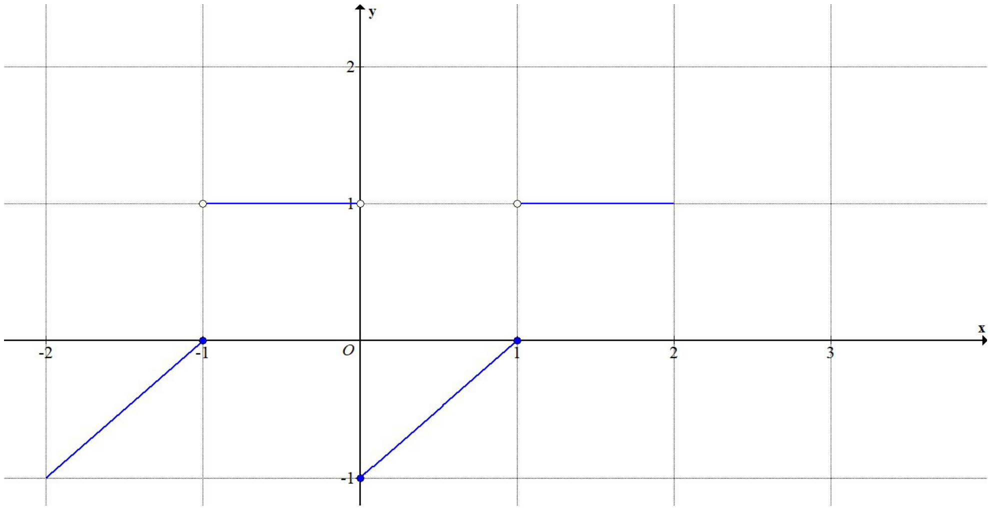
1. Odredite domenu i sliku funkcije f, skup svih nultočaka i skup svih točaka prekida te funkcije ako je graf funkcije f:

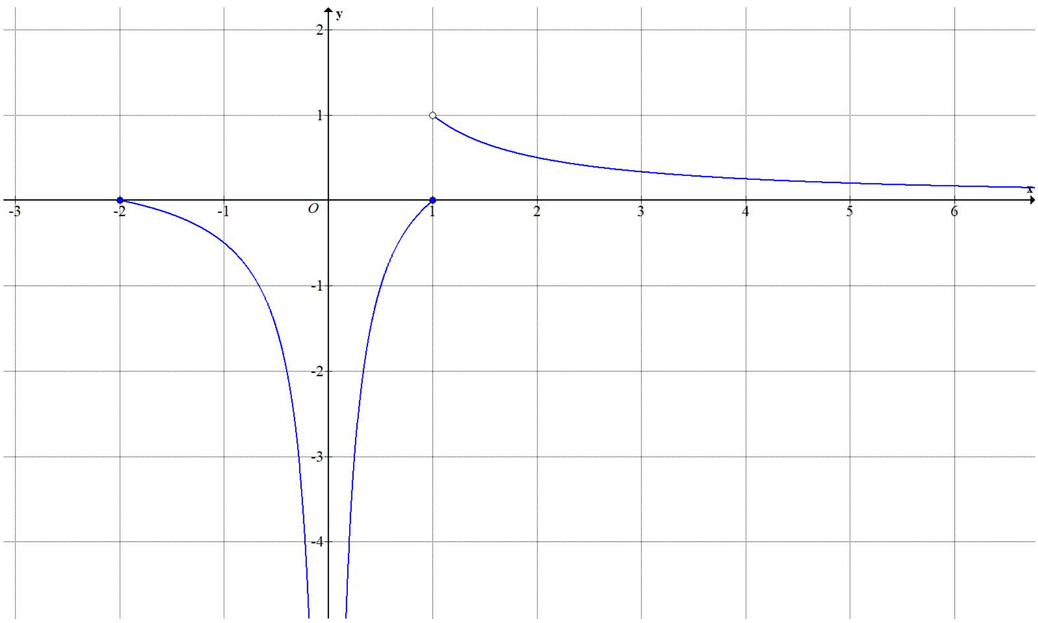
a)



Slika 1.

