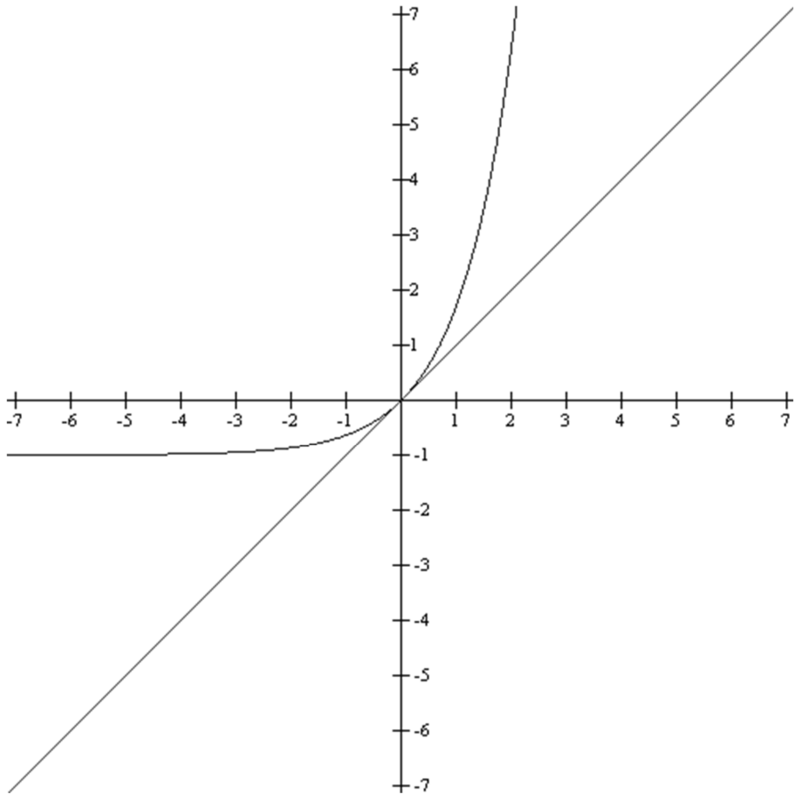
4.7.

DERIVACIJA FUNKCIJE

4.7.1. DERIVACIJA FUNKCIJE U TOČKI.

- Neka je f realna funkcija, a c bilo koja točka iz prirodne domene funkcije f.
- Vrijednost $\lim\limits_{x \to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right)$ (ako postoji) nazivamo derivacija funkcije f u točki c i označavamo s $f'(c)$.
- $f'(c)$ se *geometrijski* interpretira kao *koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki s apscisom $x = c$.*

4.7.1. DERIVACIJA FUNKCIJE U TOČKI.



$$f(x) = e^x - 1, \quad c = 0$$

- $f'(0)$ je koeficijent smjera tangente na graf funkcije f u točki $c = 0$.

4.7.2. NAPOMENE

- Derivacija funkcije u točki može se interpretirati i na još neke načine. To su npr.
- 1 *ekonomski*: npr. stopa promjene potražnje ili ponude prigodom povećanja ili smanjenja cijene;
- 2. *kinematički*: trenutna brzina tijela koje se giba po pravcu u trenutku $t = c$ (ova interpretacija ima smisla samo za $c > 0$).
- Također, derivacija funkcije u točki može se *definirati* i pomoću izraza:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

4.7.3. DERIVACIJA FUNKCIJE.

- Preslikavanje

  $c \mapsto f'(c)$

- koje svakoj točki c (iz prirodne domene funkcije f) u kojoj postoji $f'(c)$ pridružuje vrijednost $f'(c)$ nazivamo **derivacija funkcije** i označavamo s f'.
- Važno: Ako su A prirodna domena funkcije f' i B prirodna domena funkcije f, onda vrijedi inkluzija: $A \subseteq B$.

4.7.4. DERIVACIJE ELEMENTARNIH FUNKCIJA.

- Tablicu derivacija nekih elementarnih funkcija vidjeti u *Repetitoriju matematike za studente elektrotehnike*.
- Te derivacije mogu se izvesti ili izravno iz definicije ili koristeći osnovna pravila za deriviranje.

