4.5. GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)

GRANIČNA VRIJEDNOST NIZA.
GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE.

4.5.1. POJAM NIZA

- *Svaku* funkciju $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazivamo *niz realnih brojeva* ili, kraće, **niz**. Moguće je i da domena niza bude neki konačan podskup skupa $\mathbb{N}$. U tom slučaju govorimo o **konačnom nizu** realnih brojeva.
- Ne istaknemo li drugačije, pretpostavljamo da je prirodna domena svakoga niza skup $\mathbb{N}$. Zbog toga smatramo da je niz jednoznačno zadan definiranjem *pravila* prema kojemu je svakom prirodnom broju (elementu domene) pridružen neki realan broj (element kodomene).
- Nizove obično označavamo s a_n, b_n, ..., pri čemu indeksni zapis a_n zapravo znači $a(n)$.
- a_1 nazivamo **prvi član** niza, a_2 nazivamo **drugi član** niza itd.
- Konačan uređeni skup $(a_1, \ldots, a_n)$ nazivamo **skup prvih** n **članova niza**.
- **Važno:** Najčešći grafički prikaz niza je *skup točaka na brojevnom pravcu*. Niz se obično ne prikazuje u koordinatnom sustavu u ravnini jer nikoja dva elementa niza nije moguće spojiti ravninskom krivuljom (između dva uzastopna člana niza nema drugih članova niza).

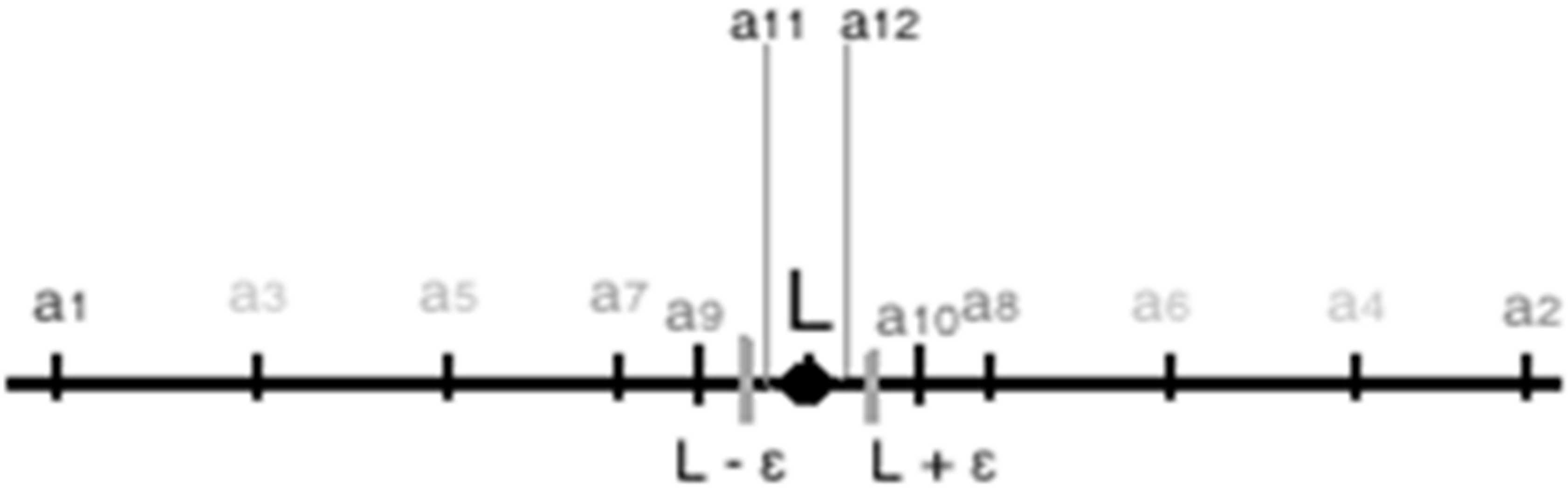
4.5.2. OMEĐENI I MONOTONI NIZOVI

- Pojmove omeđenosti i monotonosti funkcija možemo posebno primijeniti i na nizove.
- Odgovarajuće definicije preinačuju se u sljedeće:
- Niz (a_n) je *omeđen odozdo* ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \geq m$.
- Niz (a_n) je *omeđen odozgo* ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \leq M$.
- Niz (a_n) je (*strogo*) *rastući* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \leq a_{n+1}$ (odnosno, $a_n < a_{n+1}$).
- Niz (a_n) je (*strogo*) *padajući* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \geq a_{n+1}$ (odnosno, $a_n > a_{n+1}$).

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA

- Neka je (a_n) zadani niz.
- Ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ za koji je istinita implikacija:
  - $n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$,
- onda broj L nazivamo **granična vrijednost** ili **limes** niza (a_n).
- Gornja definicija geometrijski se može interpretirati ovako:
- Ako se od broja L na brojevnom pravcu pomaknemo za *proizvoljno malu udaljenost* ulijevo i udesno, u barem jednom pomicanju "preskočit" ćemo beskonačno (točnije, prebrojivo) mnogo članova niza, a nećemo "preskočiti" konačno mnogo članova niza
- Činjenicu da je L granična vrijednost (limes) niza (a_n) zapisujemo ovako: $L = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ ili $L = \lim\limits_{n} a_n$

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA



Unutar *bilo kojega* otvorenoga intervala oko L nalazi se *beskonačno* (preciznije, *prebrojivo*) *mnogo* članova niza.
Izvan *bilo kojega* otvorenoga intervala oko L nalazi se *konačno mnogo* članova niza.

