4.5. NORMALNA RAZDIOBA

NORMALNA RAZDIOBA.

APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE NORMALNOM RAZDIOBOM.

GRANIČNI TEOREMI U BERNOULLIJEVOJ SHEMI.

ČEBIŠEVLJEVO PRAVILO ZA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE.

4.5.1. NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Neka je X neprekidna slučajna varijabla čija je slika $R(X) = \mathbb{R}$.
- Kažemo da je slučajna varijabla X *normalna*, odnosno da ima *normalnu razdiobu* ako je njezina funkcija gustoće dana pravilom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

- pri čemu su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.
- Tada pišemo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

4.5.2. NAPOMENA

- Dokaz da je funkcija f doista funkcija gustoće zahtijeva izračun nepravoga integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}\cdot x^2} \cdot dx$$

- Taj integral nije moguće riješiti elementarnim metodama (iz *Matematike* 2), nego tzv. *prijelazom na polarne koordinate.*
- Tako se dobiva:

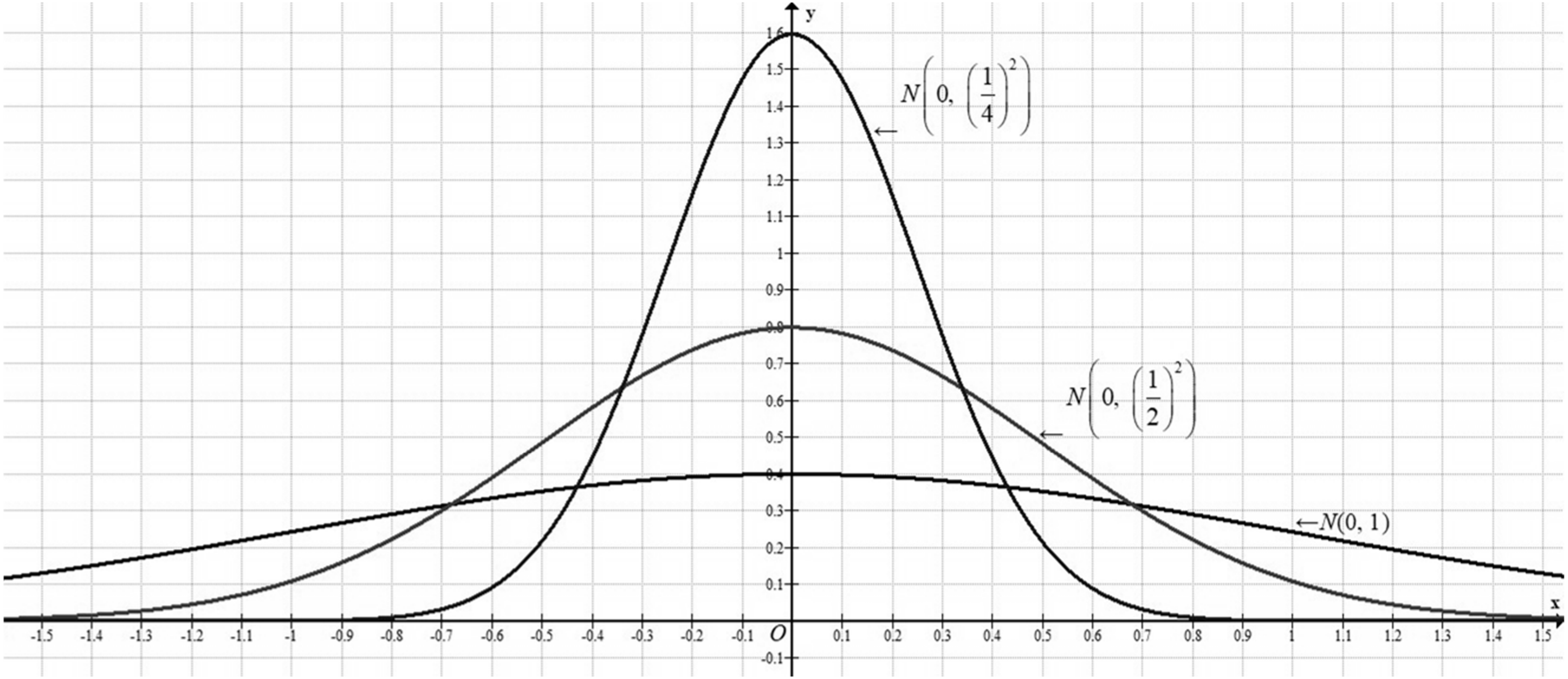
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}\cdot x^2} \cdot dx = \sqrt{2\cdot\pi}$$

