Napomena: U svim zadacima i rezultatima zadataka s F^* je označena funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

1. Dokažite jednakost:

$$F^*(-x) = 1 - F^*(x),\ \forall x \geq 0.$$

2. Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijede jednakosti:

a) $P(X \geq 2 \cdot \mu - x) = P(X \leq x)$;
b) $P(X \leq 2 \cdot \mu - x) = P(X \geq x)$.

3. Neka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

a) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $P(X \leq a) \leq F^*(b)$. Dokažite da je tada $\mu \geq a - \sigma \cdot b$. Što se dobiva ako se pretpostavi $P(X \leq a) \geq F^*(b)$?

b) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi $P(X \geq a) \leq F^*(b)$. Dokažite da je tada: $\mu \leq a + \sigma \cdot b$. Što se dobiva ako se pretpostavi $P(X \geq a) \geq F^*(b)$?

4. Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $k \in \mathbb{N}$.

a) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ izračunajte $P\left(|X - \mu| < k \cdot \sigma\right)$.

b) Koristeći rezultat **a)** podzadatka izvedite *pravilo* $2 \cdot \sigma$ i *pravilo* $3 \cdot \sigma$:

- U segmentu $[\mu - 2 \cdot \sigma,\ \mu + 2 \cdot \sigma]$ nalazi se ukupno 95.45% svih vrijednosti varijable *X*.
- U segmentu $[\mu - 3 \cdot \sigma,\ \mu + 3 \cdot \sigma]$ nalazi se ukupno 99.73% svih vrijednosti varijable *X*.

c) Usporedite rezultate **b**) podzadatka s Čebiševljevim pravilom.

5. **a)** Neka je $X \sim N(10,\ 5.5^2)$. Izračunajte vjerojatnost da varijabla *X* poprimi vrijednost između 8 i 13.

b) Neka je $Y \sim N(100, 10^2)$. Izračunajte vjerojatnost da varijabla *Y* poprimi vrijednost strogo manju od 90 ili strogo veću od 115.

c) Neka je $Z \sim N(160, 20^2)$. Izračunajte vjerojatnost da varijabla *Z* poprimi vrijednost ne manju od 200.

6. Otpor neke vrste otpornika je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 1 kΩ i standardnom devijacijom 50 Ω.

a) Izračunajte vjerojatnost da otpor slučajno izabranoga otpornika istovremeno ne bude manji od 0.97 kΩ i ne bude veći od 1.01 kΩ.

b) Izračunajte vjerojatnost da od 10 izabranih otpornika iste vrste najmanje dva imaju pojedinačni otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ.

7. Starost nekoga elektroničkoga uređaja je normalna slučajna varijabla sa standardnom devijacijom 5 godina. Poznato je da 5.48% tih uređaja nije starije od dvije godine. Izračunajte vjerojatnost da je slučajno odabrani uređaj star više od 10 godina.

8. Vijek trajanja nekoga elektroničkoga uređaja je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 250 sati. Odredite najveću moguću standardnu devijaciju tako da najmanje 90% svih uređaja toga tipa ima vijek trajanja najmanje 200 sati. (Zaokružite dobiveni rezultat na dvije decimale.)

9. Predviđeno je da u sklopu redovitih priprema za Svjetsko rukometno prvenstvo reprezentacija Kraljevine Dajdamdaš odigra točno 50 utakmica, pri čemu svaka utakmica mora završiti ili pobjedom ili porazom (nema neriješena ishoda). Statistički podaci pokazuju da je u zadnjih 20 utakmica ta reprezentacija ostvarila 12 pobjeda i 8 poraza.

a) Koristeći lokalni Moivrè-Laplaceov teorem izračunajte vjerojatnost da u navedenih 50 utakmica reprezentacija ostvari točno 32 pobjede.

b) Koristeći integralni Moivrè-Laplaceov teorem izračunajte vjerojatnost da ukupan broj pobjeda u navedenih 50 utakmica ne bude ni strogo manji od 30, ni strogo veći od 40.

