4.6.

NEPREKIDNE FUNKCIJE

4.6.1. NEPREKIDNOST FUNKCIJE U TOČKI

- Neka su $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ i $c \in \langle a, b\rangle$.
- Kažemo da je funkcija f **neprekidna u točki** c ako postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i jednaka je $f(c)$.
- Kažemo da funkcija f **ima prekid** u točki c ako f nije neprekidna u točki c.
- Skup svih točaka prekida funkcije f označavamo s $B(f)$ (prema engl.: *breakpoint* = točka prekida).
- **Važno:** Funkcija može biti (ne)prekidna **samo u točkama u kojima je definirana**.
- U točkama koje ne pripadaju domeni funkcije, funkcija ne može biti neprekidna, ni imati prekid.

4.6.2. NEPREKIDNA FUNKCIJA

- Kažemo da je funkcija $f : \langle a,\ b\rangle \to \mathbb{R}$ **neprekidna na intervalu** $\langle a,\ b\rangle$ ako je f neprekidna u svakoj točki toga intervala.
- Grubo i neprecizno rečeno, f je neprekidna na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ ako njezin graf možemo nacrtati ne dižući olovku s papira.
- **Problem**: Proširiti pojam neprekidnosti i na funkcije čija prirodna domena nije otvoreni interval.
- Ako je prirodna domena funkcije npr. segment $[a,b]$, onda je f neprekidna u točki a ako postoji granična vrijednost $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ i jednaka je $f(a)$.
- Slično, f je neprekidna u točki b ako postoji granična vrijednost
- $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ i jednaka je $f(b)$.
- Kažemo da je f **neprekidna na** $\mathbb{R}$ ako je neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$.

4.6.3. NAPOMENA

- Sve elementarne funkcije (polinomi, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije, hiperbolne funkcije, area funkcije itd.) su neprekidne funkcije na svojim prirodnim domenama.

4.6.4. NEKA SVOJSTVA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

- Neka su f i g realne funkcije neprekidne u točki c.
- **1.)** Funkcije $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ i $\alpha \cdot f$ (pri čemu je $\alpha \in \mathbb{R}$) su neprekidne u točki c.
- **2.** Ako je funkcija f neprekidna i u točki $g(c)$, onda je i kompozicija $h = g \circ f$ neprekidna u točki c. Tada operacija graničnoga prijelaza ''komutira'' s neprekidnom funkcijom, tj. vrijedi jednakost:

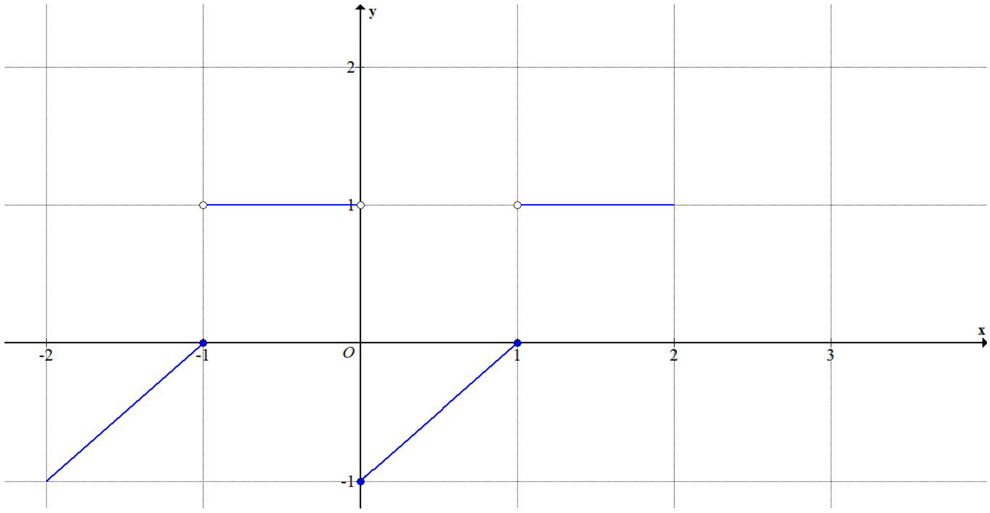
$$\lim_{x \to c} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to c} f(x)).$$

