

4.5. GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)

GRANIČNA VRIJEDNOST NIZA.
GRANIČNA VRIJEDNOST FUNKCIJE.

4.5.1. POJAM NIZA

- ▶ Svaku funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo *niz realnih brojeva* ili, kraće, **niz**. Moguće je i da prirodna domena niza bude neki konačan podskup skupa \mathbb{N} . U tom slučaju govorimo o **konačnom nizu** realnih brojeva.
- ▶ Ne istaknemo li drugačije, pretpostavljamo da je prirodna domena svakoga niza skup \mathbb{N} . Zbog toga smatramo da je niz jednoznačno zadan definiranjem *pravila* prema kojemu je svakom prirodnom broju (elementu domene) pridružen neki realan broj (element kodomene).
- ▶ Nizove obično označavamo s a_n, b_n, \dots , pri čemu indeksni zapis a_n zapravo znači $a(n)$.
- ▶ a_1 nazivamo **prvi član** niza, a_2 nazivamo **drugi član** niza itd.
- ▶ Konačan uređeni skup (a_1, \dots, a_n) nazivamo **skup prvih n članova niza**.
- ▶ **Važno:** Najčešći grafički prikaz niza je *skup točaka na brojevnom pravcu*. Niz se obično ne prikazuje u koordinatnom sustavu u ravnini jer nikada dva elementa niza nije moguće spojiti ravninskom krivuljom (između dva uzastopna člana niza nema drugih članova niza).

4.5.2. OMEĐENI I MONOTONI NIZOVI

- ▶ Pojmove omeđenosti i monotonosti funkcija možemo posebno primijeniti i na nizove.
- ▶ Odgovarajuće definicije preinačuju se u sljedeće:
- ▶ Niz (a_n) je *omeđen odozdo* ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \geq m$.
- ▶ Niz (a_n) je *omeđen odozgo* ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \leq M$.
- ▶ Niz (a_n) je (*strogo*) *rastući* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \leq a_{n+1}$ (odnosno, $a_n < a_{n+1}$).
- ▶ Niz (a_n) je (*strogo*) *padajući* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $a_n \geq a_{n+1}$ (odnosno, $a_n > a_{n+1}$).

4.5.2. PRIMJER 1.

- ▶ Promotrimo nizove $a_n = n^2 + 1$, $b_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ i $c_n = \frac{1}{n}$.
- ▶ Prvi niz je neomeđen strogo rastući niz.
- ▶ Drugi niz je omeđen, a nije ni rastući, ni padajući.
- ▶ Međutim, *podniz* (beskonačan dio niza) $(b_{2 \cdot k})$ je omeđen *konstantan* niz (svi članovi toga niza jednaki su nuli).
- ▶ Takvi su i podniz $(b_{4 \cdot k - 3})$ čiji su svi članovi jednaki 1, te podniz $(b_{4 \cdot k - 1})$ čiji su svi članovi jednaki -1 .
- ▶ Treći niz je omeđen i strogo padajući. Taj niz naziva se **harmonijski niz**.

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA

- ▶ Neka je (a_n) zadani niz.
- ▶ Ako postoji $L \in \mathbb{R}$ takav da za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ za koji je istinita implikacija:

$$\triangleright n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon,$$

- ▶ onda broj L nazivamo **granična vrijednost** ili **limes** niza (a_n) .
- ▶ Gornja definicija geometrijski se može interpretirati ovako:
- ▶ Ako se od broja L na brojevnom pravcu pomaknemo za *proizvoljno malu udaljenost* ulijevo i udesno, u barem jednom pomicanju “preskočit” ćemo beskonačno mnogo članova niza, a nećemo “preskočiti” konačno mnogo članova niza
- ▶ Činjenicu da je L granična vrijednost (limes) niza (a_n) zapisujemo ovako: $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ili $L = \lim_n a_n$

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA



Unutar *bilo kojega* otvorenoga intervala oko L nalazi se *beskonačno mnogo* članova niza.

Izvan *bilo kojega* otvorenoga intervala oko L nalazi se *konačno mnogo* članova niza.