10. Putem simetričnoga binarnog komunikacijskog kanala šalje se 100-znamenkasti niz nula i jedinica. Vjerojatnost da će slučajno izabrana znamenka biti pogrešno dekodirana (interpretirana) iznosi 0.1. Izračunajte vjerojatnost da broj pogrešno primljenih znamenaka nije veći od 15 primjenom:

a) formulâ za binomnu razdiobu;
b) aproksimacije binomne razdiobe Poissonovom razdiobom;
c) aproksimacije binomne razdiobe normalnom razdiobom.

U slučajevima **b)** i **c)** odredite apsolutnu i relativnu pogrešku aproksimacije.

Rezultati zadataka

1. Primijetimo da je funkcija gustoće standardne normalne slučajne varijable parna, tj. da vrijedi jednakost $f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Odatle slijedi da za svaki $x \ge 0$ (uključujući i $x = +\infty$) vrijedi jednakost:

$$\int_{-x}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot \int_{0}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot \int_{-x}^{0} f(t)\cdot \mathrm{d}t.$$

(Vidjeti nastavni materijal iz *Matematike* 2). Zbog toga je:

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \int_{0}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x \Rightarrow \int_{0}^{+\infty} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(x)\cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Tako za svaki $x \ge 0$ dobivamo:

$$F^*(-x)+F^*(x) = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \left(\int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t\right) = 2\cdot \int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{x} f(t)\cdot \mathrm{d}t =$$
$$= 2\cdot \int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + 2\cdot \int_{-x}^{0} f(t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot\left(\int_{-\infty}^{-x} f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_{-x}^{0} f(t)\cdot \mathrm{d}t\right) = 2\cdot \int_{-\infty}^{0} f(t)\cdot \mathrm{d}t = 2\cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Odatle izravno slijedi tvrdnja zadatka.

2. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Koristeći rezultat zadatka 1. imamo redom:

a) $P(X \ge 2\cdot\mu - x) = 1 - P(X \le 2\cdot\mu - x) = 1 - F(2\cdot\mu - x) = 1 - F^*\left(\dfrac{2\cdot\mu - x - \mu}{\sigma}\right) = 1 - F^*\left(\dfrac{\mu - x}{\sigma}\right) = F^*\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right) = F(x) = P(X \le x).$

b) $P(X \le 2\cdot\mu - x) = 1 - P(X \ge 2\cdot\mu - x) \overset{\text{a)}}{=} 1 - P(X \le x) = P(X \ge x).$

3. **a)** Koristeći injektivnost i strogi rast funkcije F^* imamo redom:

$$P(X \le a) \le F^*(b) \Leftrightarrow F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \le F^*(b) \Leftrightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} \le b \Leftrightarrow \mu \ge a - \sigma\cdot b.$$

Pretpostavimo li da je $P(X \le a) \ge F^*(b)$, dobit ćemo nejednakost $\mu \le a - \sigma\cdot b$.

b) Koristeći injektivnost i strogi rast funkcije F^*, te rezultat zadatka 1. imamo redom:

$$P(X \ge a) \le F^*(b) \Leftrightarrow 1 - P(X \le a) \le F^*(b) \Leftrightarrow P(X \le a) \ge 1 - F^*(b) \Leftrightarrow F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \ge F^*(-b) \Leftrightarrow \frac{a-\mu}{\sigma} \ge -b \Leftrightarrow \mu \le a + \sigma\cdot b.$$

Pretpostavimo li da je $P(X \ge a) \ge F^*(b)$, dobit ćemo nejednakost $\mu \ge a + \sigma\cdot b$.

4. **a)** Imamo redom:

$$P(|X-\mu| < k\cdot\sigma) = P(-k\cdot\sigma < X - \mu < k\cdot\sigma) = P(\mu - k\cdot\sigma < X < \mu + k\cdot\sigma) =$$
$$= F^*\left(\frac{(\mu + k\cdot\sigma)-\mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{(\mu - k\cdot\sigma)-\mu}{\sigma}\right) = F^*(k) - F^*(-k) = 2\cdot F^*(k) - 1.$$

b) U rezultat prethodnoga podzadatka uvrstimo $k=3$, pa dobijemo:

$$P\left(|X-\mu|<3\cdot\sigma\right)=P(\mu-3\cdot\sigma<X<\mu+3\cdot\sigma)=2\cdot F^{*}(3)-1=0.9973.$$

a odatle slijedi tvrdnja. Analogno se dokazuje i tvrdnja za $k=2$.