4.6.5. NEKA SVOJSTVA FUNKCIJA NEPREKIDNIH NA SEGMENTU

- **1.** Postoje jedinstveni m, $M \in \mathbb{R}$ takvi da:
- **a)** $f\left(\left[a,b\right]\right) := \left\{f(x) : x \in \left[a,b\right]\right\} = \left[m,M\right]$;
- **b)** Za svaki $y \in \left[m,M\right]$ postoji barem jedan $x \in \left[a,b\right]$
- takav da je $y = f(x)$.
- **2.** Svaka funkcija neprekidna na segmentu je omeđena. Slika segmenta pri neprekidnom preslikavanju je segment.
- **3.** Ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda postoji barem jedan
- $c \in \left\langle a,b\right\rangle$ takav da je $f(c) = 0$.

1. Odredite domenu i sliku funkcije f, skup svih nultočaka i skup svih točaka prekida te funkcije ako je graf funkcije f:

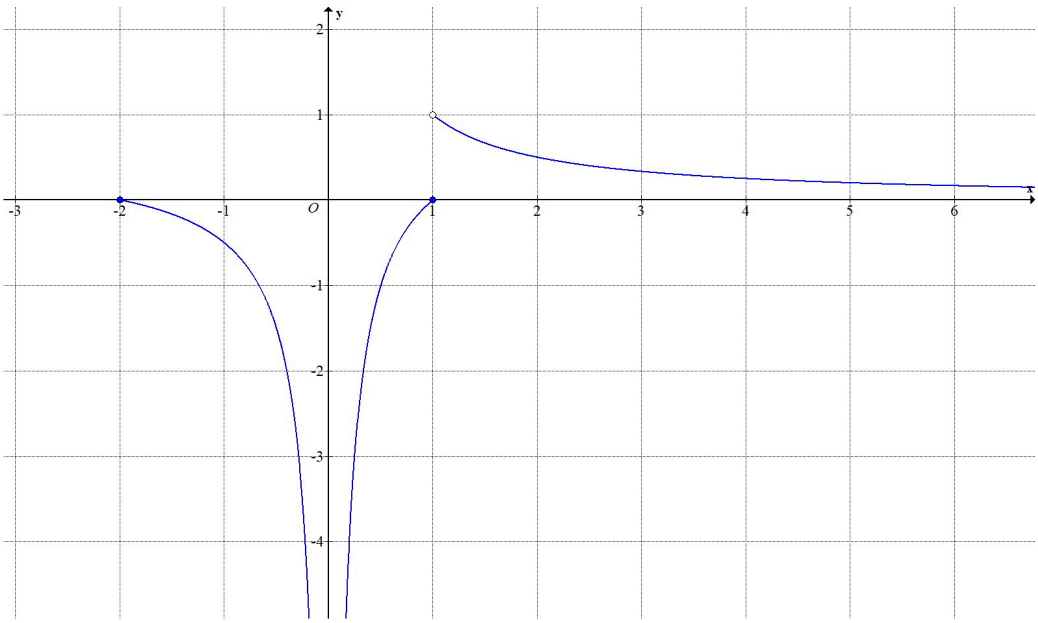
a)



Slika 1.

Rješenje: $D(f)=[-2,2]$, $\mathrm{Im}(f)=[-1,0]\cup\{1\}$, $N(f)=\{-1,1\}$, $B(f)=\{-1,0,1\}$.