4.5.3. OSNOVNI NUMERIČKI POKAZATELJI NORMALNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Oznake μ i σ korištene u definiciji funkcije gustoće normalne razdiobe nisu odabrane na slučajan način.
- Naime, koristeći jednakost iz Napomene 4.5.2. lako se pokazuje valjanost sljedećih jednakosti:
- $E(X) = \mu$,
- $V(X) = \sigma^2$,
- $\sigma(X) = \sigma$.
- Dakle, normalna slučajna varijabla *jednoznačno* je određena zadavanjem svojega očekivanja i svoje standardne devijacije.

4.5.4. GRAF FUNKCIJE GUSTOĆE NORMALNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Za fiksirane vrijednosti konstanti μ i σ graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable je tzv. *Gaussova* ili *zvonolika* krivulja (vidjeti sljedeći slide).
- Zbog toga se normalna razdioba ponekad naziva i *Gaussova razdioba.*
- Zbog "nezgodne" funkcije gustoće, funkciju razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable nije moguće elementarno odrediti, niti nacrtati.
- Za određivanje funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable potrebno je poznavati tzv. *gama-funkcije.*


y
x
O
$N\left(0, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$
$N\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$
$N(0, 1)$

4.5.5. STANDARDNA (JEDINIČNA) NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Kažemo da normalna slučajna varijabla X *standardna*, odnosno da ima *standardnu* (*jediničnu*) *normalnu razdiobu* ako je $X \sim N(0, 1)$.
- Za standardnu (jediničnu) normalnu razdiobu vrijedi:
- $E(X) = 0$,
- $V(X) = \sigma(X) = 1$
- Funkcija gustoće: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot x^2}$
- Vrijednosti pripadne **funkcije razdiobe vjerojatnosti** (uobičajena oznaka: F^*) je nemoguće elementarno izračunati, pa su tabelirane približne vrijednosti te funkcije.
- Ta je tablica sastavni dio *Repetitorija vjerojatnosti i statistike*.

4.5.6. NAPOMENA

- Prema "*pravilu* $3 \cdot \sigma$" najmanje 99.73% vrijednosti neprekidne slučajne varijable koja ima standardnu normalnu razdiobu pripada segmentu [-3, 3].
- U tablici su navedene vrijednosti funkcije razdiobe za segment [0, 3.09] s korakom 0.01.
- Pomoću tih vrijednosti jednoznačno su određene i vrijednosti funkcije razdiobe u segmentu [-3, 0].
- Preciznije, ako je F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable, onda za svaki $x \geq 0$ vrijedi jednakost:
- $F^*(-x) = 1 - F^*(x)$.

4.5.7. ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

- Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X i F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.
- Tada za sve a, $b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$ vrijede jednakosti:

$$F(x) = P(X \leq x) = F^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \forall x \in \mathbb{R};$$

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) =$$

$$= P(a \leq x \leq b) = F^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

4.5.8. VEZA IZMEĐU BINOMNE RAZDIOBE I NORMALNE RAZDIOBE

- U određenim slučajevima binomnu razdiobu možemo aproksimirati normalnom razdiobom.
- Preciznije, vrijede sljedeća dva teorema.
- **Teorem 1**. (*lokalni Moivrè-Laplaceov teorem*) Neka su $p \in \langle 0, 1 \rangle$ i $X_n \sim B(n, p)$ niz binomnih slučajnih varijabli. Za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća aproksimacija:

$$P(X_n = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot p \cdot (1-p)}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(k-n \cdot p)^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot (1-p)}}$$

4.5.8 VEZA IZMEĐU BINOMNE RAZDIOBE I NORMALNE RAZDIOBE

- **Teorem 2.** (*integralni Moivrè-Laplaceov teorem*) Neka su $p \in \langle 0, 1\rangle$ i $X_n \sim B(n, p)$ niz binomnih slučajnih varijabli. Tada za sve $a, b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$ vrijedi sljedeća aproksimacija:

$$P(a \leq X_n \leq b) \approx F^*\left(\frac{b+\frac{1}{2}-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)-F^*\left(\frac{a-\frac{1}{2}-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$$

4.5.9. NAPOMENA

- Ranije smo vidjeli da se u slučaju tzv. *rijetkih događaja* (tj. kad $n \to +\infty$, $p \to 0$, $n \cdot p \to \text{const.}$) binomna razdioba može dobro aproksimirati Poissonovom razdiobom.
- Oba granična teorema (teoremi 1. i 2.) vrijede za *dovoljno velike* $n \in \mathbb{N}$, tj. kad $n \to +\infty$, a p ostaje nepromijenjen.
- Naziv *lokalni* koristi se jer se aproksimacija odnosi na vrijednost slučajne varijable u jednoj točki.
- Naziv *integralni* koristi se jer se aproksimacija računa na intervalu pomoću integrala (jer je funkcija razdiobe vjerojatnosti definirana pomoću integrala).