c) U Čebiševljevo pravilo (drugu nejednakost) uvrstimo $\varepsilon=3\cdot\sigma$. Taj broj je sigurno nenegativan jer je svaka standardna devijacija nenegativan realan broj. Dobivamo:

$$P\left(|X-E(X)|<3\cdot\sigma\right)\geq 1-\frac{V(X)}{(3\cdot\sigma)^2}=1-\frac{\sigma^2}{9\cdot\sigma^2}=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}\approx 88.89\%$$

To znači da se u segmentu $[\mu-3\cdot\sigma,\ \mu+3\cdot\sigma]$ sigurno nalazi barem 88.89% podataka. Pravilo $3\cdot\sigma$ daje puno bolju ocjenu toga postotka. Analogan zaključak vrijedi i za pravilo $2\cdot\sigma$.

5. **a)** Najprije očitamo: $\mu=10,\ \sigma=5.5.$ Zbog toga je:

$$P(8\leq X\leq 13)=F^{*}\left(\frac{13-10}{5.5}\right)-F^{*}\left(\frac{8-10}{5.5}\right)\approx F^{*}(0.55)-F^{*}(-0.36)=F^{*}(0.55)-\left(1-F^{*}(0.36)\right)=$$
$$=0.70884+0.64058-1=0.34942.$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti je $p=0.349215$.

b) Najprije očitamo: $\mu=100,\ \sigma=10.$ Zbog toga je:

$$P\left[(X<90)\cup(X<115)\right]=1-P(90\leq X\leq 115)=1-\left(F^{*}\left(\frac{115-100}{10}\right)-F^{*}\left(\frac{90-100}{10}\right)\right)=1-\left(F^{*}(1.5)-F^{*}(-1)\right)=$$
$$=1-\left(F^{*}(1.5)-1+F^{*}(1)\right)=2-F^{*}(1.5)-F^{*}(1)=2-0.93319-0.84134=0.22547$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti je $p=0.225463$.

c) Najprije očitamo: $\mu=160,\ \sigma=20.$ Zbog toga je:

$$P(X\geq 200)=1-P(X<200)=1-F^{*}\left(\frac{200-160}{20}\right)=1-F^{*}(2)=1-0.97725=0.02275.$$

6. Iz zadanih podataka slijedi $\mu=1$ kΩ i $\sigma=50\ \Omega=0.05$ kΩ. Dakle, $X\sim(1,0.05^2)$.

a) Tražena vjerojatnost je jednaka:

$$P(0.97\leq X\leq 1.01)=F^{*}\left(\frac{1.01-1}{0.05}\right)-F^{*}\left(\frac{0.97-1}{0.05}\right)=F^{*}(0.2)-F^{*}(-0.6)=F^{*}(0.2)-1+F^{*}(0.6)=0.30501.$$

b) Vjerojatnost da slučajno izabrani otpornik ima otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ jednaka je:

$$P(0.99\leq X\leq 1.03)=F^{*}\left(\frac{1.03-1}{0.05}\right)-F^{*}\left(\frac{0.99-1}{0.05}\right)=F^{*}(0.6)-F^{*}(-0.2)=F^{*}(0.6)-1+F^{*}(0.2)\overset{\text{prema a)}}{=}0.30501.$$

Neka je Y slučajna varijabla koja označava koliko ukupno otpornika, od njih 10, ima otpor između 0.99 kΩ i 1.03 kΩ. Y je binomna slučajna varijabla s parametrima $n = 10$ i $p = 0.30501$, tj. $Y \sim B(10, 0.30501)$. Zbog toga je tražena vjerojatnost jednaka:

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \left(P(Y = 0) + P(Y = 1)\right) = 1 - (1 - 0.30501)^{10} - 10 \cdot 0.30501 \cdot (1 - 0.30501)^{9} \approx 0.85833.$$

7. Iz zadanih podataka slijedi $\sigma = 5$, pa je $X \sim N(\mu, 5^2)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Tražimo vrijednost μ takvu da je $P(X \leq 2) = 0.0548$. Taj broj nije naveden u tablici vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable, pa računamo:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - 0.0548 = 0.9452.$$