Rješenje: $D(f)=[-2,2]$, $\text{Im}(f)=[-1,0]\cup\{1\}$, $N(f)=\{-1,1\}$, $B(f)=\{-1,0,1\}$.

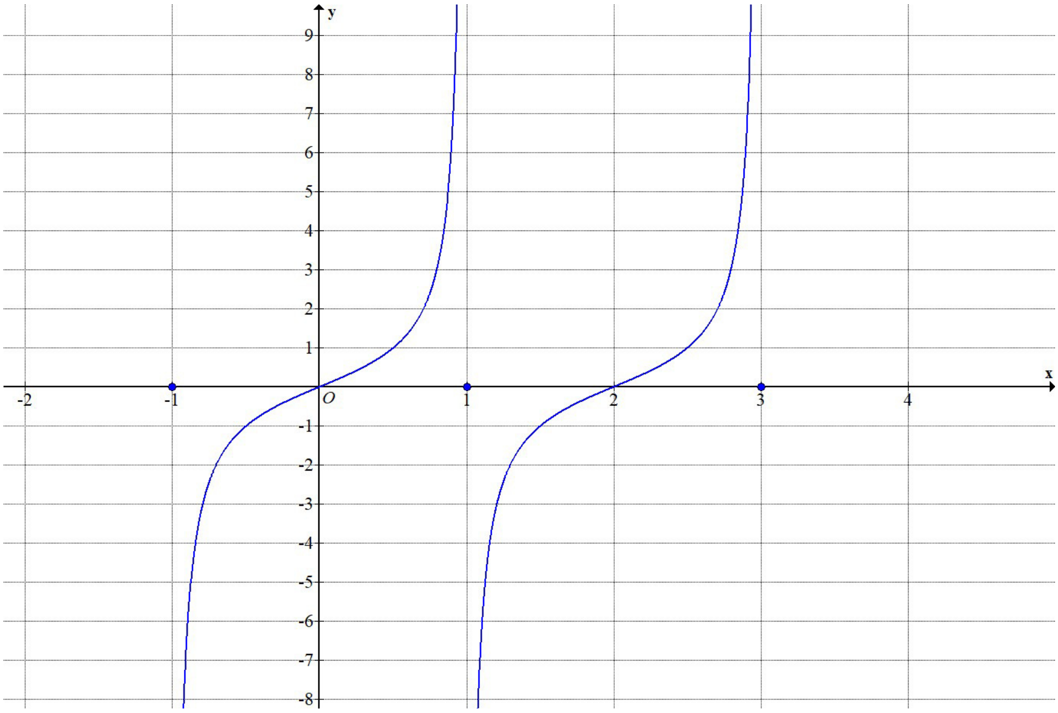
b)



Slika 2.

Rješenje: $D(f)=[-2,+\infty\rangle\setminus\{0\}$, $\text{Im}(f)=\langle-\infty,1\rangle$, $N(f)=\{-2,1\}$, $B(f)=\{1\}$.

c)



Slika 3.

Rješenje: $D(f)=[-1,3]$, $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}$, $N(f)=\{-1,0,1,2,3\}$, $B(f)=\{-1,1,3\}$.

2. Funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana je pravilom:

$$g(t)=\begin{cases}1-e^{-t}, \text{ za } t<0,\\ \sin t, \text{ za } t\in[0,2\cdot\pi],\\ 1-\cos t, \text{ inače.}\end{cases}$$

Je li funkcija g neprekidna na $\mathbb{R}$? Precizno obrazložite svoj odgovor.

Rješenje: Da. Na intervalima $\langle-\infty,0\rangle$, $\langle 0,2\cdot\pi\rangle$ i $\langle 2\cdot\pi,+\infty\rangle$ funkcija je neprekidna jer su funkcije $g_1(t)=1-e^{-t}$, $g_2(t)=\sin t$ i $g_3(t)=1-\cos t$ neprekidne na $\mathbb{R}$ (kao elementarne funkcije, odnosno razlika elementarnih funkcija), pa posebno i na navedenim intervalima. „Kritične“ točke (tj. točke u kojima treba zasebno provjeriti neprekidnost) su $t_1=0$ i $t=2\cdot\pi$.

