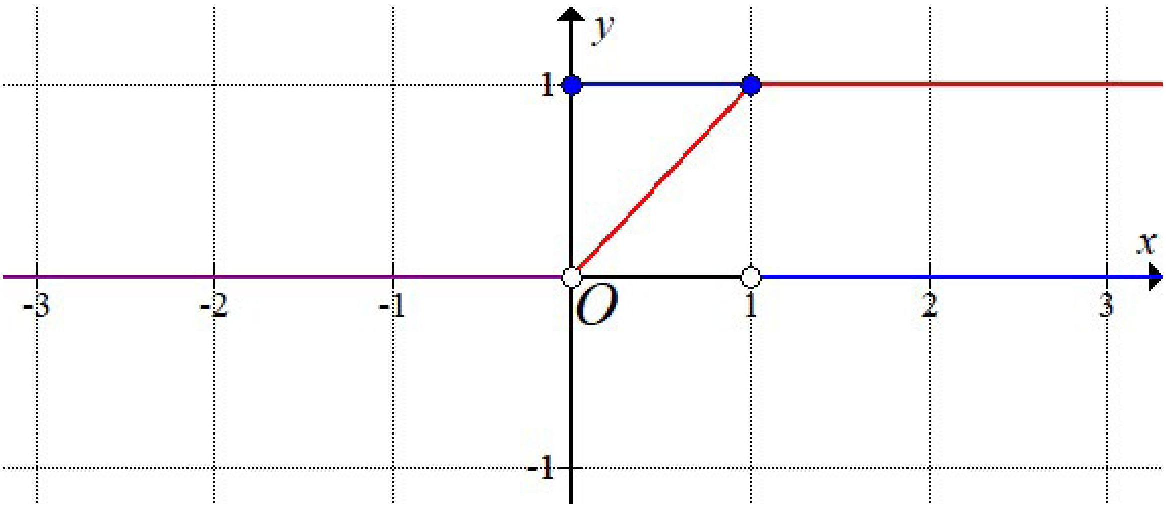
c) Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable $X \sim U(0,1)$.

Rješenje: Za $X \sim U(0, 1)$, tj. za $(a,b)=(0,1)$ dobivamo funkcije

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{za } x\in[0,1];\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{za } x<0;\\ x, & \text{za } x\in[0,1];\\ 1, & \text{za } x>1.\end{cases}$$

Grafovi tih funkcija prikazani su na slici 1.



Slika 1.

2. a) Neka je $a > 0$ konstanta. Provjerite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x}, \text{ za } x \geq 0; \\ 0, \text{ za } x < 0. \end{cases}$$

funkcija gustoće vjerojatnosti neke neprekidne slučajne varijable.

Rješenje: Iskoristit ćemo identitete dokazane u *Matematici* 2 u gradivu o Laplaceovoj transformaciji. Oni vrijede za svaki $a \in \mathbb{R}$ i $s > 0$.

$$\mathcal{L}\{a\}(s) = \int_0^{+\infty} a \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{a}{s},$$
$$\mathcal{L}\{x\}(s) = \int_0^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{s^2},$$
$$\mathcal{L}\{x^2\}(s) = \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-s \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{s^3}.$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathrm{e}^x > 0$. Zbog pretpostavke $a > 0$ slijedi $f(x) \geq 0$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \quad , \\ &= 0 + \frac{a}{a} = 0 + 1 = 1, \end{aligned}$$

pa slijedi tvrdnja.

b) Odredite funkciju razdiobe vjerojatnosti, očekivanje, varijancu i standardnu devijaciju proizvoljne eksponencijalne slučajne varijable.

