4.5. NORMALNA RAZDIOBA

NORMALNA RAZDIOBA.

APROKSIMACIJA BINOMNE RAZDIOBE NORMALNOM RAZDIOBOM.

4.5.1. NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Neka je X neprekidna slučajna varijabla čija je slika $R(X) = \mathbb{R}$.
- Kažemo da je slučajna varijabla X *normalna*, odnosno da ima *normalnu razdiobu* ako je njezina funkcija gustoće dana pravilom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

- pri čemu su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante.
- Tada pišemo: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

4.5.2. NAPOMENA

- Dokaz da je funkcija f doista funkcija gustoće zahtijeva izračun nepravoga integrala

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} \cdot \mathrm{d}x$$

- Taj integral nije moguće riješiti elementarnim metodama (iz *Matematike* 2), nego tzv. *prijelazom na polarne koordinate.*
- Tako se dobiva:

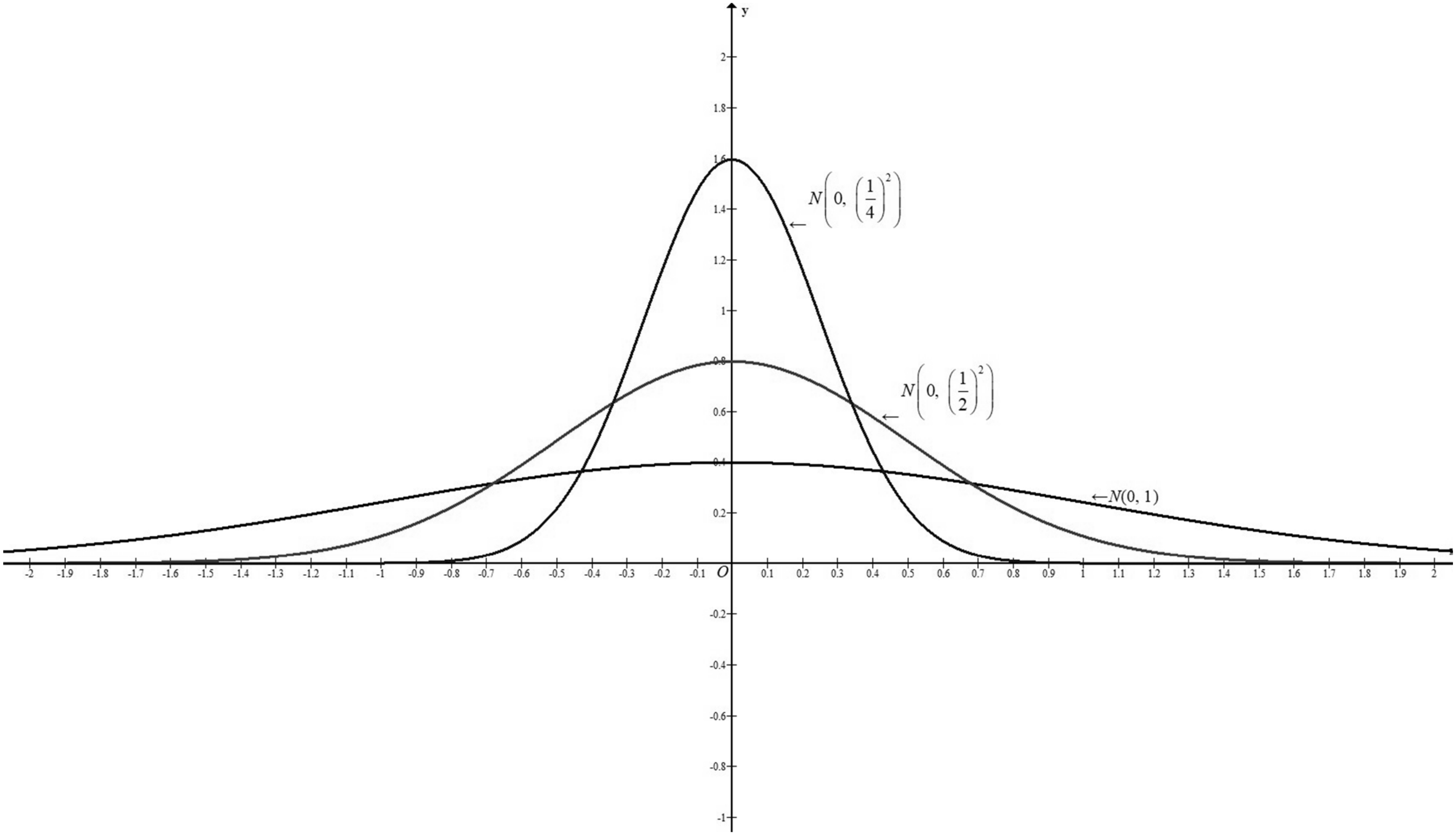
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2} \cdot \mathrm{d}x = \sqrt{2\cdot\pi}$$

4.5.3. OSNOVNI NUMERIČKI POKAZATELJI NORMALNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Oznake μ i σ korištene u definiciji funkcije gustoće normalne razdiobe nisu odabrane na slučajan način.
- Naime, koristeći jednakost iz Napomene 4.5.2. lako se pokazuje valjanost sljedećih jednakosti:
- $E(X) = \mu$,
- $V(X) = \sigma^2$,
- $\sigma(X) = \sigma$.
- Dakle, normalna slučajna varijabla *jednoznačno* je određena zadavanjem svojega očekivanja i svoje standardne devijacije.