Za $t=0$ imamo:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0-} g(t)=\lim_{t\to 0-}\left(1-e^{-t}\right)=1-e^{-0}=1-1=0,\\ &\lim_{t\to 0+} g(t)=\lim_{t\to 0+}(\sin t)=\sin 0=0,\\ &g(0)=\sin 0=0,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je g neprekidna u nuli.

Za $t=2\cdot\pi$ imamo:

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to(2\cdot\pi)-} g(t)=\lim_{t\to(2\cdot\pi)-}(\sin t)=\sin(2\cdot\pi)=0,\\ &\lim_{t\to(2\cdot\pi)+} g(t)=\lim_{t\to(2\cdot\pi)+}(1-\cos t)=1-\cos(2\cdot\pi)=1-1=0,\\ &g(2\cdot\pi)=\sin(2\cdot\pi)=0,\end{aligned}$$

pa zaključujemo da je g neprekidna u $t=2\cdot\pi$.

Dakle, g je neprekidna i u svakoj od „kritičnih“ točaka, pa zaključujemo da je g neprekidna na $\mathbb{R}$.

3. Odredite $a,\, b \in \mathbb{R}$ tako da funkcija f bude neprekidna na $\mathbb{R}$ ako je:

$$\textbf{a)}\ f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{za } x \geq 1; \\ a\cdot x+b, & \text{za } 0<x<1; \\ x+1, & \text{za } x\leq 0; \end{cases}$$

Rješenje: f je definirana pomoću triju polinoma 1. stupnja koji su neprekidni svugdje gdje su definirani. „Problematične“ su samo one točke u kojima se mijenja pravilo funkcije, a to su $x=0$ i $x=1$. Zbog toga treba odrediti $a,b\in\mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna i u tim dvjema točkama. Imamo redom:

$$\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)\Rightarrow \lim_{x\to 1-}(a\cdot x+b)=1-1\Rightarrow a\cdot 1+b=0\Rightarrow a+b=0;$$
$$\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)\Rightarrow \lim_{x\to 0+}(a\cdot x+b)=0+1\Rightarrow a\cdot 0+b=1\Rightarrow b=1\Rightarrow a=-1.$$

$$\textbf{b)}\ f(t)=\begin{cases} \ln(t+1), & \text{za } t\geq 0; \\ a\cdot t+b, & \text{za } -1<t<0; \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\cdot t\right), & \text{za } t\leq -1. \end{cases}$$

Rješenje: f je definirana pomoću kompozicije logaritamske funkcije i polinoma 1. stupnja, polinoma 1. stupnja i kompozicije trigonometrijske funkcije i polinoma 1. stupnja. Sve te funkcije su neprekidne svugdje gdje su definirane. „Problematične“ su točke u kojima se mijenja pravilo funkcije, a to su $t=-1$ i $t=0$. Zbog toga treba odrediti $a,b\in\mathbb{R}$ tako da funkcija bude neprekidna i u tim dvjema točkama. Imamo redom:

$$\lim_{t\to 0-} f(t)=f(0)\Rightarrow \lim_{t\to 0-}(a\cdot t+b)=\ln(0+1)\Rightarrow a\cdot 0+b=0\Rightarrow b=0.$$
$$\lim_{t\to(-1)+} f(t)=f(-1)\Rightarrow \lim_{t\to(-1)+}(a\cdot t+b)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot(-1)\right)\Rightarrow a\cdot(-1)+b=-1\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -a+0=-1\Rightarrow a=1.$$

4. Ako je $g:\mathbb{R}\to\left\langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$, $g(y)=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^3+1}{2}\right)$, izračunajte $\lim\limits_{y\to\frac{\pi}{4}} g^{-1}(y)$.