4.7.5. OSNOVNA PRAVILA ZA DERIVIRANJE.

Za bilo koje derivabilne funkcije $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi:

1. $(\alpha)' = 0, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

2. $(\alpha \cdot f)' = \alpha \cdot f', \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

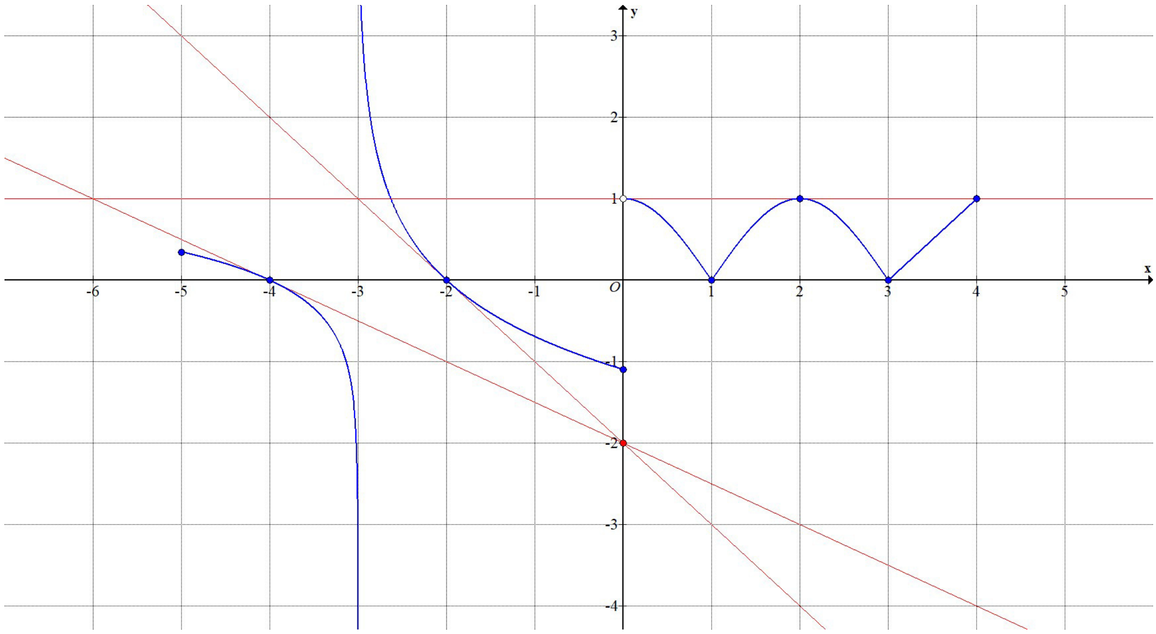
3. $(f \pm g)' = f' \pm g'.$

4. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$ (**OPREZ**: $(f \cdot g)' \neq f' \cdot g'$.)

5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$ (**OPREZ**: $\left(\frac{f}{g}\right)' \neq \frac{f'}{g'}$.)

6. $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'.$

1. Na slici 1. plavom bojom je prikazan graf funkcije *f*.



Slika 1.

Odredite:

a) domenu funkcije *f*;

Rješenje: Sa slike vidimo da je funkcija definirana za svaki realan broj u segmentu $[-5,4]$ različit od –3. Dakle, $D(f)=[-5,4]\setminus\{-3\}$.

b) skup svih nultočaka funkcije *f*;

Rješenje: Tražimo prve koordinate sjecišta zadanoga grafa sa osi apscisa. Te koordinate su očito –4, –2, 1 i 3. Dakle, $N(f)=\{-4,-2,1,3\}$.

c) skup svih točaka prekida funkcije *f*;

Rješenje: *f* ima prekid samo u točki $x=0$. Dakle, $B(f)=\{0\}$.

d) skup svih točaka u kojima je *f* neprekidna, ali ne i derivabilna;

Rješenje: Tražene točke su „špicevi“ („oštri vrhovi“) grafa funkcije *f* u kojima krivulja nije glatka, te rubovi domene u kojima *f* nema derivaciju. Apscise tih točaka su redom -5, 1, 3 i 4. Dakle, $S=\{-5,1,3,4\}$.

e) $f^{'}(-2)+f^{'}(2)$;

Rješenje: *Svaki* pribrojnik jednak je koeficijentu smjera tangente povučene na graf funkcije *f* u pripadnoj točki grafa. Zbog toga odredimo te koeficijente.

Iz slike vidimo da tangenta povučena na graf funkcije *f* u točki (–2, 0) prolazi i točkom (0, –2). Zbog toga je njezin koeficijent smjera jednak:

$$k_1=\frac{-2-0}{0-(-2)}=\frac{-2}{2}=-1.$$

To znači da je $f^{'}(-2)=-1$.