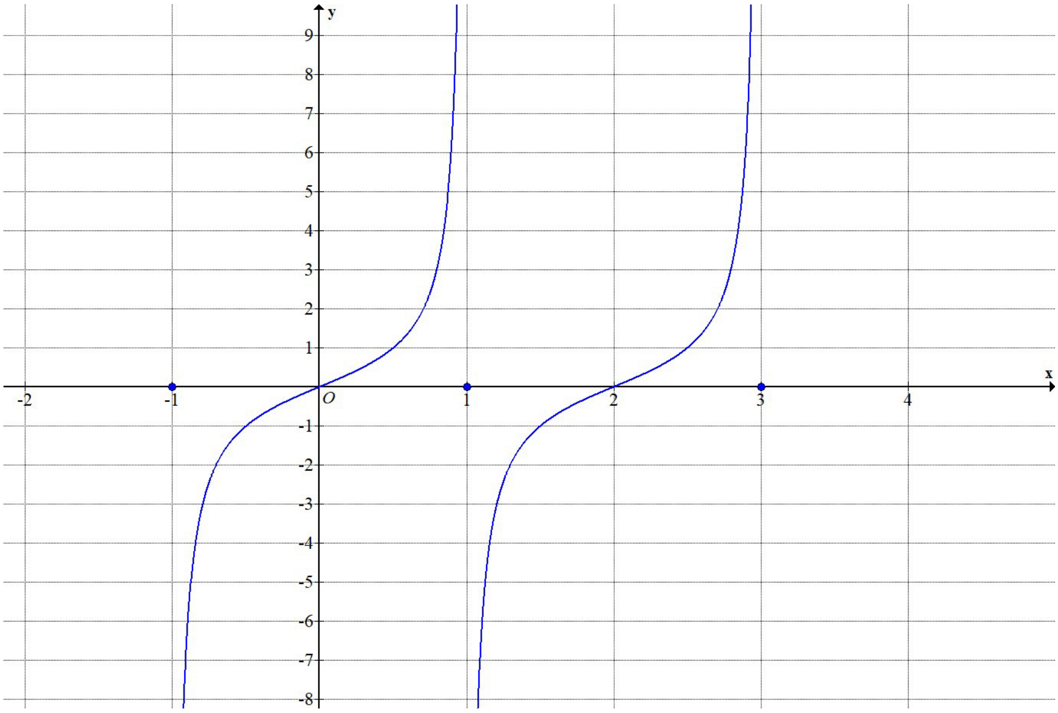
b)



Slika 2.

Rješenje: $D(f)=[-2,+\infty\rangle\setminus\{0\}$, $\mathrm{Im}(f)=\langle-\infty,1\rangle$, $N(f)=\{-2,1\}$, $B(f)=\{1\}$.

c)



Slika 3.

Rješenje: $D(f)=[-1,3]$, $\text{Im}(f)=\mathbb{R}$, $N(f)=\{-1,0,1,2,3\}$, $B(f)=\{-1,1,3\}$.

2. Funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana je pravilom:

$$g(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-t}, \text{ za } t<0,\\ \sin t, \text{ za } t\in[0,2\cdot\pi],\\ 1-\cos t, \text{ inače.}\end{cases}$$

Je li funkcija g neprekidna na $\mathbb{R}$? Precizno obrazložite svoj odgovor.

Rješenje: Da. Na intervalima $\langle-\infty,0\rangle$, $\langle 0,2\cdot\pi\rangle$ i $\langle 2\cdot\pi,+\infty\rangle$ funkcija je neprekidna jer su funkcije

$$g_1(t)=1-\mathrm{e}^{-t},\quad g_2(t)=\sin t \;\text{ i }\; g_3(t)=1-\cos t$$

neprekidne na $\mathbb{R}$ (kao elementarne funkcije, odnosno razlika elementarnih funkcija), pa posebno i na navedenim intervalima. „Kritične“ točke (tj. točke u kojima treba zasebno provjeriti neprekidnost) su

$$t_1=0 \;\text{ i }\; t=2\cdot\pi\,.$$

Za $t=0$ imamo:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0-}\left(1-\mathrm{e}^{-t}\right)=1-\mathrm{e}^{-0}=1-1=0,\\ &\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}(\sin t)=\sin 0=0,\\ &g(0)=\sin 0=0,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je g neprekidna u nuli.

Za $t=2\cdot\pi$ imamo:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to(2\cdot\pi)-} g(t)=\lim_{t\to(2\cdot\pi)-}(\sin t)=\sin(2\cdot\pi)=0,\\ &\lim_{t\to(2\cdot\pi)+} g(t)=\lim_{t\to(2\cdot\pi)+}(1-\cos t)=1-\cos(2\cdot\pi)=1-1=0,\\ &g(2\cdot\pi)=\sin(2\cdot\pi)=0,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je g neprekidna u $t=2\cdot\pi$.