4.5.10. ČEBIŠEVLJEVO PRAVILO ZA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Neka je X neprekidna slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, tj. takva da je $E(X) < +\infty$.
- Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- Odatle slijedi:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- Ove nejednakosti poznate su kao *Čebiševljevo pravilo* (za neprekidne slučajne varijable).

Napomena: U svim zadacima i rezultatima zadataka s F^* je označena funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

1. Dokažite jednakost:

$$F^*(-x) = 1 - F^*(x), \ \forall x \geq 0.$$

Rješenje: Primijetimo da je funkcija gustoće standardne normalne slučajne varijable parna, tj. da vrijedi jednakost

$$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Odatle slijedi da za svaki $x \geq 0$ (uključujući i $x = +\infty$) vrijedi jednakost:

$$\int_{-x}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{0}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot \int_{-x}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t.$$

(Vidjeti nastavni materijal iz *Matematike* 2.) Zbog toga je:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 2 \cdot \int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x, \quad / : 2$$

$$\int_{0}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Tako za svaki $x \geq 0$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
F^*(-x) + F^*(x) &= \int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \left(\int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t \right) = \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + 2 \cdot \int_{-x}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t = \\
&= 2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{-x} f(t) \cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t \right) = \\
&= 2 \cdot \int_{-\infty}^{0} f(t) \cdot \mathrm{d}t = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Odatle izravno slijedi tvrdnja zadatka.

2. Neka je $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Definiramo slučajnu varijablu

$$Y = a \cdot X + b, \text{ za } a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

a) Dokažite da je Y normalna slučajna varijabla, pa odredite njezine osnovne parametre. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Dovoljno je dokazati da postoje $\mu_1, \sigma_1 \in \mathbb{R},\ \sigma_1 > 0,$ takvi da funkciju gustoće vjerojatnosti f_Y varijable Y možemo zapisati u obliku

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2 \cdot \sigma_1^2}}.$$

Iskoristimo rezultat zadatka 4. u nastavnoj cjelini 4.3. i jednakost

$$|a|^2 = a^2,\ \forall a \in \mathbb{R},$$

pa redom dobivamo:

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{1}{|a|} \cdot f_X\left(\frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a}\right) = \\
&= \frac{1}{|a|} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\left(\frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a} - \mu\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}} = \\
&= \frac{1}{|a| \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-\left(\frac{y-b-a\cdot\mu}{a}\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}} = \\
&= \frac{1}{|a| \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\frac{-(y-b-a\cdot\mu)^2}{a^2}}{2 \cdot \sigma^2}} = \\
&= \frac{1}{|a| \cdot \sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(y-b-a\cdot\mu)^2}{2 \cdot a^2 \cdot \sigma^2}} = \\
&= \frac{1}{\left(|a| \cdot \sigma\right) \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(y-(a\cdot\mu+b))^2}{2 \cdot \left(|a| \cdot \sigma\right)^2}}.
\end{aligned}$$

Preostaje definirati

$$\begin{aligned}
\mu_1 &:= a \cdot \mu + b, \\
\sigma_1 &:= |a| \cdot \sigma.
\end{aligned}$$

Pritom uočimo da je $\sigma_1 > 0$ jer su oba faktora na desnoj strani definicijske jednakosti strogo pozitivna. Dakle, dobiveno pravilo funkcije f_Y ima oblik

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-\mu_1)^2}{2 \cdot \sigma_1^2}},$$

što je i trebalo dokazati.

b) Što se dobiva u **a)** zadatku ako se uzme $(a,b) = \left(\frac{1}{\sigma}, \frac{-\mu}{\sigma}\right)$?