4.5.4. GRAF FUNKCIJE GUSTOĆE NORMALNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Za fiksirane vrijednosti konstanti μ i σ graf funkcije gustoće normalne slučajne varijable je tzv. *Gaussova* ili *zvonolika* krivulja (vidjeti sljedeći slide).
- Zbog toga se normalna razdioba ponekad naziva i *Gaussova razdioba.*
- Zbog "nezgodne" funkcije gustoće, funkciju razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable nije moguće elementarno odrediti, niti nacrtati.
- Za određivanje funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable potrebno je poznavati tzv. *gama-funkcije.*


y
$N\left(0, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$
$N\left(0, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$
$N(0, 1)$
O

4.5.5. STANDARDNA (JEDINIČNA) NORMALNA SLUČAJNA VARIJABLA

- Kažemo da normalna slučajna varijabla X *standardna*, odnosno da ima *standardnu* (*jediničnu*) *normalnu razdiobu* ako je $X \sim N(0, 1)$.
- Za standardnu (jediničnu) normalnu razdiobu vrijedi:
- $E(X) = 0$,
- $V(X) = \sigma(X) = 1$
- Funkcija gustoće: $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$
- Vrijednosti **funkcije razdiobe vjerojatnosti** F je nemoguće elementarno izračunati, pa su tabelirane približne vrijednosti te funkcije.
- Ta je tablica sastavni dio *Repetitorija vjerojatnosti i statistike*.

4.5.6. NAPOMENA

- Prema "*pravilu* $3 \cdot \boldsymbol{\sigma}$" najmanje 99.73% vrijednosti neprekidne slučajne varijable koja ima standardnu normalnu razdiobu pripada segmentu [-3, 3].
- U tablici su navedene vrijednosti funkcije razdiobe za segment [0, 3.09] s korakom 0.01.
- Pomoću tih vrijednosti jednoznačno su određene i vrijednosti funkcije razdiobe u segmentu [-3, 0].
- Preciznije, ako je F funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable, onda za svaki $x \geq 0$ vrijedi jednakost:
- $F(-x) = 1 - F(x).$

4.5.7. ODREĐIVANJE VRIJEDNOSTI FUNKCIJE RAZDIOBE VJEROJATNOSTI

- Neka su $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, F funkcija razdiobe vjerojatnosti varijable X i F^* funkcija razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.
- Tada za sve a, $b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$ vrijede jednakosti:

$$F(x) = P(X \leq x) = F^*\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \; \forall x \in \mathbb{R};$$

$$P(a < x < b) = P(a \leq x < b) = P(a < x \leq b) = P(a \leq x \leq b) = F^*\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F^*\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right).$$

4.5.8. VEZA IZMEĐU BINOMNE RAZDIOBE I NORMALNE RAZDIOBE

- U određenim slučajevima binomnu razdiobu možemo aproksimirati normalnom razdiobom.
- Preciznije, vrijede sljedeća dva teorema.
- **Teorem 1**. (*lokalni Moivrè-Laplaceov teorem*) Neka su $p \in \langle 0,\ 1\rangle$ i $X_n \sim B(n,\ p)$ niz binomnih slučajnih varijabli. Za dovoljno velike $n \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeća aproksimacija:

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)}} \cdot e^{-\frac{(k - n \cdot p)^2}{2 \cdot n \cdot p \cdot (1 - p)}}$$

4.5.8 VEZA IZMEĐU BINOMNE RAZDIOBE I NORMALNE RAZDIOBE

- **Teorem 2.** (*integralni Moivrè-Laplaceov teorem*) Neka su $p \in \langle 0,\ 1\rangle$ i $X_n \sim B(n,\ p)$ niz binomnih slučajnih varijabli. Tada za sve $a,\ b \in \mathbb{R}$ takve da je $a \leq b$ vrijedi sljedeća aproksimacija:

$$P(a \leq X_n \leq b) \approx F^*\left(\frac{b+\frac{1}{2}-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)-F^*\left(\frac{a-\frac{1}{2}-n\cdot p}{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}\right)$$

4.5.9. NAPOMENA

- Ranije smo vidjeli da se u slučaju tzv. *rijetkih događaja* (tj. kad $n \to \infty$, $p \to 0$ i $n \cdot p \to$ const.) binomna razdioba može dobro aproksimirati Poissonovom razdiobom.
- Oba granična teorema (teoremi 1. i 2.) vrijede za *dovoljno velike* $n \in \mathbb{N}$, tj. kad $n \to +\infty$, a p ostaje nepromijenjen.
- Naziv *lokalni* koristi se jer se aproksimacija odnosi na vrijednost slučajne varijable u jednoj točki.
- Naziv *integralni* koristi se jer se aproksimacija računa na intervalu pomoću integrala (jer je funkcija razdiobe vjerojatnosti definirana pomoću integrala).

4.5.10. ČEBIŠEVLJEVO PRAVILO ZA NEPREKIDNE SLUČAJNE VARIJABLE

- Neka je X neprekidna slučajna varijabla s konačnim očekivanjem, tj. takva da je $E(X) < +\infty$.
- Tada za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- Odatle slijedi:

$$P\left(\left|X - E(X)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

- Ove nejednakosti poznate su kao *Čebiševljevo pravilo*.