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA

- Može se pokazati: Ako limes niza postoji, on je jedinstven.
- Svaki niz koji ima limes nazivamo **konvergentan niz**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan** ili, jednostavnije, da **ne konvergira**.
- Kažemo da niz (a_n) **divergira prema** $+\infty$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > \varepsilon$.
- Tada pišemo: $\lim\limits_{n} a_n = +\infty$
- Pritom simbol ∞ **nije** broj, ali ga ponekad shvaćamo kao broj.
- Jednakost $L = \lim\limits_{n} a_n$ uobičajeno čitamo i kao:
- *Niz* (a_n) **konvergira prema** *broju* L.

4.5.4. NAPOMENA

- Može se dogoditi da “pomicanjem” od kandidata za limes niza ulijevo ili udesno “preskočimo” beskonačno (preciznije, prebrojivo) mnogo članova niza, ali i da istodobno beskonačno (preciznije, prebrojivo) mnogo članova niza ostanu „nepreskočeni”.
- U takvom slučaju govorimo o *gomilištu* niza.
- Npr. niz $a_n = (-1)^n$ *nema* graničnu vrijednost, ali ima dva različita gomilišta (to su -1 i 1).
- Niz $b_n = \cos(n \cdot \pi/2)$ također *nema* graničnu vrijednost, ali ima tri različita gomilišta: -1 , 0 i 1.
- Svaka granična vrijednost niza je ujedno i gomilište niza, ali gomilište niza ne mora biti granična vrijednost niza.

4.5.5. NAPOMENA

- Prema definiciji apsolutne vrijednosti vrijedi:

$$(|x| < a) \Leftrightarrow (-a < x < a).$$

- Kad se od granične vrijednosti L niza (a_n) pomaknemo ulijevo za $\varepsilon > 0$, dođemo u točku $L - \varepsilon$.
- Kad se od granične vrijednosti L niza (a_n) pomaknemo udesno za $\varepsilon > 0$, dođemo u točku $L + \varepsilon$.
- Potom tražimo sve članove niza (a_n) koji se nalaze u intervalu $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon\rangle$. Njih treba biti beskonačno (preciznije, prebrojivo) mnogo.
- To nas vodi na rješavanje nejednadžbe:
- $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$
- po nepoznanici n.

4.5.5. NAPOMENA

- Iz te nejednadžbe slijedi:

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon,$$

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

- (Posljednja nejednakost izravno slijedi iz definicije apsolutne vrijednosti.) Otuda se zapravo dobiva nejednakost koja se pojavljuje u definiciji granične vrijednosti.
- Dakle, za *svaki* $\varepsilon > 0$ prilikom određivanja granične vrijednosti trebamo efektivno odrediti koliko ukupno prirodnih brojeva zadovoljava nejednakost $|a_n - L| < \varepsilon$, a koliko ih ne zadovoljava.
- U prvom slučaju odgovor treba biti: *beskonačno* (preciznije, *prebrojivo*) *mnogo*, a u drugom *konačno mnogo*.

4.5.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA KONVERGENTNIH NIZOVA

- **1.** („teorem o sendviču”) Neka su (a_n), (b_n) i (c_n) nizovi takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ (osim možda za konačno mnogo prirodnih brojeva) vrijedi nejednakost $a_n \leq b_n \leq c_n$.
- **a)** Ako su nizovi (a_n) i (c_n) konvergentni i imaju istu graničnu vrijednost L, onda je i niz (b_n) konvergentan i ima graničnu vrijednost L.
- **b)** Ako niz (a_n) divergira prema $+\infty$, i ostala dva niza divergiraju prema $+\infty$.
- **2.** Svaki konvergentan niz je omeđen.
- **3.** Svaki omeđen i monoton niz je konvergentan.
- **Napomena**: Svojstva 1. i 3. korisna su za dokazivanje *postojanja* granične vrijednosti niza, ali vrlo često ne i za njezino efektivno određivanje.
- **Oprez**: Tvrdnja 1.b) ne mora vrijediti ako postavimo (samo) zahtjev da niz (a_n) nije konvergentan.
- Npr. ako su $a_n = \sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right)$ i $b_n = 1 + \dfrac{1}{n}$
- onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $a_n \leq b_n$. Međutim, niz (a_n) nije konvergentan (ali ima tri gomilišta), dok niz (b_n) konvergira prema 1.

4.5.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA KONVERGENTNIH NIZOVA

- 4. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi takvi da je

$$L_1 := \lim_n (a_n) \text{ i } L_2 := \lim_n (b_n)$$

- Tada je:

a) $\lim_n (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$;

b) $\lim_n (a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2$;

c) $(L_2 \neq 0) \Rightarrow \lim_n \left(\dfrac{a_n}{b_n} \right) = \dfrac{L_1}{L_2}$;

d) $(a_n,\ L_1 > 0) \Rightarrow \lim_n \left((a_n)^c \right) = (L_1)^c,\ \forall c \in \mathbb{R}$;

e) $\lim_n \left(c^{a_n} \right) = c^{L_1},\ \forall c > 0.$

4.5.7. NEKE POSEBNE GRANIČNE VRIJEDNOSTI NIZOVA

$$\mathbf{1}.\lim_{n}\left(\pm\frac{a}{n^{k}}\right)=0,\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

$$\mathbf{2}.\lim_{n}\left(a^{n}\right)=\begin{cases}0, \text{ za } 0<a<1;\\ +\infty, \text{ za } a>1.\end{cases}$$

$$\mathbf{3}.\lim_{n}\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}^{a};$$