Analogno vidimo da je tangenta povučena na graf funkcije *f* u točki (2, 1) usporedna s osi apscisa. *Svaki* pravac usporedan s osi apscisa ima koeficijent smjera jednak 0. Dakle,

$$k_2=f^{'}(2)=0.$$

Tako zaključujemo da je traženi zbroj jednak:

$$f^{'}(-2)+f^{'}(2)=-1+0=-1.$$

f) površinu trokuta kojega zatvaraju tangente povučene na graf funkcije *f* u točkama s apscisama –4, –2 i 2.

Rješenje: Iz slike vidimo da se povučene tangente sijeku u točkama (–6, 1), (–3, 1) i (0, –2). Te točke su ujedno i vrhovi trokuta čiju površinu tražimo.

Dužina čiji su krajevi u točkama (–6, 1) i (–3, 1) je jedna osnovica toga trokuta. Pravac na kojemu leži visina povučena iz vrha (0, –2) na tu osnovicu je os ordinata. Tako zaključujemo da su duljina osnovice $a=-3-(-6)=-3+6=3$ jed. duljine i duljina visine povučene na tu osnovicu $v_a=2+1=3$ jed. duljine, pa je tražena površina jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3=\frac{9}{2}\text{ kv. jed.}$$

2. **Isključivo koristeći definiciju derivacije funkcije** odredite derivacije funkcija:

a) $f(x) = x$;

Rješenje: Prirodna domena svih triju funkcija je skup $\mathbb{R}$. Zbog toga ćemo odrediti derivaciju svake od njih u *bilo kojoj* točki $c \in \mathbb{R}$ shvaćajući c kao konstantu. Dobivena vrijednost bit će funkcija varijable c. Promjenom naziva varijable dobit ćemo traženo pravilo derivacije.

$$\begin{aligned} f'(c) &= \lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\right) = \\ &= \lim_{x\to c}\left(\frac{x-c}{x-c}\right) = \\ &= \lim_{x\to c}(1) = \\ &= 1 \Rightarrow \\ f'(x) &= 1. \end{aligned}$$

b) $g(t) = \sin t$;

Rješenje: Primijenit ćemo identitet:

$$\sin x - \sin y = 2\cdot\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x+y}{2}\right),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} g'(c) &= \lim_{t\to c}\left(\frac{g(t)-g(c)}{t-c}\right) = \\ &= \lim_{t\to c}\left(\frac{\sin t - \sin c}{t-c}\right) = \\ &= \lim_{t\to c}\left(\frac{2\cdot\sin\left(\frac{t-c}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{t+c}{2}\right)}{t-c}\right) = \\ &= \left(\lim_{t\to c}\left(\frac{\sin\left(\frac{t-c}{2}\right)}{\frac{t-c}{2}}\right)\right)\cdot\left(\lim_{t\to c}\left(\cos\left(\frac{t+c}{2}\right)\right)\right) = \\ &= \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } x = \frac{t-c}{2} \\ \text{kad } t\to c, \text{ onda } x \to 0\end{matrix}\right\} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)\cdot\left(\cos\left(\frac{c+c}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{1}\cdot\cos c = \\
&= \cos c \Rightarrow \\
g^{'}(t) &= \cos t.
\end{aligned}
$$

c) $h(w) = \mathrm{e}^{w}$.

Rješenje: Imamo redom:

$$
\begin{aligned}
h^{'}(c) &= \lim_{w\to c}\left(\frac{h(w)-h(c)}{w-c}\right) = \\
&= \lim_{w\to c}\left(\frac{\mathrm{e}^{w}-\mathrm{e}^{c}}{w-c}\right) = \\
&= \lim_{w\to c}\left(\frac{\mathrm{e}^{c}\cdot(\mathrm{e}^{w-c}-1)}{v-c}\right) = \\
&= \left(\lim_{w\to c}\left(\mathrm{e}^{c}\right)\right)\cdot\left(\lim_{w\to c}\left(\frac{\mathrm{e}^{w-c}-1}{w-c}\right)\right) = \\
&= \left\{\begin{matrix}\text{zamjena: } x = w-c \\ \text{kad } w\to c,\ \text{onda } x\to 0\end{matrix}\right\} = \\
&= \mathrm{e}^{c}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\mathrm{e}^{x}-1}{x}\right)\right) = \\
&= \mathrm{e}^{c}\cdot 1 = \\
&= \mathrm{e}^{c} \Rightarrow \\
h^{'}(w) &= \mathrm{e}^{w}.
\end{aligned}
$$