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim Ex(a)$, za neki $a > 0$. Za svaki $x < 0$ je:

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}t = 0.$$

Za svaki $x \ge 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot \mathrm{d}t + \int_{0}^{x} a \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t} \cdot \mathrm{d}t = \\
&= 0 + a \cdot \int_{0}^{x} \mathrm{e}^{-a \cdot t} \cdot \mathrm{d}t = \\
&= a \cdot \left(\left(-\frac{1}{a} \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot t} \right) \Bigg|_{0}^{x} \right) = \\
&= a \cdot \left(-\frac{1}{a} \right) \cdot \left(\left(\mathrm{e}^{-a \cdot t} \right) \Big|_{0}^{x} \right) = \\
&= (-1) \cdot \left(\mathrm{e}^{-a \cdot x} - \underbrace{\mathrm{e}^{-a \cdot 0}}_{=e^{0}=1} \right) = \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-a \cdot x}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je pravilo funkcije razdiobe vjerojatnosti varijable *X*:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-a \cdot x}, \text{ za } x \ge 0, \\ 0, \text{ za } x < 0. \end{cases}$$

Nadalje, prema definiciji očekivanja, varijance i standardne devijacije neprekidne slučajne varijable slijedi:

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x = \\
&= \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty} a \cdot x \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= 0 + a \cdot \int_{0}^{+\infty} x \cdot \mathrm{e}^{-a \cdot x} \cdot \mathrm{d}x = \\
&= a \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot \mathrm{d}x - (E(X))^2 = \\
&= \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot a \cdot \mathrm{e}^{-a\cdot x} \cdot \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{a}\right)^2 = \\
&= a \cdot \int_{0}^{+\infty} x^2 \cdot \mathrm{e}^{-a\cdot x} \cdot \mathrm{d}x - \frac{1}{a^2} = \\
&= a \cdot \frac{2}{a^3} - \frac{1}{a^2} = \\
&= \frac{2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2};
\end{aligned}
$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{a^2}} = \frac{1}{a}.$$

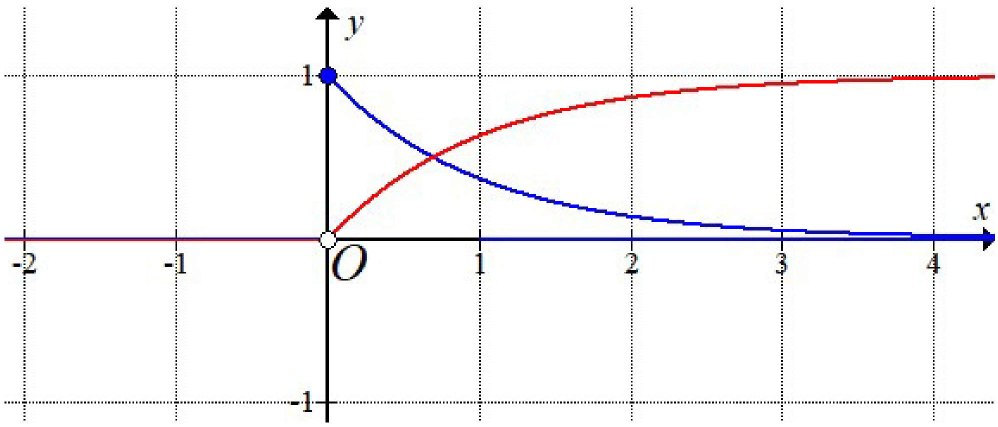
c) Prikažite grafički funkciju gustoće i funkciju razdiobe vjerojatnosti eksponencijalne slučajne varijable $X \sim Ex(1)$.

Rješenje: Za $a = 1$ dobivamo funkcije

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-x}, & \text{za } x \geq 0; \\ 0, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-x}, & \text{za } x \geq 0, \\ 0, & \text{za } x < 0. \end{cases}$$

čiji su grafovi prikazani na slici 2.



Slika 2.