Rješenje: Na temelju rezultata prethodnoga podzadatka dobivamo:

$$\begin{aligned} E(Y) &= \mu_1 = \\ &= a \cdot \mu + b = \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \mu - \frac{\mu}{\sigma} = \\ &= \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= \sigma_1 = \\ &= |a| \cdot \sigma = \\ &= \left| \frac{1}{\underbrace{\sigma}_{>0}} \right| \cdot \sigma = \\ &= \frac{1}{\sigma} \cdot \sigma = \\ &= 1. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} Y &= \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma} = \\ &= \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1). \end{aligned}$$

Napomena: Slučajna varijabla $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ naziva se *normalna slučajna varijabla dobivena standardizacijom normalne slučajne varijable* X ili kraće *standardizirana normalna slučajna varijabla.*

c) Neka je F_X funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X. Dokažite da je

$$F_X(x) = F^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Rješenje: Iz rezultata prethodnoga podzadatka znamo da je

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Iz jednakosti

$$Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

lagano slijedi

$$X = \sigma \cdot Y + \mu .$$

Koristeći definiciju funkcije razdiobe vjerojatnosti neprekidne slučajne varijable imamo:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \le x) = \\ &= P(\sigma \cdot Y + \mu \le x) = \\ &= P\left(Y \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= F^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \ \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.

Napomena: Iz rezultata ovoga podzadatka slijedi da je za određivanje vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti *bilo koje* normalne slučajne varijable dovoljno znati vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne (jedinične) normalne slučajne varijable. Zbog toga su upravo te vrijednosti uobičajeno tabelirane, kao što je učinjeno i u *Repetitoriju vjerojatnosti i statistike*.

3. Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijede jednakosti:

a) $P(X \geq 2 \cdot \mu - x) = P(X \leq x)$;

Rješenje: Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X. Koristeći rezultate prethodnih zadataka imamo redom:

$$\begin{aligned} P(X \geq 2 \cdot \mu - x) &= 1 - P(X \leq 2 \cdot \mu - x) = \\ &= 1 - F(2 \cdot \mu - x) = \\ &= 1 - F^*\left(\frac{2 \cdot \mu - x - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= 1 - F^*\left(\frac{\mu - x}{\sigma}\right) = \\ &= F^*\left(\frac{-(\mu - x)}{\sigma}\right) \\ &= F^*\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \\ &= F(x) = \\ &= P(X \leq x). \end{aligned}$$

b) $P(X \leq 2 \cdot \mu - x) = P(X \geq x)$.

Rješenje: Koristeći oznake kao u rješenju **a)** podzadatka i rezultat toga podzadatka dobivamo:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2 \cdot \mu - x) &= 1 - P(X \geq 2 \cdot \mu - x) \overbrace{=}^{\mathbf{a)}} \\ &= 1 - P(X \leq x) = \\ &= P(X \geq x). \end{aligned}$$

4. Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) Neka su $a,\ b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$P(X \le a) \le F^*(b).$$

Dokažite da je tada

$$\mu \ge a - \sigma \cdot b.$$

Što se dobiva ako se pretpostavi

$$P(X \le a) \ge F^*(b)\,?$$

Rješenje: Primijetimo da je *funkcija razdiobe vjerojatnosti F bilo koje* normalne slučajne varijable strogo rastuća injekcija, tj. da za sve dopustive x_1, x_2 vrijede relacije:

$$\begin{cases} (x_1 \ne x_2) \Leftrightarrow (F(x_1) \ne F(x_2)), \\ (x_1 < x_2) \Leftrightarrow (F(x_1) < F(x_2)). \end{cases}$$

Koristeći gornje relacije dobivamo:

$$\begin{aligned}
&P(X \le a) \le F^*(b), \\
&F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \le F^*(b), \\
&\frac{a-\mu}{\sigma} \le b, \quad / \sigma > 0 \\
&a - \mu \le \sigma \cdot b, \\
&\mu \le -a + \sigma \cdot b, \quad / : (-1) \\
&\mu \ge a - \sigma \cdot b.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo li da je $P(X \le a) \ge F^*(b)$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
&P(X \le a) \ge F^*(b), \\
&F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \ge F^*(b), \\
&\frac{a-\mu}{\sigma} \ge b, \quad / \cdot \sigma > 0 \\
&a - \mu \ge \sigma \cdot b, \\
&-\mu \ge -a + \sigma \cdot b, \quad / : (-1) \\
&\mu \le a - \sigma \cdot b.
\end{aligned}$$

b) Neka su $a,\ b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$P(X \geq a) \leq F^*(b).$$