$$\mathbf{4}.\lim_{n}\left(\sqrt[n]{a}\right)=1,\ \forall a>0;$$

$$\mathbf{5}.\lim_{n}\left(\sqrt[n]{n}\right)=1.$$

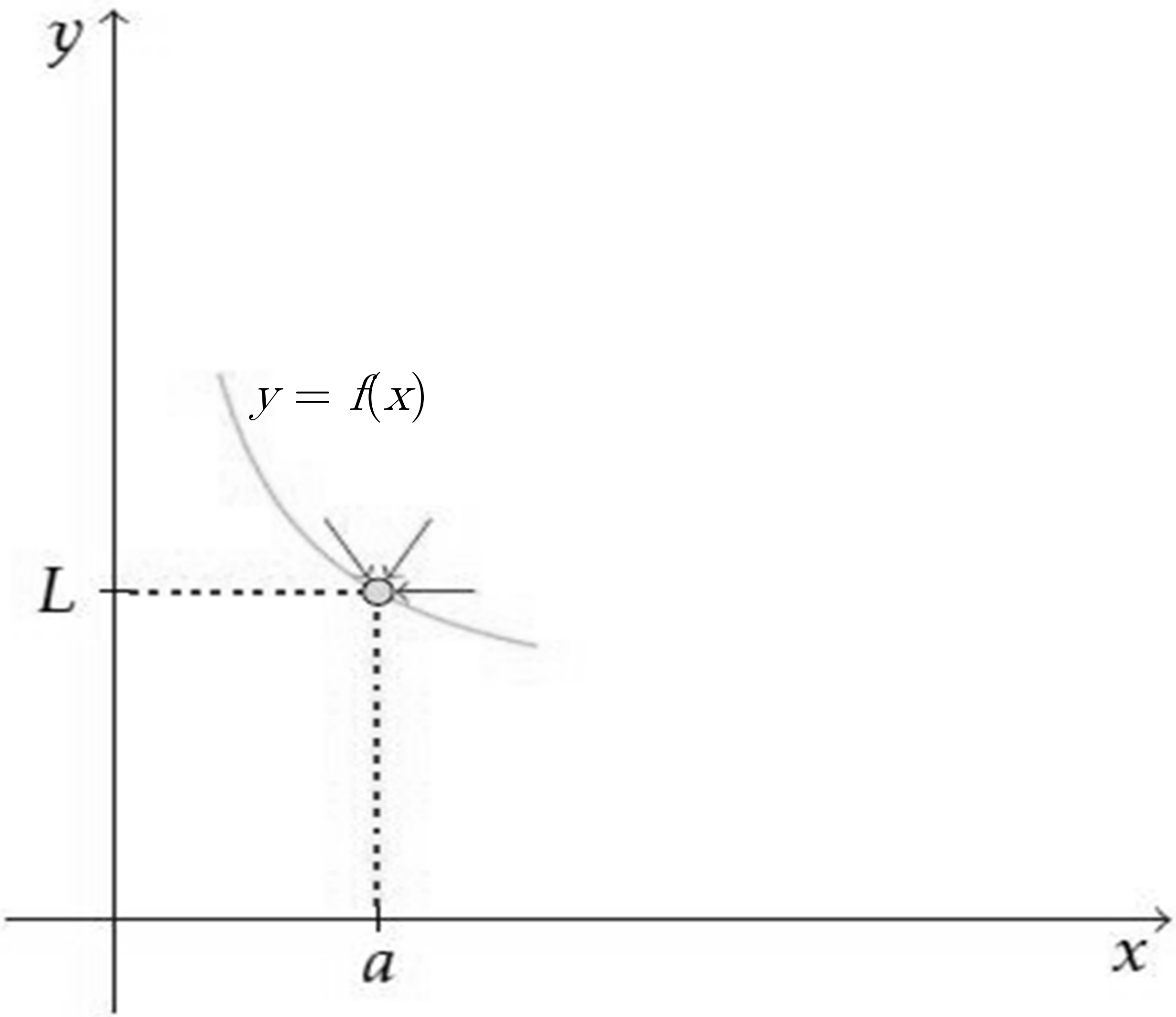
4.5.8. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE U TOČKI

- Pojam limesa niza poopćuje se na graničnu vrijednost (limes) *bilo koje* realne funkcije jedne realne varijable.
- Neka su $\langle a,\ b\rangle \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \langle a,\ b\rangle$ i f realna funkcija jedne realne varijable definirana na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ osim možda u točki c.
- Ako za *bilo koji* niz (x_n) takav da su $x_n \in \langle a,\ b\rangle \backslash \{c\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_n x_n = c$, niz $f(x_n)$ konvergira ka (konstantnoj) vrijednosti L, tada kažemo da je vrijednost L **granična vrijednost (limes) funkcije** f **u točki** c.
- Ako postoji limes funkcije f u točki c, onda je on jedinstven. Zbog toga pišemo: $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$.
- Moguće je da niz $f(x_n)$ ne konvergira. To ne mora značiti da taj niz divergira prema $+\infty$ ili $-\infty$. Npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ za } x \geq 0, \\ 1, \text{ za } x < 0 \end{cases}$$

- nema limes u točki $c = 0$, a pritom nijedan niz $f(x_n)$ ne divergira u $+\infty$ ili $-\infty$ kad je $\lim\limits_n x_n = 0$.