Dakle, g je neprekidna i u svakoj od „kritičnih“ točaka, pa zaključujemo da je g neprekidna na $\mathbb{R}$.

3. Odredite $a,\ b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$ ako je:

$$\mathbf{a})\ f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{za } x \geq 1; \\ a \cdot x + b, & \text{za } 0 < x < 1; \\ x+1, & \text{za } x \leq 0; \end{cases}$$

Rješenje: f je definirana pomoću triju polinoma 1. stupnja koji su neprekidni svugdje gdje su definirani. „Problematične“ su samo one točke u kojima se mijenja pravilo funkcije, a to su $x = 0$ i $x = 1$. Zbog toga treba odrediti $a, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna i u tim dvjema točkama. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 1-} f(x) = f(1), \\ &\lim_{x \to 1-} (a \cdot x + b) = 1 - 1, \\ &a \cdot 1 + b = 0, \\ &a + b = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0), \\ &\lim_{x \to 0+} (a \cdot x + b) = 0 + 1, \\ &a \cdot 0 + b = 1, \\ &b = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ b = 1 \end{cases}$$

$$(a, b) = (-1, 1).$$

b) $f(t)=\begin{cases}\ln(t+1), & \text{za } t\geq 0;\\ a\cdot t+b, & \text{za } -1<t<0;\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right), & \text{za } t\leq -1.\end{cases}$

Rješenje: f je definirana pomoću kompozicije logaritamske funkcije i polinoma 1. stupnja, polinoma 1. stupnja i kompozicije trigonometrijske funkcije i polinoma 1. stupnja. Sve te funkcije su neprekidne svugdje gdje su definirane. „Problematične" su točke u kojima se mijenja pravilo funkcije, a to su $t=-1$ i $t=0$. Zbog toga treba odrediti $a,b\in\mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna i u tim dvjema točkama. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0-} f(t)=f(0),\\ &\lim_{t\to 0-}(a\cdot t+b)=\ln(0+1),\\ &a\cdot 0+b=0,\\ &b=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to(-1)+} f(t)=f(-1),\\ &\lim_{t\to(-1)+}(a\cdot t+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)\right),\\ &a\cdot(-1)+b=-1,\end{aligned}$$

$$\begin{cases}b=0,\\ -a+b=-1\end{cases}$$

$$(a,b)=(1,0).$$

4. Ako je $g:\mathbb{R}\to\left\langle \frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ funkcija definirana pravilom

$$g(y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^3+1}{2}\right),$$

izračunajte $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{4}} g^{-1}(y)$.

Rješenje: Odredimo najprije pravilo inverza zadane funkcije. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&x=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^3+1}{2}\right) \quad /\mathrm{tg}\\
&\mathrm{tg}\,x=\frac{y^3+1}{2} \quad /\cdot 2\\
&2\cdot\mathrm{tg}\,x=y^3+1,\\
&y=\sqrt[3]{2\cdot\mathrm{tg}\,x-1},\\
&g^{-1}(y)=\sqrt[3]{2\cdot\mathrm{tg}\,y-1}.
\end{aligned}$$

Zbog toga je:

$$\begin{aligned}
L&=\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\sqrt[3]{2\cdot\mathrm{tg}\,y-1}=\\
&=\sqrt[3]{2\cdot\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}(\mathrm{tg}\,y)-1}=\\
&=\sqrt[3]{2\cdot\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)-1}=\\
&=\sqrt[3]{2\cdot 1-1}=1.
\end{aligned}$$

5. Može li se funkcija

$$f(x) = \operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)$$

dodefinirati u točki $c = 2$ tako da dobivena funkcija bude neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje: Računamo limes slijeva i limes zdesna u točki $c = 2$. Imamo:

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{x\to 2-}\left(\operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)\right) = \\
&= \lim_{x\to 2-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x-2}} - e^{\frac{-2}{x-2}}}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{-\frac{2}{x-2}}}\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := x-2\\ \text{kad } x \to 2-, \text{ onda } t \to 0-\end{array}\right\} = \\
&= \lim_{t\to 0-}\left(\frac{e^{\frac{2}{t}} - e^{\frac{-2}{t}}}{e^{\frac{2}{t}} + e^{\frac{-2}{t}}}\right) = \\
&= \lim_{t\to 0-}\left(\frac{e^{\frac{4}{t}} - 1}{e^{\frac{4}{t}} + 1}\right) = \\
&= \frac{0-1}{0+1} = -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \lim_{x\to 2+}\left(\operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)\right) = \\
&= \lim_{x\to 2+}\left(\frac{e^{\frac{2}{x-2}} - e^{\frac{-2}{x-2}}}{e^{\frac{2}{x-2}} + e^{\frac{-2}{x-2}}}\right) = \\
&= \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t := x-2\\ \text{kad } x \to 2-, \text{ onda } t \to 0-\end{array}\right\} = \\
&= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{e^{\frac{2}{t}} - e^{\frac{-2}{t}}}{e^{\frac{2}{t}} + e^{\frac{-2}{t}}}\right) =
\end{aligned}$$

$$= \lim_{t\to 0+}\left(\frac{1-e^{\frac{-4}{t}}}{1+e^{\frac{-4}{t}}}\right) = \\ = \frac{1-0}{1+0} = \\ = 1.$$

Vidimo da su izračunani limesi različiti, pa traženo dodefiniranje nije moguće.

6. Dokažite da funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g(t) = t + \cos t$$

ima (barem jednu) nultočku u segmentu $[-1,0]$.

Rješenje: Primijetimo najprije da je funkcija g neprekidna na $\mathbb{R}$ jer je zbroj dvaju elementarnih funkcija (polinoma i trigonometrijske funkcije) koje su neprekidne na $\mathbb{R}$. Posebno, ta je funkcija neprekidna i na segmentu $[-1,0]$. Zbog toga možemo iskoristiti svojstvo funkcije neprekidne na segmentu:

Ako je f neprekidna na $[a,b]$ *i ako je* $f(a)\cdot f(b)<0$, *onda f ima barem jednu nultočku u* $[a,b]$. (Obratna tvrdnja općenito nije točna (vidjeti sljedeći zadatak).)

Odredimo

$$\begin{aligned} g(-1)\cdot g(0) &= (-1+\cos(-1))\cdot(0+\cos 0) = \\ &= (\cos 1 - 1)\cdot(0+1) = \\ &= \cos 1 - 1 < 0 \end{aligned},$$

pa slijedi tvrdnja.

7. Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom:

a) Ako funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)<0$, onda f ima nultočku u tom segmentu.

b) Ako neprekidna funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)<0$, onda f ima jedinstvenu nultočku u tom segmentu.

c) Ako neprekidna funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)>0$, onda f nema nijednu nultočku u tom segmentu.

Rješenje: Nijedna od triju navedenih tvrdnji nije točna.

a) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{za } x\le 0,\\ 1, & \text{inače,}\end{cases}$$

i bilo koji segment $[a,b]$ takav da je $a\le 0<b$.

Očito je

$$f(a)\cdot f(b)=(-1)\cdot 1=-1<0,$$

a f nema nijednu realnu nultočku.

b) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x)=\cos x$ i npr. segment $[0,3\cdot\pi]$.

Očito je

$$f(0)\cdot f(3\cdot\pi)=\cos 0\cdot\cos(3\cdot\pi)=1\cdot(-1)=-1<0,$$

a f ima točno tri realne nultočke u navedenom segmentu (to su $x_1=\frac{\pi}{2}$, $x_2=\frac{3}{2}\cdot\pi$ i $x_3=\frac{5}{2}\cdot\pi$).

c) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x)=x^2-1$ i bilo koji segment $[a,b]$ takav da je $a<-1<1<b$.

Očito su $f(a)>0$ i $f(b)>0$, otkuda slijedi $f(a)\cdot f(b)>0$. Međutim, f ima točno dvije realne nultočke u segmentu $[a,b]$.