Dokažite da je tada

$$\mu \leq a + \sigma \cdot b.$$

Što se dobiva ako se pretpostavi

$$P(X \geq a) \geq F^*(b)?$$

Rješenje: Koristeći rješenje i rezultat zadatka 1. imamo redom:

$$\begin{aligned}
&P(X \geq a) \leq F^*(b),\\
&1 - P(X \leq a) \leq F^*(b),\\
&P(X \leq a) \geq 1 - F^*(b),\\
&F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \geq F^*(-b),\\
&\frac{a-\mu}{\sigma} \geq -b, \quad / \cdot \sigma > 0\\
&a - \mu \geq -\sigma \cdot b,\\
&-\mu \geq -a - \sigma \cdot b,\\
&\mu \leq a + \sigma \cdot b.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo li da je $P(X \geq a) \geq F^*(b)$, dobit ćemo:

$$\begin{aligned}
&P(X \geq a) \geq F^*(b),\\
&1 - P(X \leq a) \geq F^*(b),\\
&P(X \leq a) \leq 1 - F^*(b),\\
&F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \leq F^*(-b),\\
&\frac{a-\mu}{\sigma} \leq -b, \quad / \cdot \sigma > 0\\
&a - \mu \leq -\sigma \cdot b,\\
&-\mu \leq -a - \sigma \cdot b, \quad / : (-1)\\
&\mu \geq a + \sigma \cdot b.
\end{aligned}$$

5. Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $k \in \mathbb{N}$.

a) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izračunajte

$$P(|X-\mu| < k \cdot \sigma).$$

Rješenje: Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti slučajne varijable X. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) &= P(-k\cdot\sigma < X-\mu < k\cdot\sigma) = \\
&= P(\mu - k\cdot\sigma < X < \mu + k\cdot\sigma) = \\
&= F(\mu + k\cdot\sigma) - F(\mu - k\cdot\sigma) = \\
&= F^*\left(\frac{(\mu + k\cdot\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{(\mu - k\cdot\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = \\
&= F^*(k) - F^*(-k) = \\
&= 2\cdot F^*(k) - 1.
\end{aligned}$$

b) Koristeći rezultat **a)** podzadatka izvedite *pravilo* $2\cdot\sigma$ i *pravilo* $3\cdot\sigma$:

- *Pravilo* $2\cdot\sigma$: U segmentu $[\mu-2\cdot\sigma, \mu+2\cdot\sigma]$ nalazi se ukupno 95.45% svih vrijednosti normalne slučajne varijable $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.
- *Pravilo* $3\cdot\sigma$: U segmentu $[\mu-3\cdot\sigma, \mu+3\cdot\sigma]$ nalazi se ukupno 99.73% svih vrijednosti normalne slučajne varijable $X \sim N(\mu,\sigma^2)$

Rješenje: U rezultat prethodnoga podzadatka uvrstimo $k = 2$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 2\cdot\sigma) &= P(\mu - 2\cdot\sigma < X < \mu + 2\cdot\sigma) = \\
&= F(\mu + 2\cdot\sigma) - F(\mu - 2\cdot\sigma) = \\
&= 2\cdot F^*(2) - 1 = \\
&= 2\cdot 0.97725 - 1 = \\
&= 0.9545.
\end{aligned}$$

Odatle izravno slijedi prva tvrdnja.

Analogno, uvrštavanjem $k = 3$ dobijemo:

$$\begin{aligned}
P(|X-\mu| < 3\cdot\sigma) &= P(\mu - 3\cdot\sigma < X < \mu + 3\cdot\sigma) = \\
&= F(\mu + 3\cdot\sigma) - F(\mu + 3\cdot\sigma) = \\
&= 2\cdot F^*(3) - 1 =
\end{aligned}$$

$$= 2 \cdot 0.99865 - 1 =$$
$$= 0.9973.$$

Odatle izravno slijedi druga tvrdnja.

Napomena: Pravilo $3 \cdot \sigma$ se vrlo često koristi za „prepoznavanje“ jesu li vrijednosti nekoga obilježja raspodijeljene prema normalnoj razdiobi.

c) Usporedite rezultate **b**) podzadatka s Čebiševljevim pravilom.