Taj broj je naveden u tablici vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti. Preciznije, vrijedi $F^*(1.6) = 0.9452$. Tako smo dobili jednakost $P(X \geq 2) = F^*(1.6)$, pa iz rezultata zadatka 3.b) slijedi:

$$\mu = 2 + 5 \cdot 1.6 = 10.$$

Dakle, $X \sim N(10, 5^2)$, pa je tražena vjerojatnost jednaka:

$$p = P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - F^*\left(\frac{10 - 10}{5}\right) = 1 - F^*(0) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Napomena: Ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda vrijedi: $P(X \leq \mu) = P(X \geq \mu) = 0.5.$

8. Iz zadanih podataka slijedi $\mu = 250$, pa je $X \sim N(250, \mu^2)$. Neka je F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X. Tražimo vrijednost σ takvu da je $P(X \geq 200) \geq 0.9$. Iz tablice vrijednosti standardne normalne razdiobe očitamo: $F^*(1.29) = 0.90147$. Sada iz rezultata zadatka 3.b) slijedi:

$$250 \geq 200 + 1.29 \cdot \sigma \Leftrightarrow \sigma \leq \frac{50}{1.29} = 38.75969 \Rightarrow \sigma = 38.75 \text{ sati.}$$

9. Neka je X slučajna varijabla koja označava broj pobjeda reprezentacije. Iz zadanih podataka slijedi da je $X \sim B\left(50, \frac{3}{5}\right)$.

a) Budući da je $n \cdot p = 50 \cdot \frac{3}{5} = 30 \geq 10$, možemo primijeniti lokalni Moivrè–Laplaceov teorem. Za $k = 32$ dobivamo:

$$P(X = 32) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot 50 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)}} \cdot e^{-\frac{\left(32 - 50 \cdot \frac{3}{5}\right)^2}{2 \cdot 50 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(1 - \frac{3}{5}\right)}} = \frac{1}{12} \cdot \sqrt{\frac{6}{\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{6}} \approx 0.09748.$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti jednaka je 0.0989375.

b) Analogno kao u **a)** podzadatku zaključujemo da možemo primijeniti integralni Moivrè–Laplaceov teorem. Tražimo $P(30 \leq X \leq 40)$. Dobivamo:

$$P(30 \le X \le 40) = F^*\left(\frac{40+\frac{1}{2}-50\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{50\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)}}\right) - F^*\left(\frac{30-\frac{1}{2}-50\cdot\frac{3}{5}}{\sqrt{50\cdot\frac{3}{5}\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)}}\right) \approx F^*(3.03) - F^*(-0.14) \overset{\text{prema zadatku 1.}}{=}$$

$$= F^*(3.03) + F^*(0.14) - 1 = 0.55545.$$

Napomena: Točnija vrijednost tražene vjerojatnosti jednaka je 0.44572.

10. Neka je X slučajna varijabla koja označava ukupan broj pogrešno primljenih znamenaka. Iz zadanih podataka slijedi da je $X \sim B\left(100, \frac{1}{10}\right)$. U svakom podzadatku tražimo $P(X \le 15) = P(0 \le X \le 15)$.

a) $P(X \le 15) = \sum_{k=0}^{15}\binom{100}{k}\cdot 0.1^k \cdot (1-0.1)^{100-k} \approx 0.96011.$

b) $P(X \le 15) = \sum_{k=0}^{15}\frac{\left(100\cdot\frac{1}{10}\right)^k}{k!}\cdot e^{-\left(100\cdot\frac{1}{10}\right)} \approx 0.95126.$ Apsolutna pogreška jednaka je 0.00885, a relativna 0.92716%.

c) $P(X \le 15) = F^*\left(\frac{15+\frac{1}{2}-100\cdot\frac{1}{10}}{\sqrt{100\cdot\frac{1}{10}\cdot\left(1-\frac{1}{10}\right)}}\right) = F^*\left(\frac{11}{6}\right) \approx F^*(1.83) = 0.96638.$ Apsolutna pogreška jednaka je 0.00651, a relativna 0.67842%.