4.5.8. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE U TOČKI



4.5.9. NEKE POSEBNE GRANIČNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA

1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{a}{x^n}\right)=0,\ \forall n\in\mathbb{N}.$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^n\right)=+\infty, \forall n\in\mathbb{N}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin(a\cdot x)}{b\cdot x}\right)=\dfrac{a}{b},\ \forall b\neq 0.$

4. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{\sin(a\cdot x)}{b\cdot x}\right)=0,\ \forall b\neq 0.$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+a\cdot x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^a,\ \forall a\in\mathbb{R}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right)=\ln a,\ \forall a>0.$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)=1.$

4.5.9. NEKA KORISNA SVOJSTVA GRANIČNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

- Za limese funkcija vrijede sva svojstva navedena kod limesa nizova.
- Posebno treba istaknuti sljedeća svojstva korisna za rješavanje zadataka:
- 1. (*svojstvo zamjene varijabli*) Za bilo koju realnu funkciju g definiranu na intervalu $\langle a, b\rangle$ vrijedi:
- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{t \to g(c)} f\big(g(t)\big)$.
- Ovo svojstvo prikladno je primijeniti ako se zamjenom varijabli dobije neka od "poznatih" graničnih vrijednosti.
- 2. Ako su $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L_1 > 0$ i $\lim\limits_{x \to c} g(x) = L_2$, onda je:

$$\lim_{x \to c}\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = (L_1)^{L_2}$$

4.5.9. NEKA KORISNA SVOJSTVA GRANIČNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE

- 3. Ako je $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a > 0$, onda vrijedi jednakost:

$$\lim_{x\to c}\left(\ln\left(f(x)\right)\right) = \ln\left(\lim_{x\to c} f(x)\right) = \ln a.$$

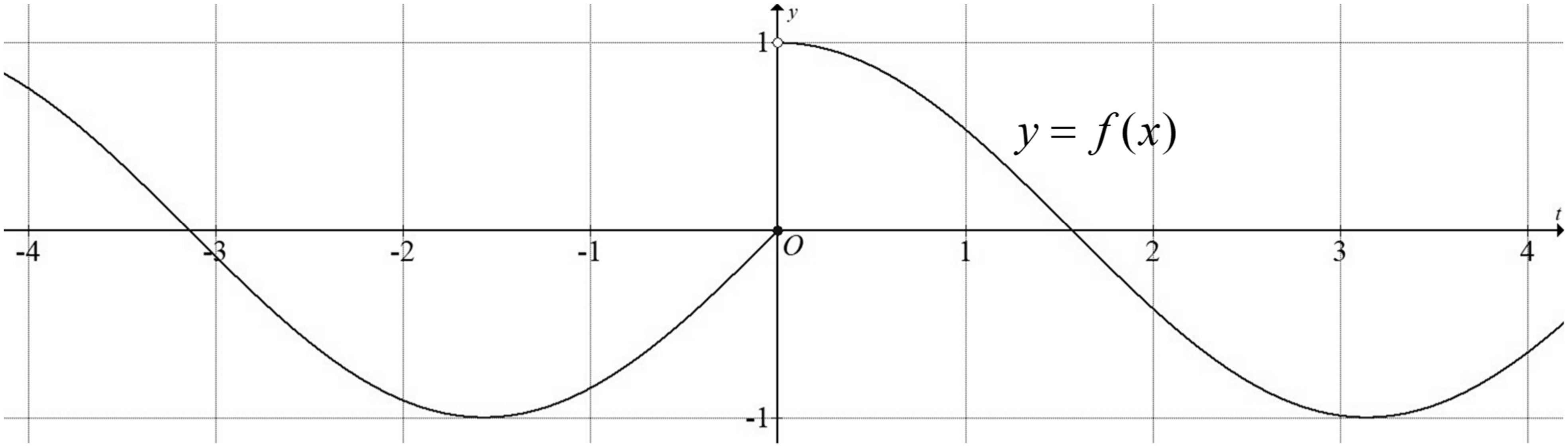
- Napomena: Umjesto logaritamske funkcije u gornjoj jednakosti može pisati bilo koja *neprekidna* funkcija, tj. – grubo rečeno - funkcija čiji graf možemo nacrtati ne dižući olovku s papira (takve funkcije su sve *elementarne* funkcije, npr. polinomi, sinus, kosinus, eksponencijalna i logaritamska funkcija itd.)
- 4. Ako su $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 1$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$, onda je:

$$\lim_{x\to c}\left(\left(f(x)\right)^{g(x)}\right) = \mathrm{e}^{\left(\lim\limits_{x\to c}\left(\left(f(x)-1\right)\cdot g(x)\right)\right)}$$

4.5.10. JEDNOSTRANE GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)

- U definiciji granične vrijednosti (limesa) može se postaviti stroži zahtjev da niz koji konvergira točki c nužno bude strogo rastući ili strogo padajući.
- U prvom slučaju govorimo o **graničnoj vrijednosti (limesu) slijeva** i pišemo: $L^- := \lim_{x \to c-} f(x)$
- U drugom slučaju govorimo o **graničnoj vrijednosti (limesu) zdesna** i pišemo: $L^+ := \lim_{x \to c+} f(x)$
- Takve granične vrijednosti ima smisla određivati za funkcije definirane na segmentu ili poluotvorenom intervalu.
- Pravila za računanje takvih graničnih vrijednosti su ista kao i računanje "običnih" graničnih vrijednosti.
- Najčešći slučaj je da su granične vrijednosti slijeva i zdesna u nekoj točki c međusobno jednake, pa se granična vrijednost funkcije u točki c u takvom slučaju *definira* kao granična vrijednost slijeva/zdesna.
- Ta definicija je ekvivalentna našoj definiciji.