Rješenje: U Čebiševljevo pravilo (drugu nejednakost) najprije uvrstimo $\varepsilon = 2 \cdot \sigma$, a potom $\varepsilon = 3 \cdot \sigma$. Obje navedene vrijednosti su sigurno strogo pozitivne jer je svaka standardna devijacija strogo pozitivan realan broj. Dobivamo:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < 2 \cdot \sigma\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{(2 \cdot \sigma)^2} =$$
$$= 1 - \frac{\sigma^2}{4 \cdot \sigma^2} =$$
$$= 1 - \frac{1}{4} =$$
$$= \frac{3}{4} = 75\%,$$

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < 3 \cdot \sigma\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{(3 \cdot \sigma)^2} =$$
$$= 1 - \frac{\sigma^2}{9 \cdot \sigma^2} =$$
$$= 1 - \frac{1}{9} =$$
$$= \frac{8}{9} \approx 88.89\%$$

Odatle zaključujemo da se u segmentu $[\mu - 2 \cdot \sigma,\ \mu + 2 \cdot \sigma]$ sigurno nalazi barem 75% podataka, a u segmentu $[\mu - 3 \cdot \sigma,\ \mu + 3 \cdot \sigma]$ sigurno nalazi barem 88.89% podataka.

Pravila $2 \cdot \sigma$ i $3 \cdot \sigma$ daju puno bolju (pr)ocjenu navedenih postotaka.

6. a) Neka je $X \sim N(10,\ 5.5^2)$. Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla X poprimi vrijednost između 8 i 13.

Rješenje: Najprije očitamo:

$$\mu = 10,\ \sigma = 5.5.$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
P(8 \le X \le 13) &= F(13) - F(8) = \\
&= F^*\left(\frac{13-10}{5.5}\right) - F^*\left(\frac{8-10}{5.5}\right) \approx \\
&\approx F^*(0.55) - F^*(-0.36) = \\
&= F^*(0.55) - \left(1 - F^*(0.36)\right) = \\
&= 0.70884 + 0.64058 - 1 = \\
&= 0.34942.
\end{aligned}$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti je $p = 0.349215$.

b) Neka je $Y \sim N(100, 10^2)$. Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla Y poprimi vrijednost strogo manju od 90 ili strogo veću od 115.

Rješenje: Najprije očitamo:

$$\mu = 100,\ \sigma = 10.$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
P\left((Y < 90) + (Y > 115)\right) &= 1 - P(90 \le Y \le 115) = \\
&= 1 - (F(115) - F(90)) = \\
&= 1 - \left(F^*\left(\frac{115-100}{10}\right) - F^*\left(\frac{90-100}{10}\right)\right) = \\
&= 1 - \left(F^*(1.5) - F^*(-1)\right) = \\
&= 1 - \left(F^*(1.5) - 1 + F^*(1)\right) = \\
&= 2 - F^*(1.5) - F^*(1) = \\
&= 2 - 0.93319 - 0.84134 = \\
&= 0.22547
\end{aligned}$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti je $p = 0.225463$.

c) Neka je $Z \sim N(160, 20^2)$. Izračunajte vjerojatnost da slučajna varijabla Z poprimi vrijednost ne manju od 200.

Rješenje: Najprije očitamo:

$$\mu = 160,\ \sigma = 20.$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
P(Z \geq 200) &= 1 - P(Z < 200) = \\
&= 1 - F(200) = \\
&= 1 - F^*\left(\frac{200-160}{20}\right) = \\
&= 1 - F^*(2) = \\
&= 1 - 0.97725 = \\
&= 0.02275.
\end{aligned}$$

7. Otpor neke vrste otpornika je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 1 kΩ i standardnom devijacijom 50 Ω.

a) Izračunajte vjerojatnost da otpor slučajno izabranoga otpornika istovremeno ne bude manji od 0.97 kΩ i ne bude veći od 1.01 kΩ.

Rješenje: Iz zadanih podataka slijedi

$$\mu = 1 \text{ k}\Omega,$$
$$\sigma = 50 \ \Omega = 0.05 \text{ k}\Omega.$$

Dakle, $X \sim (1, 0.05^2)$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
P(0.97 \le X \le 1.01) &= F(1.01) - F(0.97) = \\
&= F^*\left(\frac{1.01-1}{0.05}\right) - F^*\left(\frac{0.97-1}{0.05}\right) = \\
&= F^*(0.2) - F^*(-0.6) = \\
&= F^*(0.2) - 1 + F^*(0.6) = \\
&= 0.57926 - 1 + 0.72575 = \\
&= 0.30501.
\end{aligned}$$

b) Izračunajte vjerojatnost da od 10 izabranih otpornika iste vrste najmanje dva imaju pojedinačni otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ.