3. Brunhilda je utvrdila da između dvaju uzastopnih *like*-ova njezinih objava na Instagramu proteknu prosječno dvije minute. Neka je X eksponencijalna slučajna varijabla koja označava vrijeme proteklo između dvaju uzastopnih *like*-ova Brunhildine objave na Instagramu. Odredite vjerojatnost da između dvaju uzastopnih *like*-ova Brunhildine objave na Instagramu protekne:

a) točno minuta i pol;

Rješenje: Pretpostavimo da je $X \sim Ex(a)$, za neki $a > 0$. Očekivanje varijable X (iskazano u minutama) je očito jednako 2. Zbog toga mora vrijediti jednakost:

$$\frac{1}{a} = 2.$$

Odatle lako slijedi $a = \frac{1}{2} = 0.5$ Dakle, $X \sim Ex(0.5)$.

Tražimo $P(X = 1.5)$. Ta vjerojatnost je jednaka nuli. (*Podsjetnik*: Kad god je X neprekidna slučajna varijabla, onda za svaki $b \in R(X)$ vrijedi $P(X = b) = 0$.)

b) najviše jedna minuta;

Rješenje: Tražimo $P(X \le 1)$. Prema definiciji funkcije F razdiobe vjerojatnosti varijable X, ta vjerojatnost je jednaka:

$$p = F(1) = 1 - \mathrm{e}^{-0.5 \cdot 1} = 1 - \mathrm{e}^{-0.5} \approx 0.39347.$$

c) između dvije i četiri minute;

Rješenje: Tražimo $P(2 \le X \le 4)$. Ponovno prema definiciji funkcije F razdiobe vjerojatnosti varijable X, ta vjerojatnost je jednaka:

$$\begin{aligned} p &= F(4) - F(2) = \\ &= \left(1 - \mathrm{e}^{-0.5 \cdot 4}\right) - \left(1 - \mathrm{e}^{-0.5 \cdot 2}\right) = \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-2} - 1 + \mathrm{e}^{-1} = \\ &= \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2} \approx 0.23254. \end{aligned}$$

d) najmanje tri minute.

Rješenje: Tražimo $P(X \ge 3)$. Ponovno prema definiciji funkcije F razdiobe vjerojatnosti varijable X, ta vjerojatnost je jednaka:

$$p = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0.5 \cdot 3}\right) = \mathrm{e}^{-1.5} \approx 0.22313.$$

4. Neka su $X \sim Ex(a)$ i $s, t > 0$. Dokažite da je $P(X > s + t \mid X > t) = P(X > s)$. Interpretirajte ovo svojstvo.

Rješenje: Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
P(X > t + s \mid X > t) &= \frac{P((X > t + s) \cdot (X > t))}{P(X > t)} = \\
&= \frac{P(X > t + s)}{P(X > t)} = \\
&= \frac{1 - P(X \le t + s)}{1 - P(X \le t)} = \\
&= \frac{1 - F(t + s)}{1 - F(t)} = \\
&= \frac{1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-a \cdot (t+s)}\right)}{1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-a \cdot t}\right)} = \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-a \cdot (t+s)}}{\mathrm{e}^{-a \cdot t}} = \\
&= \mathrm{e}^{-a \cdot s} = \\
&= 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-a \cdot s}\right) = \\
&= 1 - F(s) = \\
&= P(X > s),
\end{aligned}
$$

što je i trebalo dokazati. Netom dokazano svojstvo nazivamo **svojstvo „zaboravljanja“** i ono je karakteristično za eksponencijalnu razdiobu. Riječima ga možemo iskazati ovako:

Ako se neki događaj ***nije*** *dogodio u prvih* t vremenskih jedinica (u odnosu na trenutak u kojemu promatramo ishod), *onda je vjerojatnost da će se taj događaj dogoditi u sljedećih* s vremenskih jedinica (tj. *u prvih* $t + s$ vremenskih jedinica) *jednaka vjerojatnosti da će se taj događaj dogoditi u prvih* s vremenskih jedinica. Drugim riječima, vjerojatnost pojave događaja u neposrednoj budućnosti uvjetno je nezavisan o vjerojatnosti pojave istoga događaja u prošlosti.

Napomena/zadatak: Usporedite ovo svojstvo s analognim svojstvom geometrijske slučajne varijable (također karakterističnim za tu varijablu).