4.5.10. JEDNOSTRANE GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)



$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0-} f(x) = 0, \\ f(0) = 0, \\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1. \end{cases}$$

4.5.11. NEKE POSEBNE JEDNOSTRANE GRANIČNE VRIJEDNOSTI

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty,\qquad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty.$

2. $\lim\limits_{x\to 0-} \operatorname{ctg} x = -\infty,\qquad \lim\limits_{x\to 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty.$

3. $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\dfrac{\pi}{2},\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{2}.$

4. $\lim\limits_{x\to -\infty} \operatorname{arcctg} x = 0,\qquad \lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$

5. $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\mathrm{e}^{x}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \left(\mathrm{e}^{-x}\right) = 0.$

1. Ispišite prvih pet članova svakoga od sljedećih nizova:

a) $a_n = n^2 + 1;$

b) $b_n = \sin\left(n \cdot \dfrac{\pi}{2}\right);$

c) $c_n = \dfrac{1}{n}.$

Rješenje: U pravilo svakoga niza uvrštavamo $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Dobivamo:

a) $a_1 = 1^2 + 1 = 2,$

$a_2 = 2^2 + 1 = 5,$

$a_3 = 3^2 + 1 = 10,$

$a_4 = 4^2 + 1 = 17,$

$a_5 = 5^2 + 1 = 26.$

b) $b_1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1,$

$b_2 = \sin \pi = 0,$

$b_3 = \sin\left(\dfrac{3}{2} \cdot \pi\right) = -1,$

$b_4 = \sin(2 \cdot \pi) = 0,$

$b_5 = \sin\left(\dfrac{5}{2} \cdot \pi\right) = 1.$

c) $c_1 = \dfrac{1}{1} = 1,$

$c_2 = \dfrac{1}{2},$

$c_3 = \dfrac{1}{3},$

$c_4 = \dfrac{1}{4},$

$c_5 = \dfrac{1}{5}.$

2. **Isključivo pomoću definicije limesa niza** dokažite da je $\lim\limits_{n}\left(\frac{1}{n}\right)=0$.

Rješenje: Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan, ali fiksiran. Tada tražimo $n_0 = n_0(\varepsilon)$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ koji je veći od n_0 vrijedi nejednakost

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon .$$

Ta nejednakost je ekvivalentna nejednakosti

$$\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon ,$$

odnosno

$$\frac{1}{n}<\varepsilon .$$

Odatle je

$$n>\frac{1}{\varepsilon},$$

pa vidimo da možemo uzeti

$$n_0=\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil.$$

Time je dokazana tvrdnja

$$\lim_{n}\left(\frac{1}{n}\right)=0 .$$

3. Zadani su nizovi

$$a_n = \frac{4 \cdot n + 1}{1 - 2 \cdot n},$$
$$b_n = \frac{1 - 4 \cdot n}{12 \cdot n + 5}.$$

Neka su L_1 i L_2 redom njihove granične vrijednosti.

a) Odredite L_1 i L_2.

Rješenje: Podijelimo brojnik i nazivnik s n, pa primijenimo rezultat prethodnoga zadatka. Dobivamo:

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_n \left(\frac{4 \cdot n + 1}{1 - 2 \cdot n} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{4 + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n} - 2} \right) = \\ &= \frac{\lim_n (4) + \lim_n \left(\frac{1}{n} \right)}{\lim_n \left(\frac{1}{n} \right) - \lim_n (2)} = \\ &= \frac{4 + 0}{0 - 2} = \\ &= -2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_n \left(\frac{1 - 4 \cdot n}{12 \cdot n + 5} \right) = \\ &= \lim_n \left(\frac{\frac{1}{n} - 4}{12 + 5 \cdot \frac{1}{n}} \right) = \\ &= \frac{\lim_n \left(\frac{1}{n} \right) - \lim_n (4)}{\lim_n (12) + \lim_n \left(\frac{5}{n} \right)} = \\ &= \frac{0 - 4}{12 + 0} = \\ &= \frac{-1}{3}. \end{aligned}$$

b) Odredite najmanji $k \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|a_k - L_1| < 0.0001 .$$

Rješenje: U zadanu nejednakost $|a_k - L_1| < 0.0001$ uvrstimo pravilo niza a_n (pri čemu umjesto varijable *n* pišemo varijablu *k*) i $L_1 = -2$. Dobivamo:

$$\left|\frac{4 \cdot k + 1}{1 - 2 \cdot k} + 2\right| < 0.0001,$$
$$\left|\frac{3}{1 - 2 \cdot k}\right| < 0.0001,$$
$$\frac{|3|}{\left|\underbrace{1 - 2 \cdot k}_{<0}\right|} < 0.0001,$$
$$\frac{3}{2 \cdot k - 1} < 0.0001, \quad / \cdot \frac{2 \cdot k - 1}{0.0001}$$
$$2 \cdot k - 1 > 30\ 000,$$
$$2 \cdot k < 30\ 001, \quad /:2$$
$$k > 15\ 000.5,$$
$$k_{\min} = 15\ 001.$$

Dakle, traženi je broj jednak 15 001.

c) Odredite najmanji $l \in \mathbb{N}$ takav da je

$$|b_l - L_2| < 0.0001 .$$

Rješenje: Postupimo analogno kao u prethodnom podzadatku. Dobivamo:

$$\left|\frac{1-4\cdot l}{12\cdot l+5}+\frac{1}{3}\right| < 0.0001,$$

$$\left|\frac{(1-4\cdot l)\cdot 3+1\cdot(12\cdot l+5)}{3\cdot(12\cdot l+5)}\right| < 0.0001,$$

$$\left|\frac{8}{3\cdot(12\cdot l+5)}\right| < 0.0001,$$

$$\frac{|8|}{\left|3\cdot\underbrace{(12\cdot l+5)}_{>0}\right|} < 0.0001,$$

$$\frac{8}{36\cdot l+15} < 0.0001, \qquad / \cdot \frac{36\cdot l+15}{0.0001}$$

$$36\cdot l+15 > 80000,$$

$$l > 2\ 221.8,$$

$$l_{\min} = 2\ 222.$$

4. Odredite granične vrijednosti sljedećih nizova:

a) $a_n = \dfrac{2 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1}{4 \cdot n^2 - 5 \cdot n - 1}$;