Rješenje: Vjerojatnost da *slučajno izabrani otpornik* ima otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ jednaka je:

$$\begin{aligned}
P(0.99 \le X \le 1.03) &= F(1.03) - F(0.99) = \\
&= F^*\left(\frac{1.03-1}{0.05}\right) - F^*\left(\frac{0.99-1}{0.05}\right) = \\
&= F^*(0.6) - F^*(-0.2) = \\
&= F^*(0.6) - 1 + F^*(0.2) \overbrace{=}^{\text{prema } \mathbf{a})} 0.30501.
\end{aligned}$$

Neka je Y slučajna varijabla koja označava koliko ukupno otpornika, od njih 10, ima otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ. Y je binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 10$ i $p = 0.30501$, tj. $Y \sim B(10, 0.30501)$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned}
P(Y \ge 2) &= 1 - P(Y < 2) = \\
&= 1 - \big(P(Y = 0) + P(Y = 1)\big) = \\
&= 1 - (1 - 0.30501)^{10} - 10 \cdot 0.30501 \cdot (1 - 0.30501)^9 \approx 0.85833.
\end{aligned}$$

8. Starost nekoga elektroničkoga uređaja je normalna slučajna varijabla sa standardnom devijacijom 5 godina. Poznato je da 5.48% tih uređaja nije starije od dvije godine. Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani uređaj star više od 10 godina.

Rješenje: Iz zadanih podataka slijedi $\sigma = 5$, pa je

$$X \sim N\left(\mu, 5^2\right).$$

Neka je F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable. Tražimo vrijednost μ takvu da je

$$P(X \le 2) = 0.0548.$$

Taj broj nije naveden u tablici vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable, pa računamo:

$$\begin{aligned} P(X \ge 2) &= 1 - P(X \le 2) = \\ &= 1 - 0.0548 = \\ &= 0.9452. \end{aligned}$$

Taj broj je naveden u tablici vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti. Preciznije, vrijedi

$$F^*(1.6) = 0.9452.$$

Tako smo dobili jednakost

$$P(X \ge 2) = F^*(1.6),$$

pa iz rezultata zadatka 3.b) slijedi:

$$\mu = 2 + 5 \cdot 1.6 = 10.$$

Dakle, $X \sim N\left(10, 5^2\right)$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$\begin{aligned} p &= P(X > 10) = \\ &= 1 - P(X \le 10) = \\ &= 1 - F(10) = \\ &= 1 - F^*\left(\frac{10 - 10}{5}\right) = \\ &= 1 - F^*(0) = \\ &= 1 - 0.5 = \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

Napomena: Ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda vrijedi:

$$P(X < \mu) = P(X \le \mu) = P(X > \mu) = P(X \ge \mu) = 0.5.$$

9. Vijek trajanja nekoga elektroničkoga uređaja je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 250 sati. Odredite najveću moguću standardnu devijaciju tako da najmanje 90% svih uređaja toga tipa ima vijek trajanja najmanje 200 sati. (Zaokružite dobiveni rezultat na dvije decimale.)

Rješenje: Iz zadanih podataka slijedi $\mu = 250$, pa je

$$X \sim N\left(250, \sigma^2\right).$$

Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Tražimo vrijednost σ takvu da je

$$P(X \ge 200) \ge 0.9\,.$$

Iz tablice vrijednosti standardne normalne razdiobe očitamo:

$$F^{*}(1.29) = 0.90147\,.$$

Sada iz rezultata zadatka 3.b) slijedi:

$$\begin{aligned}
&250 \ge 200 + 1.29 \cdot \sigma, \\
&1.29 \cdot \sigma \le 50, \\
&\sigma \le \frac{50}{1.29} = 38.75969, \\
&\sigma = 38.75 \text{ sati.}
\end{aligned}$$

10. Predviđeno je da u sklopu redovitih priprema za Svjetsko rukometno prvenstvo reprezentacija Kraljevine Dajdamdaš odigra točno 50 utakmica, pri čemu svaka utakmica mora završiti ili pobjedom ili porazom (nema neriješena ishoda). Statistički podaci pokazuju da je u zadnjih 20 utakmica ta reprezentacija ostvarila 12 pobjeda i 8 poraza.

a) Koristeći lokalni Moivrè-Laplaceov teorem izračunajte vjerojatnost da u navedenih 50 utakmica reprezentacija ostvari točno 32 pobjede.