3. Odredite f' i $f'(1)$ ako su:

a) $f(x) = x^{2023} + 2024 \cdot x + 2025;$

Rješenje: U svim podzadacima primjenjujemo osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2023 \cdot x^{2023-1} + 2024 \cdot 1 + 0 = \\ &= 2023 \cdot x^{2022} + 2024 \Rightarrow \\ f'(1) &= 2023 \cdot 1^{2022} + 2024 = \\ &= 2023 + 2024 = \\ &= 4047. \end{aligned}$$

b) $f(t) = \ln t - \dfrac{1}{t};$

Rješenje: $$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{1}{t} - \left(t^{-1}\right)' = \\ &= \frac{1}{t} - (-1) \cdot t^{-2} = \\ &= \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \Rightarrow \\ f'(1) &= \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \\ &= 1 + 1 = \\ &= 2. \end{aligned}$$

c) $f(u) = \mathrm{e}^u - \mathrm{e} \cdot u;$

Rješenje: $$\begin{aligned} f'(u) &= \mathrm{e}^u - \mathrm{e} \cdot 1 = \\ &= \mathrm{e}^u - \mathrm{e} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(1) &= \mathrm{e}^1 - \mathrm{e} = \\ &= \mathrm{e} - \mathrm{e} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

d) $f(v) = (\cos 1 - \sin 1) \cdot (\sin v - \cos v);$

Rješenje: $$\begin{aligned} f'(v) &= (\cos 1 - \sin 1) \cdot (\cos v + \sin v) \Rightarrow \\ f'(1) &= \cos^2 1 - \sin^2 1 = \\ &= \cos(2 \cdot 1) = \\ &= \cos 2. \end{aligned}$$

e) $f(x) = 2 \cdot \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \mathrm{e}^x$;

Rješenje:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \left(\left(x^2 - x + 1\right)' \cdot \mathrm{e}^x + \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(\mathrm{e}^x\right)' \right) = \\ &= 2 \cdot (2 \cdot x - 1) \cdot \mathrm{e}^x + \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \mathrm{e}^x = \\ &= 2 \cdot \left(x^2 + x\right) \cdot \mathrm{e}^x, \\ f'(1) &= 2 \cdot \left(1^2 + 1\right) \cdot \mathrm{e}^1 = \\ &= 4 \cdot \mathrm{e}. \end{aligned}$$

f) $f(x) = 2 \cdot \left(1 - \dfrac{2}{x+1}\right)$;

Rješenje: $$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \cdot \left(0 - \frac{0 \cdot (x+1) - 2 \cdot (1+0)}{(x+1)^2}\right) = \\ &= 2 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \\ &= \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow \\ f'(1) &= \frac{4}{(1+1)^2} = \\ &= \frac{4}{4} = \\ &= 1. \end{aligned}$$

g) $f(t) = \dfrac{\ln t}{t}$;

Rješenje: $$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln t \cdot 1}{t^2} = \\ &= \frac{1 - \ln t}{t^2} \Rightarrow \\ f'(1) &= \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \\ &= \frac{1-0}{1} = \\ &= 1. \end{aligned}$$

h) $f(u)=3\cdot\frac{u-1}{u^2-4}$.

Rješenje: $f'(u)=3\cdot\frac{(1-0)\cdot\left(u^2-4\right)-(u-1)\cdot(2\cdot u^{2-1}-0)}{\left(u^2-4\right)^2}=$

$$=3\cdot\frac{u^2-4-(u-1)\cdot 2\cdot u}{\left(u^2-4\right)^2}=$$

$$=3\cdot\frac{u^2-4+2\cdot u-2\cdot u^2}{\left(u^2-4\right)^2}$$

$$=3\cdot\frac{-u^2+2\cdot u-4}{\left(u^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{(-3)\cdot\left(u^2-2\cdot u+4\right)}{\left(u^2-4\right)^2}\Rightarrow$$

$$f'(1)=\frac{(-3)\cdot\left(1^2-2\cdot 1+4\right)}{\left(1^2-4\right)^2}=$$

$$=\frac{(-3)\cdot 3}{(-3)^2}=$$

$$=\frac{-9}{9}=$$

$$=-1.$$

4. Odredite sve nultočke funkcije f' (tzv. *stacionarne točke funkcije* f) ako su:

a) $f(x) = x^4 - 50 \cdot x^2 + 2023;$

Rješenje: Prirodna domena svih funkcija, osim funkcije iz **d)** podzadatka, je skup $\mathbb{R}$. Prirodna domena funkcije iz **d)** podzadatka je skup $\langle 0, +\infty\rangle$. U svakom podzadatku najprije ćemo odrediti pravilo funkcije f' i potom naći sva realna rješenja jednadžbe $f' = 0$. U svim podzadacima osim **d)** ta realna rješenja bit će ujedno i rješenja zadatka. U podzadatku **d)** morat ćemo odabrati samo strogo pozitivna rješenja pripadne jednadžbe.