Rješenje: Odredimo najprije pravilo inverza zadane funkcije. Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&x=\operatorname{arctg}\left(\frac{y^3+1}{2}\right) \quad /\operatorname{tg}\\
&\operatorname{tg} x=\frac{y^3+1}{2} \quad /\cdot 2\\
&2\cdot\operatorname{tg} x=y^3+1,\\
&y=\sqrt[3]{2\cdot\operatorname{tg} x-1}\Rightarrow g^{-1}(y)=\sqrt[3]{2\cdot\operatorname{tg} y-1}.
\end{aligned}
$$

Zbog toga je:

$$L=\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}\sqrt[3]{2\cdot\operatorname{tg} y-1}=\sqrt[3]{2\cdot\lim_{y\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} y)-1}=\sqrt[3]{2\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)-1}=\sqrt[3]{2\cdot 1-1}=1.$$

5. Može li se funkcija $f(x)=\operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)$ dodefinirati u točki $c=2$ tako da dobivena funkcija bude neprekidna na $\mathbb{R}$? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje: Računamo limes slijeva i limes zdesna u točki $c=2$. Imamo:

$$L_1=\lim_{x\to 2-}\left(\operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)\right)=\lim_{x\to 2-}\left(\frac{e^{\frac{2}{x-2}}-e^{-\frac{2}{x-2}}}{e^{\frac{2}{x-2}}+e^{-\frac{2}{x-2}}}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t:=x-2\\ \text{kad } x\to 2-, \text{ onda } t\to 0-\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0-}\left(\frac{e^{\frac{2}{t}}-e^{-\frac{2}{t}}}{e^{\frac{2}{t}}+e^{-\frac{2}{t}}}\right)=\lim_{t\to 0-}\left(\frac{e^{\frac{4}{t}}-1}{e^{\frac{4}{t}}+1}\right)=\frac{0-1}{0+1}=-1,$$

$$L_2=\lim_{x\to 2+}\left(\operatorname{th}\left(\frac{2}{x-2}\right)\right)=\lim_{x\to 2+}\left(\frac{e^{\frac{2}{x-2}}-e^{-\frac{2}{x-2}}}{e^{\frac{2}{x-2}}+e^{-\frac{2}{x-2}}}\right)=\left\{\begin{matrix}\text{zamjena:}\\ t:=x-2\\ \text{kad } x\to 2-, \text{ onda } t\to 0-\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{e^{\frac{2}{t}}-e^{-\frac{2}{t}}}{e^{\frac{2}{t}}+e^{-\frac{2}{t}}}\right)=\lim_{t\to 0+}\left(\frac{1-e^{-\frac{4}{t}}}{1+e^{-\frac{4}{t}}}\right)=\frac{1-0}{1+0}=1.$$

Vidimo da su izračunani limesi različiti, pa traženo dodefiniranje nije moguće.

6. Dokažite da funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $g(t)=t+\cos t$ ima nultočku u segmentu $[-1,0]$.

Rješenje: Odredimo

$$g(-1)\cdot g(0)=(-1+\cos(-1))\cdot(0+\cos 0)=(\cos 1-1)\cdot(0+1)=\cos 1-1<0,$$

pa slijedi tvrdnja.

7. Dokažite ili opovrgnite protuprimjerom:

a) Ako funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)<0$, onda f ima nultočku u tom segmentu.

b) Ako neprekidna funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)<0$, onda f ima jedinstvenu nultočku u tom segmentu.

c) Ako neprekidna funkcija f definirana na segmentu $[a,b]$ ima svojstvo $f(a)\cdot f(b)>0$, onda f nema nijednu nultočku u tom segmentu.

Rješenje: Nijedna od triju navedenih tvrdnji nije točna.

a) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{za } x\le 0,\\ 1, & \text{inače,}\end{cases}$ i bilo koji segment $[a,b]$ takav da je $a\le 0<b$. Očito je $f(a)\cdot f(b)=(-1)\cdot 1=-1<0,$ a f nema nijednu realnu nultočku.

b) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x)=\cos x$ i npr. segment $[0,3\cdot\pi]$. Očito je $f(0)\cdot f(3\cdot\pi)=\cos 0\cdot\cos(3\cdot\pi)=1\cdot(-1)=-1<0,$ a f ima točno tri realne nultočke u navedenom segmentu (to su $x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\frac{3}{2}\cdot\pi$ i $x_3=\frac{5}{2}\cdot\pi$).

c) Protuprimjer tvore funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $f(x)=x^2-1$ i bilo koji segment $[a,b]$ takav da je $a<-1<1<b$. Očito su $f(a)>0$ i $f(b)>0$, otkuda slijedi $f(a)\cdot f(b)>0$. Međutim, f ima točno dvije realne nultočke u segmentu $[a,b]$.