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava broj pobjeda reprezentacije. Iz zadanih podataka zaključujemo da je vjerojatnost pobjede reprezentacije u *slučajno odabranoj* utakmici jednaka

$$p = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0.6.$$

Dakle, X je binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 50$ i $p = 0.6$, tj.

$$X \sim B(50, 0.6).$$

Budući da je

$$n \cdot p = 50 \cdot 0.6 = 30 \geq 10,$$

možemo primijeniti lokalni Moivrè–Laplaceov teorem. Za $k = 32$ dobivamo:

$$\begin{aligned} P(X = 32) &\approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.6)}} \cdot e^{\frac{-(32 - 50 \cdot 0.6)^2}{2 \cdot 50 \cdot 0.6 \cdot (1 - 0.6)}} = \\ &= \frac{1}{12} \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot e^{\frac{-1}{6}} \approx \\ &\approx 0.09748. \end{aligned}$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti jednaka je 0.0989375.

b) Koristeći integralni Moivrè-Laplaceov teorem izračunajte vjerojatnost da ukupan broj pobjeda u navedenih 50 utakmica ne bude ni strogo manji od 30, ni strogo veći od 40.

Rješenje: Analogno kao u **a)** podzadatku zaključujemo da možemo primijeniti integralni Moivrè–Laplaceov teorem. Tražimo

$$P(30 \le X \le 40).$$

Dobivamo:

$$\begin{aligned}
P(30 \le X \le 40) &= F(40) - F(30) = \\
&= F^*\left(\frac{40+0.5-50\cdot 0.6}{\sqrt{50\cdot 0.6\cdot(1-0.6)}}\right) - F^*\left(\frac{30-0.5-50\cdot 0.6}{\sqrt{50\cdot 0.6\cdot(1-0.6)}}\right) \approx \\
&\approx F^*(3.03) - F^*(-0.14) \overbrace{=}^{\text{prema zadatku 1.}} \\
&= F^*(3.03) + F^*(0.14) - 1 = \\
&= 0.99878 + 0.55567 - 1 = \\
&= 0.55545.
\end{aligned}$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti jednaka je 0.44572.

11. Putem simetričnoga binarnog komunikacijskog kanala šalje se 100-znamenkasti niz nula i jedinica. Vjerojatnost da će slučajno izabrana znamenka biti pogrešno dekodirana (interpretirana) iznosi 10%. S točnošću od 10^{-5} izračunajte vjerojatnost da broj pogrešno primljenih znamenaka nije veći od 15 primjenom:

a) formulâ za binomnu razdiobu;
b) aproksimacije binomne razdiobe Poissonovom razdiobom;
c) aproksimacije binomne razdiobe normalnom razdiobom.

U slučajevima **b)** i **c)** odredite apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije s točnošću od 10^{-5}. (Kao originalnu vrijednost uzmite vrijednost dobivenu kao rezultat **a)** podzadatka.)

Rješenje: Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj pogrešno primljenih znamenaka. Iz zadanih podataka slijedi da je

$$X \sim B(100, 0.1).$$

U svakom podzadatku tražimo

$$P(X \leq 15) = P(0 \leq X \leq 15).$$

a)
$$P(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \binom{100}{k} \cdot 0.1^k \cdot (1-0.1)^{100-k} \approx$$
$$\approx 0.96011.$$

b) $$P(X \leq 15) = \sum_{k=0}^{15} \frac{(100 \cdot 0.1)^k}{k!} \cdot \mathrm{e}^{-(100 \cdot 0.1)} \approx 0.95126.$$

Apsolutna pogreška jednaka je

$$|0.95126 - 0.96011| = 0.00885,$$

a relativna

$$\left|\frac{0.00885}{0.96011}\right| \cdot 100 \approx 0.92177\%.$$

c)
$$P(X \leq 15) = F(15) \approx F^*\left(\frac{15 + 0.5 - 100 \cdot 0.1}{\sqrt{100 \cdot 0.1 \cdot (1-0.1)}}\right) =$$
$$= F^*\left(\frac{11}{6}\right) \approx$$

$$= F^*(1.83) =$$
$$= 0.96638.$$

Apsolutna pogreška jednaka je

$$|0.96638 - 0.96011| = 0.00627,$$

dok je pripadna relativna pogreška jednaka

$$\left|\frac{0.00627}{0.96011}\right| \cdot 100 \approx 0.65305\%.$$