4.5.3. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) NIZA

- ▶ Može se pokazati: Ako limes niza postoji, on je jedinstven.
- ▶ Svaki niz koji ima limes nazivamo **konvergentan niz**. Za niz koji nije konvergentan kažemo da je **divergentan** ili, jednostavnije, da **ne konvergira**.
- ▶ Kažemo da niz (a_n) **divergira prema** $+\infty$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > \varepsilon$.
- ▶ Tada pišemo: $\lim_n a_n = +\infty$
- ▶ Pritom simbol ∞ **nije** broj, ali ga ponekad tretiramo kao broj.
- ▶ Jednakost $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ uobičajeno čitamo i kao:
- ▶ *Niz (a_n) konvergira prema broju L .*

4.5.4. NAPOMENA

- ▶ Može se dogoditi da “pomicanjem” od kandidata za limes niza ulijevo ili udesno “preskočimo” beskonačno mnogo članova niza, ali i da istodobno ne “preskočimo” beskonačno mnogo članova niza.
- ▶ U takvom slučaju govorimo o *gomilištu* niza.
- ▶ Npr. niz $a_n = (-1)^n$ *nema* limes, ali ima dva različita gomilišta (to su -1 i 1).
- ▶ Niz $a_n = \cos(n \cdot \pi/2)$ također *nema* limes, ali ima tri različita gomilišta: -1 , 0 i 1 .
- ▶ Dakle, limes niza je ujedno i gomilište niza, ali gomilište niza ne mora biti limes niza.

4.5.5. NAPOMENA

- ▶ Prema definiciji apsolutne vrijednosti vrijedi:

$$(|x| < a) \Leftrightarrow -a < x < a.$$

- ▶ Kad se od granične vrijednosti L niza (a_n) pomaknemo ulijevo za $\varepsilon > 0$, dođemo u točku $L - \varepsilon$.
- ▶ Kad se od granične vrijednosti L niza (a_n) pomaknemo udesno za $\varepsilon > 0$, dođemo u točku $L + \varepsilon$.
- ▶ Potom tražimo sve članove niza (a_n) koji se nalaze u intervalu $\langle L - \varepsilon, L + \varepsilon \rangle$. Njih treba biti beskonačno mnogo (prema definiciji granične vrijednosti).
- ▶ To nas vodi na rješavanje nejednadžbe:
- ▶ $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$
- ▶ po nepoznanici n .

4.5.5. NAPOMENA

- ▶ Iz te nejednadžbe slijedi:

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon,$$

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

- ▶ (Posljednja nejednakost izravno slijedi iz definicije apsolutne vrijednosti.) Otuda se zapravo dobiva nejednakost koja se pojavljuje u definiciji granične vrijednosti.
- ▶ Dakle, za *svaki* $\varepsilon > 0$ prilikom određivanja granične vrijednosti trebamo efektivno odrediti koliko ukupno prirodnih brojeva zadovoljava nejednakost $|a_n - L| < \varepsilon$, a koliko ih ne zadovoljava.
- ▶ U prvom slučaju odgovor treba biti: *beskonačno mnogo*, a u drugom *konačno mnogo*.

4.5.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA KONVERGENTNIH NIZOVA

- ▶ **1.** (“teorem o sendviču”) Neka su (a_n) , (b_n) i (c_n) nizovi takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$ (osim možda za konačno mnogo prirodnih brojeva) vrijedi nejednakost $a_n \leq b_n \leq c_n$.
- ▶ **a)** Ako su nizovi (a_n) i (c_n) konvergentni i imaju isti limes L , onda je i niz (b_n) konvergentan i ima limes L .
- ▶ **b)** Ako niz (a_n) divergira prema $+\infty$, i ostala dva niza divergiraju prema $+\infty$.
- ▶ **2.** Svaki konvergentan niz je omeđen.
- ▶ **3.** Svaki omeđen i monoton niz je konvergentan.
- ▶ **Napomena:** Svojstva 1. i 3. korisna su za dokazivanje *postojanja* limesa, ali vrlo često ne i za njegovo efektivno određivanje.
- ▶ **Oprez:** Tvrdnja 1.b) ne mora vrijediti ako postavimo (samo) zahtjev da niz (a_n) nije konvergentan.
- ▶ Npr. ako su $a_n = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ i $b_n = 1 + \frac{1}{n}$
- ▶ onda za svaki $n \in \mathbb{N}$ očito vrijedi $a_n \leq b_n$. Međutim, niz (a_n) nije konvergentan (ali ima tri gomilišta), dok niz (b_n) konvergira prema 1.