Rješenje: Podijelimo brojnik i nazivnik pravila niza s n^2, pa primijenimo svojstvo

$$\lim_n \left(\frac{1}{n} \right) = \lim_n \left(\frac{1}{n^2} \right) = 0.$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left(\frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{4 - \frac{5}{n} - \frac{1}{n^2}} \right) = \\ &= \frac{\lim_n (2) + \lim_n \left(\frac{3}{n} \right) + \lim_n \left(\frac{1}{n^2} \right)}{\lim_n (4) - \lim_n \left(\frac{5}{n} \right) - \lim_n \left(\frac{1}{n^2} \right)} = \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{4 - 0 - 0} = \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) $b_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n-1}-1}$;

Rješenje: Podijelimo brojnik i nazivnik pravila niza s 2^{n+1}, pa primijenimo jednakost

$$\lim_n \left(a^n\right) = +\infty, \ \forall a > 1.$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \left(\frac{1+\dfrac{1}{2^{n+1}}}{\dfrac{2^{n-1}}{2^{n+1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}} \right) = \\
&= \lim_n \left(\frac{1+\dfrac{1}{2^{n+1}}}{2^{-2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}} \right) = \\
&= \frac{\lim_n (1) + \lim_n \left(\dfrac{1}{2^{n+1}} \right)}{\lim_n \left(2^{-2}\right) - \lim_n \left(\dfrac{1}{2^{n+1}} \right)} = \\
&= \frac{1+0}{2^{-2}-0} = \\
&= \frac{1}{2^{-2}} = \\
&= 4.
\end{aligned}$$

c) $c_n = 2\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$;

Rješenje: Pravilo niza najprije transformirajmo ovako:

$$
\begin{aligned}
2\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) &= 2\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)} = \\
&= 2\cdot\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \\
&= 2\cdot\frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}.
\end{aligned}
$$

Sada podijelimo brojnik i nazivnik dobivenoga izraza s $\sqrt{n}$, pa primijenimo rezultat zadatka 2. Dobivamo:

$$
\begin{aligned}
L &= 2\cdot\lim_n\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{n}{n}+\frac{\sqrt{n}}{n}}+1}\right) = \\
&= 2\cdot\lim_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{n}{n^2}}}+1}\right) = \\
&= 2\cdot\lim_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{n}}}+1}\right) = \\
&= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \\
&= 2\cdot\frac{1}{1+1} = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

d) $d_n = n - \sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}$;

Rješenje: Transformirajmo pravilo niza primjenom formule za razliku kubova. Imamo redom:

$$d_n = \left(n - \sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}\right)\cdot\frac{\left(n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}\right)}{\left(n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}\right)} =$$

$$= \frac{n^3 - \left(\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}\right)^3}{n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}} =$$

$$= \frac{n^3 - \left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)}{n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}} =$$

$$= \frac{6\cdot n^2 - 1}{n^2 + n\cdot\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1} + \sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}}.$$

Sada podijelimo brojnik i nazivnik dobivenoga izraza s n^2. Dobivamo:

$$d_n = \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{\sqrt[3]{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}}{n} + \frac{\sqrt[3]{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}}{n^2}} =$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{\frac{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}{n^3}} + \sqrt[3]{\frac{\left(n^3 - 6\cdot n^2 + 1\right)^2}{n^6}}} =$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(\frac{n^3 - 6\cdot n^2 + 1}{n^3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{6 - \frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt[3]{1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^3}} + \sqrt[3]{\left(1 - \frac{6}{n} + \frac{1}{n^3}\right)^2}}.$$

Tako sada odmah slijedi da je tražena granična vrijednost jednaka:

$$\begin{aligned}L&=\frac{6-0}{1+\sqrt[3]{1-0+0}+\sqrt[3]{(1-0+0)^2}}=\\&=\frac{6}{1+1+1}=\\&=2.\end{aligned}$$

e) $e_n=\left(1+\frac{1}{4\cdot n}\right)^{2\cdot n}$;

Rješenje: Koristimo jednakost

$$\lim_n\left(\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right)=\mathrm{e}^a,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

Imamo redom:

$$\begin{aligned}L&=\lim_n\left(\left(1+\frac{\frac{1}{4}}{n}\right)^n\right)^2=\\&=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{4}}\right)^2=\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}.\end{aligned}$$

f) $f_n = \left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{2\cdot n+1}$.

Rješenje: Uvedimo zamjenu

$$t := n+2.$$

Kad $n \to +\infty$, onda očito i $t \to +\infty$.

Nadalje, iz jednakosti $t := n+2$ slijedi

$$n = t-2,$$

pa imamo redom:

$$\begin{aligned}
L &= \lim_t \left(\left(\frac{(t-2)+3}{t} \right)^{2\cdot(t-2)+1} \right) = \\
&= \lim_t \left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{2\cdot t-3} \right) = \\
&= \lim_t \left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{2\cdot t} \cdot \left(\frac{t+1}{t} \right)^{-3} \right) = \\
&= \left(\lim_t \left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{2\cdot t} \right) \right) \cdot \left(\lim_t \left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{-3} \right) \right) = \\
&= \left(\lim_t \left(\left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{t} \right)^2 \right) \right) \cdot \left(\lim_t \left(\left(\frac{t+1}{t} \right)^{-3} \right) \right) = \\
&= \left(\lim_t \left(\left(\left(1+\frac{1}{t} \right)^{t} \right)^2 \right) \right) \cdot \left(\lim_t \left(\left(1+\frac{1}{t} \right)^{-3} \right) \right) = \\
&= \left(\left(\lim_t \left(\left(1+\frac{1}{t} \right)^{t} \right) \right)^2 \right) \cdot \left(\lim_t \left(\left(1+\frac{1}{t} \right)^{-3} \right) \right) = \\
&= \left(\mathrm{e}^1 \right)^2 \cdot (1+0)^{-3} = \\
&= \mathrm{e}^2.
\end{aligned}$$