Pri određivanju derivacije primjenjujemo osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4 \cdot x^3 - 50 \cdot 2 \cdot x + 0 = \\
&= 4 \cdot x^3 - 100 \cdot x; \\
4 \cdot x^3 - 100 \cdot x &= 0, \quad / : 4 \\
x \cdot \left(x^2 - 25\right) &= 0, \\
x \cdot (x+5) \cdot (x-5) &= 0, \\
x_1 = 0,\ x_2 = -5,\ x_3 &= 5, \\
N\left(f'\right) &= \{-5, 0, 5\}.
\end{aligned}$$

b) $f(y) = 2 \cdot (y-1) \cdot \mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{2024};$

Rješenje: $f'(y) = 2 \cdot \left((1-0) \cdot \mathrm{e}^y + (y-1) \cdot \mathrm{e}^y\right) =$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \left(\mathrm{e}^y + y \cdot \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y\right) = \\
&= 2 \cdot y \cdot \mathrm{e}^y; \\
2 \cdot y \cdot \mathrm{e}^y &= 0, \quad / : 2 \cdot \mathrm{e}^y > 0 \\
y &= 0, \\
N\left(f'\right) &= \{0\}.
\end{aligned}$$

c) $f(z)=\frac{4\cdot z}{\mathrm{e}^z}+\ln(2025);$

Rješenje: $f'(z)=\frac{4\cdot\mathrm{e}^z-4\cdot z\cdot\mathrm{e}^z}{\left(\mathrm{e}^z\right)^2}=$

$$=\frac{4\cdot\mathrm{e}^z\cdot(1-z)}{\left(\mathrm{e}^z\right)^2}=$$

$$=4\cdot\frac{1-z}{\mathrm{e}^z};$$

$$4\cdot\frac{1-z}{\mathrm{e}^z}=0,\qquad /:\frac{4}{\mathrm{e}^z}>0$$

$$1-z=0,$$

$$z=1,$$

$$N\left(f'\right)=\{1\}.$$

d) $f(w)=5\cdot(2\cdot\ln w-1)\cdot w^2+2024^{2023};$

Rješenje: $f'(w)=5\cdot\left(\left(2\cdot\frac{1}{w}-0\right)\cdot w^2+(2\cdot\ln w-1)\cdot 2\cdot w\right)=$

$$=5\cdot(2\cdot w+4\cdot w\cdot\ln w-2\cdot w)=$$

$$=20\cdot w\cdot\ln w;$$

$$20\cdot w\cdot\ln w=0,\qquad /:20\cdot w>0$$

$$\ln w=0,$$

$$w=\mathrm{e}^0=1,$$

$$N\left(f'\right)=\{1\}.$$

e) $f(t)=10\cdot(\sin t-t\cdot\cos t)-11\cdot\pi;$

Rješenje: $f'(t)=10\cdot(\cos t-(1\cdot\cos t+t\cdot(-\sin t)))=$

$$=10\cdot(\cos t-\cos t+t\cdot\sin t)=$$

$$=10\cdot t\cdot\sin t;$$

$$t\cdot\sin t=0,$$

$$(t=0)\vee(\sin t=0),$$

$$(t=0)\vee(t=k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}),$$

$$N\left(f'\right)=\{k\cdot\pi:k\in\mathbb{Z}\}.$$

f) $f(q) = 20 \cdot (q \cdot \sin q + \cos q) + 21 \cdot \pi.$

Rješenje: $f^{'}(q) = 20 \cdot \left(1 \cdot \sin q + q \cdot \cos q - \sin q\right) + 0 =$

$$= 20 \cdot q \cdot \cos q,$$

$$20 \cdot q \cdot \cos q = 0, \quad / : 20$$

$$q \cdot \cos q = 0,$$

$$(q = 0) \vee (\cos q = 0),$$

$$(q = 0) \vee \left(q = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right),$$

$$N\left(f^{'}\right) = \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}.$$