4.5.6. NEKA KORISNA SVOJSTVA KONVERGENTNIH NIZOVA

- 4. Neka su (a_n) i (b_n) konvergentni nizovi takvi da je

$$L_1 := \lim_n(a_n) \text{ i } L_2 := \lim_n(b_n)$$

- Tada je:

a) $\lim_n(a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2;$

b) $\lim_n(a_n \cdot b_n) = L_1 \cdot L_2;$

c) $(L_2 \neq 0) \Rightarrow \lim_n \left(\frac{a_n}{b_n} \right) = \frac{L_1}{L_2};$

d) $(a_n, L_1 > 0) \Rightarrow \lim_n \left((a_n)^c \right) = (L_1)^c, \forall c \in \mathbb{R};$

e) $\lim_n \left(c^{a_n} \right) = c^{L_1}, \forall c > 0.$

4.5.7. NEKI KORISNI LIMESI NIZOVA

$$1. \lim_n \left(\pm \frac{a}{n^k} \right) = 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$2. (c \neq 0) \Rightarrow \lim_n \left(\frac{a \cdot n + b}{c \cdot n + d} \right) = \frac{a}{c}.$$

$$3. \lim_n (a^n) = \begin{cases} 0, & \text{za } 0 < a < 1; \\ +\infty, & \text{za } a > 1. \end{cases}$$

$$4. \lim_n \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a;$$

$$5. \lim_n \left(\sqrt[n]{a} \right) = 1, \quad \forall a > 0;$$

$$6. \lim_n \left(\sqrt[n]{n} \right) = 1.$$

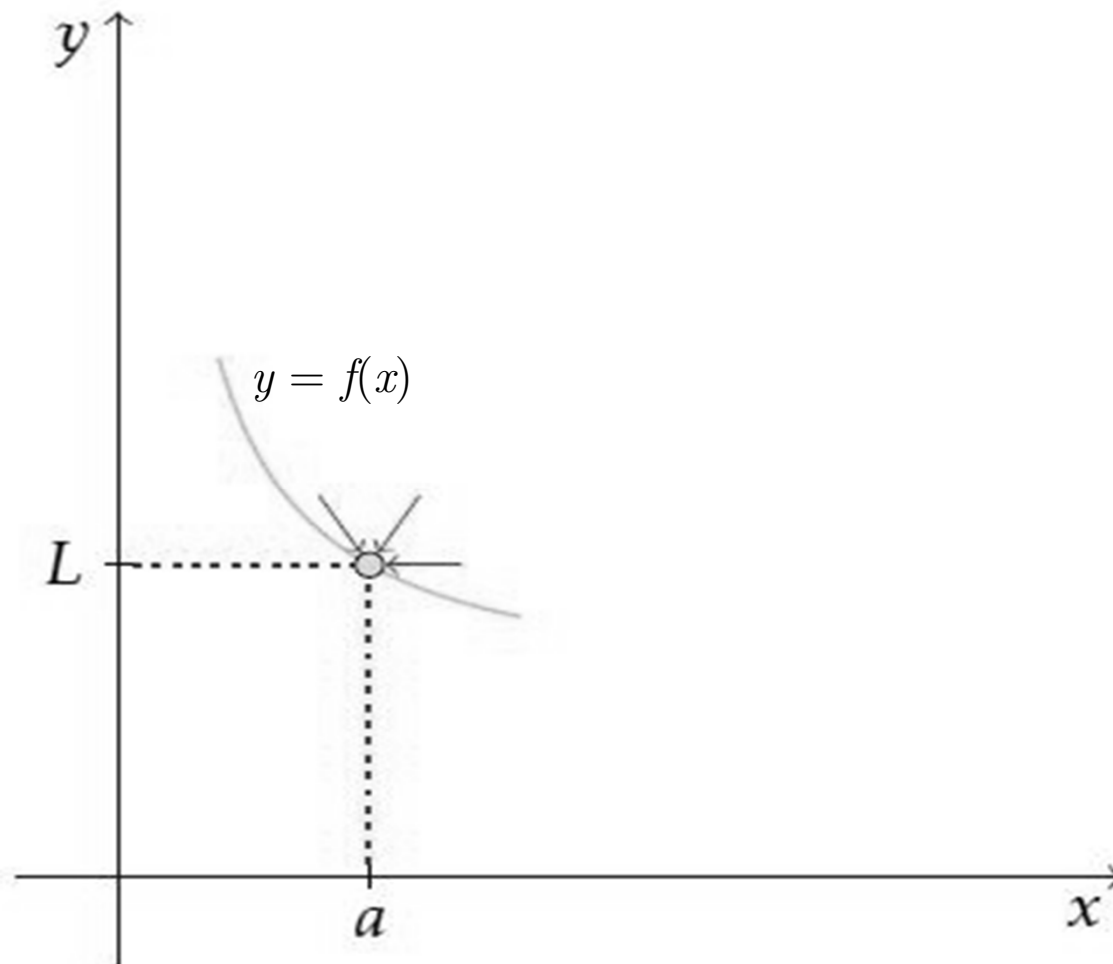
4.5.8. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE

- ▶ Pojam limesa niza poopćuje se na graničnu vrijednost (limes) *bilo koje* realne funkcije jedne realne varijable.
- ▶ Neka su $\langle a, b \rangle \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \langle a, b \rangle$ i f realna funkcija jedne realne varijable definirana na intervalu $\langle a, b \rangle$ osim možda u točki c .
- ▶ Ako za *bilo koji* niz (x_n) takav da su $x_n \in \langle a, b \rangle \setminus \{c\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, i $\lim_n x_n = c$, niz $f(x_n)$ konvergira ka (konstantnoj) vrijednosti L , tada kažemo da je vrijednost L **granična vrijednost (limes) funkcije f u točki c** .
- ▶ Ako postoji limes funkcije f u točki c , onda je on jedinstven. Zbog toga pišemo: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$.
- ▶ Moguće je da niz $f(x_n)$ ne konvergira. To ne mora značiti da taj niz divergira prema $+\infty$ ili $-\infty$. Npr. funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{za } x \geq 0, \\ 1, & \text{za } x < 0 \end{cases}$$

- ▶ nema limes u točki $c = 0$, a pritom nijedan niz $f(x_n)$ ne divergira u $+\infty$ ili $-\infty$ kad je $\lim_n x_n = 0$.

4.5.8. GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES) FUNKCIJE



4.5.9. NEKI KORISNI LIMESI FUNKCIJA

$$1. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{a}{x^n} \right) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^n) = +\infty, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(a \cdot x)}{b \cdot x} \right) = \frac{a}{b}, \quad \forall b \neq 0.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{\sin(a \cdot x)}{b \cdot x} \right) = 0, \quad \forall b \neq 0.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \cdot x)^{\frac{1}{x}} = e^a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \right) = \ln a, \quad \forall a > 0.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right) = 1.$$

4.5.9. NEKA KORISNA SVOJSTVA LIMESA FUNKCIJA

- ▶ Za limese funkcija vrijede sva svojstva navedena kod limesa nizova.
- ▶ Posebno treba istaknuti sljedeća svojstva korisna za rješavanje zadataka:
- ▶ **1.** (*svojstvo zamjene varijabli*) Za bilo koju realnu funkciju g definiranu na intervalu $\langle a, b \rangle$ vrijedi:
 - ▶ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{t \rightarrow g(c)} f(g(t)).$
 - ▶ Ovo svojstvo prikladno je primijeniti ako se zamjenom varijabli dobije neka od “poznatih” graničnih vrijednosti.
- ▶ **2.** Ako su $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L_1 > 0$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L_2$, onda je:

$$\lim_{x \rightarrow c} \left((f(x))^{g(x)} \right) = (L_1)^{L_2}$$

4.5.9. NEKA KORISNA SVOJSTVA LIMESA FUNKCIJA

- **3.** Ako je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = a > 0$, onda vrijedi jednakost:

$$\lim_{x \rightarrow c} (\ln(f(x))) = \ln\left(\lim_{x \rightarrow c} f(x)\right) = \ln a.$$

- **Napomena:** Umjesto logaritamske funkcije u gornjoj jednakosti može pisati bilo koja *neprekidna* funkcija, tj. funkcija čiji graf možemo nacrtati ne dižući olovku s papira (takve funkcije su sve *elementarne* funkcije, npr. polinomi, sinus, kosinus, eksponencijalna i logaritamska funkcija itd.)