5. Odredite sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-1}{2\cdot x-2}\right)$;

Rješenje: Rastavimo na faktore brojnik i nazivnik racionalne funkcije pod limesom. Imamo redom:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)\cdot(x+1)}{2\cdot(x-1)}\right)= \\ &= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x+1}{2}\right)= \\ &= \frac{1+1}{2}= \\ &= 1. \end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to(-2)}\left(\dfrac{x^3+8}{4\cdot x+8}\right)$;

Rješenje: Postupimo analogno kao u prethodnom podzadatku. Dobivamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to -2}\left(\frac{(x+2)\cdot\left(x^2-2\cdot x+4\right)}{4\cdot(x+2)}\right)= \\ &= \lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2\cdot x+4}{4}\right)= \\ &= \frac{(-2)^2-2\cdot(-2)+4}{4}= \\ &= 3. \end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{4\cdot\sqrt{x}-8}{x-4}\right)$;

Rješenje: Primijetimo da vrijedi jednakost

$$x-4=\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2=\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right),\ \forall x\geq 0.$$

Tako sada imamo:

$$\begin{aligned} L&=\lim_{x\to 4}\frac{4\cdot\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x}+2\right)}=\\ &=\lim_{x\to 4}\left(\frac{4}{\sqrt{x}+2}\right)=\\ &=\frac{4}{\sqrt{4}+2}=\\ &=1. \end{aligned}$$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4\cdot\sin x}{\sin(2\cdot x)}\right)$.

Rješenje: Primjenom identiteta

$$\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R},$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} L&=4\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{2\cdot\sin x\cdot\cos x}\right)=\\ &=\frac{4}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\\ &=2\cdot\frac{1}{\cos 0}=\\ &=2. \end{aligned}$$

6. Odredite sljedeće granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\cos x}{\pi-2\cdot x}\right)$;

Rješenje: Uvedimo zamjenu

$$t := x-\frac{\pi}{2}.$$

Kad $x\to\frac{\pi}{2}$, onda $t\to 0.$

Nadalje, iz $t := x-\frac{\pi}{2}$ slijedi

$$x = t+\frac{\pi}{2}.$$

Tako imamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\pi-2\cdot\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}\right)= \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\cos t\cdot\cos\frac{\pi}{2}-\sin t\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\pi-2\cdot t-\pi}\right)= \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{-\sin t}{-2\cdot t}\right)= \\ &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{2\cdot t}\right)= \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{3\cdot x}-e^{x}}{2\cdot x}\right)$;

Rješenje: Koristimo identitet:

$$\begin{aligned} e^{3\cdot x}-e^{x} &= e^{x}\cdot\left(e^{2\cdot x}-1\right)= \\ &= e^{x}\cdot\left(\left(e^{x}\right)^{2}-1^{2}\right)= \\ &= e^{x}\cdot\left(e^{x}-1\right)\cdot\left(e^{x}+1\right),\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}\cdot(e^{x}-1)\cdot(e^{x}+1)}{2\cdot x}\right)= \\ &= \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}-1}{x}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x}\cdot\left(e^{x}+1\right)}{2}\right)\right)= \\ &= 1\cdot\frac{1\cdot(1+1)}{2}=1. \end{aligned}$$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4\cdot x+5}\right)$;

Rješenje: Funkciju pod graničnom vrijednosti transformiramo ovako:

$$\left(x-\sqrt{x^2-4\cdot x+5}\right)\cdot\frac{\left(x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}\right)}=$$
$$=\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-4\cdot x+5}\right)^2}{x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}=$$
$$=\frac{x^2-\left(x^2-4\cdot x+5\right)}{x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}=$$
$$=\frac{x^2-x^2+4\cdot x-5}{x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}=$$
$$=\frac{4\cdot x-5}{x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}.$$

Brojnik i nazivnik dobivenoga izraza podijelimo s x, pa dobijemo:

$$\frac{4\cdot x-5}{x+\sqrt{x^2-4\cdot x+5}}=$$
$$=\frac{4-5\cdot\frac{1}{x}}{1+\sqrt{\frac{x^2-4\cdot x+5}{x^2}}}=$$
$$=\frac{4-5\cdot\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{x^2}}}.$$

Zbog toga je tražena granična vrijednost jednaka:

$$L=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-5\cdot\frac{1}{x}}{1+\sqrt{1-4\cdot\frac{1}{x}+5\cdot\frac{1}{x^2}}}\right)=$$
$$=\frac{4-0}{1+\sqrt{1-0+0}}=$$
$$=\frac{4}{1+1}=2.$$

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\cdot\left(\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2+1\right)\right)\right)$;

Rješenje: Funkciju pod graničnom vrijednosti transformiramo ovako:

$$x^2\cdot\left(\ln\left(x^2-1\right)-\ln\left(x^2+1\right)\right)=x^2\cdot\ln\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)=$$
$$=\ln\left(\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}\right).$$

Uvedimo zamjenu

$$t:=x^2+1.$$

Kad $x\to-\infty,$ onda $t\to+\infty$.

Nadalje, iz $t:=x^2+1$ slijedi

$$x^2=t-1.$$

Tako je tražena granična vrijednost jednaka:

$$L=\ln\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{(t-1)-1}{t}\right)^{t-1}\right)\right)=$$
$$=\ln\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\frac{t-2}{t}\right)^{t-1}\right)\right)=$$
$$=\ln\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-1}\right)\right)=$$
$$=\ln\left(\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\right)\right)\cdot\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-1}\right)\right)\right)=$$
$$=\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\cdot(1-0)^{-1}\right)=$$
$$=\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=$$
$$=-2.$$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^{6\cdot x}\right)$.

