4.6.

NEPREKIDNE FUNKCIJE

4.6.1. NEPREKIDNOST FUNKCIJE U TOČKI

- Neka su $f:\langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ i $c \in \langle a, b\rangle$.
- Kažemo da je funkcija f **neprekidna u točki** c ako postoji limes $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ i taj limes je jednak $f(c)$.
- Kažemo da funkcija f **ima prekid** u točki c ako f nije neprekidna u točki c.
- Skup svih točaka prekida funkcije f označavamo s $B(f)$ (prema engl.: *breakpoint* = točka prekida).
- **Važno:** Funkcija može biti (ne)prekidna <u>samo u točkama u kojima je definirana</u>.
- U točkama koje ne pripadaju domeni funkcije, funkcija ne može biti neprekidna, ni imati prekid.

4.6.2. NEPREKIDNA FUNKCIJA

- Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ **neprekidna na intervalu** $\langle a, b\rangle$ ako je f neprekidna u svakoj točki toga intervala.
- Grubo i neprecizno rečeno, f je neprekidna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako njezin graf možemo nacrtati ne dižući olovku s papira.
- **Problem**: Proširiti pojam neprekidnosti i na funkcije čija prirodna domena nije otvoreni interval.
- Ako je prirodna domena funkcije npr. segment $[a, b]$, onda je f neprekidna u točki a ako postoji limes zdesna $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ i taj limes je jednak $f(a)$.
- Slično, f je neprekidna u točki b ako postoji limes slijeva $\lim\limits_{x\to b-} f(x)$ i taj limes je jednak $f(b)$.
- Kažemo da je f **neprekidna na** $\mathbb{R}$ ako je neprekidna u svakoj točki $c \in \mathbb{R}$.

4.6.3. NAPOMENA

- Sve elementarne funkcije (polinomi, eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije, ciklometrijske funkcije, hiperbolne funkcije, area funkcije itd.) su neprekidne funkcije na svojim prirodnim domenama.

4.6.4. NEKA SVOJSTVA NEPREKIDNIH FUNKCIJA

- Neka su f i g realne funkcije neprekidne u točki c.
- 1.) Funkcije $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ i $\alpha\cdot f$ (pri čemu je $\alpha\in\mathbb{R}$) su neprekidne u točki c.
- 2. Ako je funkcija f neprekidna i u točki $g(c)$, onda je i kompozicija $h=f\circ g$ neprekidna u točki c. Tada operacija graničnoga prijelaza ''komutira'' s neprekidnom funkcijom, tj. vrijedi jednakost:

$$\lim_{x\to c}(g\circ f)(x)=g(\lim_{x\to c}f(x)).$$

4.6.5. NEKA SVOJSTVA FUNKCIJA NEPREKIDNIH NA SEGMENTU

- 1. Postoje jedinstveni m, $M \in \mathbb{R}$ takvi da:
- a) $f([a, b]) := \{f(x) : x \in [a, b]\} = [m, M]$;
- b) Za svaki $y \in [m, M]$ postoji barem jedan $x \in [a, b]$ takav da je $f(x) = y$.
- 2. Svaka funkcija neprekidna na segmentu $[a, b]$ je omeđena.
- 3. Ako je $f(a) \cdot f(b) < 0$, onda postoji barem jedan $c \in \langle a, b\rangle$ takav da je $f(c) = 0$.