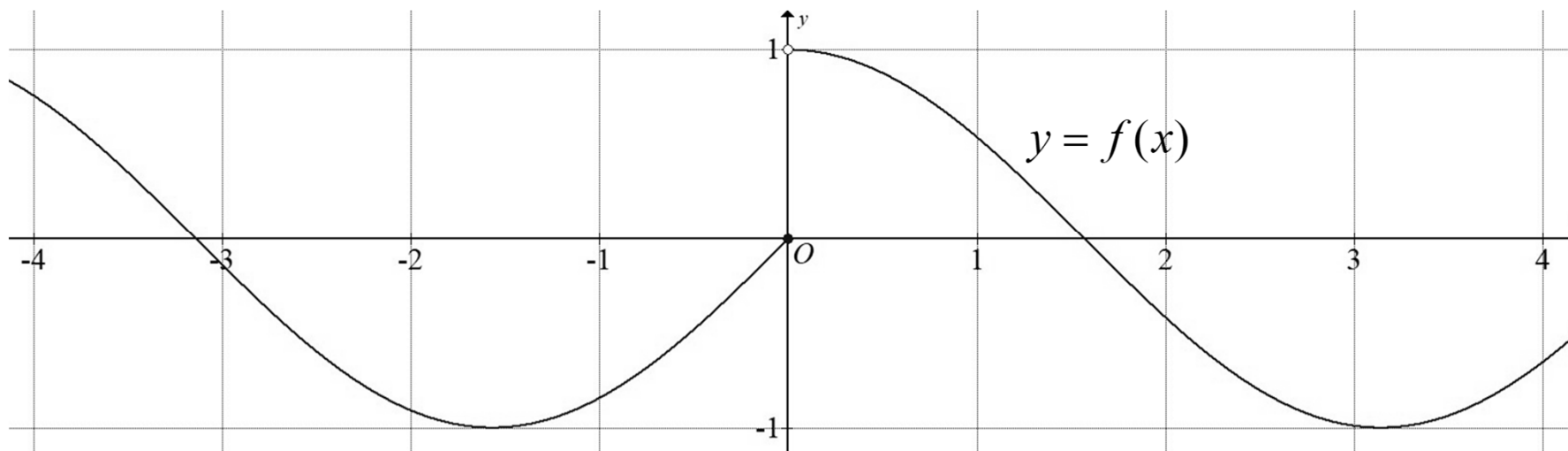
- **4.** Ako su $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = +\infty$, onda je:

$$\lim_{x \rightarrow c} \left((f(x))^{g(x)} \right) = e^{\left(\lim_{x \rightarrow c} ((f(x)-1) \cdot g(x)) \right)}$$

4.5.10. JEDNOSTRANE GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)

- ▶ Limes funkcije u nekoj točki može se računati i tako da se u definiciji granične vrijednosti zahtijeva da niz koji konvergira točki c nužno bude strogo rastući ili strogo padajući.
- ▶ U prvom slučaju govorimo o **graničnoj vrijednosti (limesu) slijeva** i pišemo: $L^- := \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$
- ▶ U drugom slučaju govorimo o **graničnoj vrijednosti (limesu) zdesna** i pišemo: $L^+ := \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$
- ▶ Takve limese ima smisla određivati za funkcije definirane na segmentu ili poluotvorenom intervalu.
- ▶ Pravila za računanje takvih limesa su ista kao i računanje “običnih” limesa.
- ▶ Najčešći slučaj je da su limesi slijeva i zdesna međusobno jednaki, pa se limes funkcije u takvom slučaju *definira* kao granična vrijednost slijeva/zdesna (a ta definicija je ekvivalentna našoj definiciji).

4.5.10. JEDNOSTRANE GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \\ f(0) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1. \end{cases}$$

4.5.11. NEKI POSEBNI JEDNOSTRANI LIMESI

$$1. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0-} \operatorname{ctg} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{ctg} x = +\infty.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0.$$