Rješenje: Postupimo analogno kao u rješenju prethodnoga podzadatka:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{(x+2)-2}{x+2}\right)^{6\cdot x}\right)= \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(\frac{x+2}{x+2}-\frac{2}{x+2}\right)^{6\cdot x}\right)= \\
&= \lim_{x\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x+2}\right)^{6\cdot x}\right)= \\
&= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena: } t := x+2, \\ \text{kad } x\to+\infty,\ \text{onda } t\to+\infty, \\ x = t-2\end{array}\right\}= \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{6\cdot(t-2)}\right)= \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{6\cdot t-12}\right)= \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{6\cdot t}\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-12}\right)= \\
&= \lim_{t\to+\infty}\left(\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\right)^{6}\cdot\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-12}\right)= \\
&= \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\right)^{6}\right)\right)\cdot\left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-12}\right)\right)= \\
&= \left(\lim_{t\to+\infty}\left(\left(1-\frac{2}{t}\right)^{t}\right)\right)^{6}\cdot\left(\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)\right)^{-12}= \\
&= \left(\mathrm{e}^{-2}\right)^{6}\cdot(1-0)^{-12}= \\
&= \mathrm{e}^{-12}\cdot 1= \\
&= \mathrm{e}^{-12}.
\end{aligned}
$$

7. Odredite sljedeće jednostrane granične vrijednosti:

a) $\lim\limits_{x \to 2-} \left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-2} \right) \right)$;

Rješenje: Kad $x \to 2-$, onda

$$x - 2 \to 0-,$$

pa slijedi:

$$\frac{1}{x-2} \to -\infty,$$
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-2} \right) \to \frac{-\pi}{2}.$$

Dakle, tražena granična vrijednost je jednaka $\dfrac{-\pi}{2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 5+} \left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-5} \right) \right)$;

Rješenje: Kad $x \to 5+$, onda

$x - 5 \to 0+$,

pa slijedi:

$$\frac{1}{x-5} \to +\infty,$$
$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x-5} \right) \to \frac{\pi}{2}.$$

Dakle, tražena granična vrijednost je jednaka $\dfrac{\pi}{2}$.

c) $\lim\limits_{x \to 3+} \left(2^{\frac{1}{3-x}} \right)$;

Rješenje: Kad $x \to 3+$, onda

$$3 - x \to 0-,$$

pa odatle slijedi:

$$\frac{1}{3-x} \to -\infty,$$
$$2^{\frac{1}{3-x}} \to 0.$$

Dakle, tražena granična vrijednost je jednaka 0.

d) $\lim\limits_{x \to 4+} \left(5^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}} \right)$.

Rješenje: Kad $x \to 4+$, onda

$$\sqrt{x} - 2 \to 0+,$$

pa odatle slijedi:

$$\frac{1}{\sqrt{x}-2} \to +\infty,$$
$$5^{\frac{1}{\sqrt{x}-2}} \to +\infty.$$

Zbog toga ova granična vrijednost ne postoji.

8. Navedite konkretan primjer realne funkcije f i točke $c \in \mathbb{R}$ takvih da:

a) postoje $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$ i $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$, a ne postoji $f(c)$;

Rješenje: Npr. bilo koja funkcija iz zadatka 5. i točka u kojoj je računana dotična granična vrijednost. Primijetite da u svakom od tih slučajeva vrijedi:

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \lim_{x \to c+} f(x).$$

b) postoje $f(c)$ i $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$, a ne postoji $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$;

Rješenje: Npr.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ za } x < 0, \\ 0, \text{ za } x = 0, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ inače.} \end{cases} \quad \text{i } c = 0.$$

Očito su

$$f(0) = 0,\ \lim_{x \to 0-} f(x) = \ = \lim_{x \to 0-} (\sin x) = \sin 0 = 0,$$

ali

$$\lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \left(\frac{1}{x} \right) = +\infty.$$

c) postoje $f(c)$ i $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$, a ne postoji $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.

Rješenje: Npr.

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ za } x < 0, \\ 0, \text{ za } x = 0, \\ \sin x, \text{ za } x > 0 \end{cases} \quad \text{i } c = 0. \text{ Očito su}$$

$$g(0) = 0,\ \lim_{x \to 0+} g(x) = \ = \lim_{x \to 0+} (\sin x) = \sin 0 = 0,$$

ali $\lim\limits_{x \to 0-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0-} \left(\dfrac{1}{x} \right) = -\infty.$

9. Navedite konkretan primjer realnih funkcija f i g, te točke $c \in \mathbb{R}$ takvih da ne postoje $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, a postoji:

a) $\lim\limits_{x\to c}\big((f+g)(x)\big)$;

Rješenje: Npr.

$$f(x)=1-\frac{1}{x},\; g(x)=\frac{1}{x} \quad \text{i} \quad c=0.$$

Očito su

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+}\left(1-\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(1-\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty,$$

$$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{x}\right)=-\infty,$$

ali je

$$\lim_{x\to 0}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}(1)=1.$$

b) $\lim\limits_{x\to c}\big((f\cdot g)(x)\big)$.

Rješenje: Npr.

$$f(x)=\begin{cases}\sin x, \text{ za } x<0,\\ 1, \text{ za } x=0,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ za } x>0,\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, \text{ za } x<0,\\ 1, \text{ za } x=0,\\ \sin x, \text{ za } x>0,\end{cases} \quad \text{i} \quad c=0.$$

U zadacima 8. b) i c) pokazali smo da ne postoje $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to c} g(x)$. Međutim,

$$(f\cdot g)(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ za } x\neq 0,\\ 1, \text{ za } x=0,\end{cases}$$

pa je

$$\lim_{x \to 0} \left((f \cdot g)(x) \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) = \frac{1}{1} = 1 = (f \cdot g)(0).$$