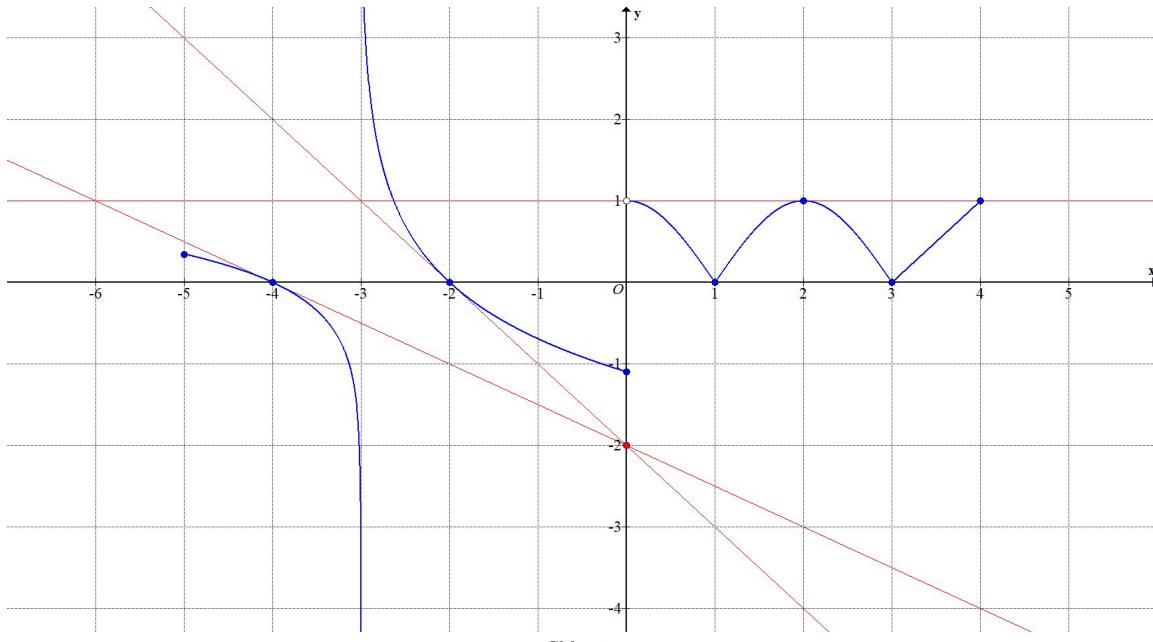


1. Na slici 1. plavom bojom je prikazan graf funkcije f .



Slika 1.

Odredite:

- a) domenu funkcije f ,

Rješenje: Sa slike vidimo da je funkcija definirana za svaki realan broj u segmentu $[-5, 4]$ različit od -3 . Dakle, $D(f) = [-5, 4] \setminus \{-3\}$.

- b) skup svih nultočaka funkcije f ,

Rješenje: Tražimo prve koordinate sjecišta zadanoga grafa sa osi apscisa. Te koordinate su očito $-4, -2, 1$ i 3 . Dakle, $N(f) = \{-4, -2, 1, 3\}$.

- c) skup svih točaka prekida funkcije f ,

Rješenje: f ima prekid samo u točki $x = 0$. Dakle, $B(f) = \{0\}$.

- d) skup svih točaka u kojima je f neprekidna, ali ne i derivabilna;

Rješenje: Tražene točke su „špicevi“ („oštiri vrhovi“) grafa funkcije f u kojima krivulja nije glatka, te rubovi domene u kojima f nema derivaciju. Apscise tih točaka su redom $-5, 1, 3$ i 4 . Dakle, $S = \{-5, 1, 3, 4\}$.

e) $f'(-2) + f'(2);$

Rješenje: Svaki pribrojnik jednak je koeficijentu smjera tangente povučene na graf funkcije f u pripadnoj točki grafa. Zbog toga odredimo te koeficijente.

Iz slike vidimo da tangenta povučena na graf funkcije f u točki $(-2, 0)$ prolazi i točkom $(0, -2)$. Zbog toga je njezin koeficijent smjera jednak:

$$k_1 = \frac{-2-0}{0-(-2)} = \frac{-2}{2} = -1.$$

To znači da je $f'(-2) = -1$.

Analogno vidimo da je tangenta povučena na graf funkcije f u točki $(2, 1)$ usporedna s osi apscisa. Svaki pravac usporedan s osi apscisa ima koeficijent smjera jednak 0. Dakle,

$$k_2 = f'(2) = 0.$$

Tako zaključujemo da je traženi zbroj jednak:

$$f'(-2) + f'(2) = -1 + 0 = -1.$$

f) površinu trokuta kojega zatvaraju tangente povučene na graf funkcije f u točkama s apscisama $-4, -2$ i 2 .

Rješenje: Iz slike vidimo da se povučene tangente sijeku u točkama $(-6, 1)$, $(-3, 1)$ i $(0, -2)$. Te točke su ujedno i vrhovi trokuta čiju površinu tražimo.

Dužina čiji su krajevi u točkama $(-6, 1)$ i $(-3, 1)$ je jedna osnovica toga trokuta. Pravac na kojem leži visina povučena iz vrha $(0, -2)$ na tu osnovicu je os ordinata. Tako zaključujemo da su duljina osnovice $a = -3 - (-6) = -3 + 6 = 3$ jed. duljine i duljina visine povučene na tu osnovicu $v_a = 2 + 1 = 3$ jed. duljine, pa je tražena površina jednak:

$$P = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2} \text{ kv. jed.}$$

2. Isključivo koristeći definiciju derivacije funkcije odredite derivacije funkcija:

a) $f(x) = x;$

Rješenje: Prirodna domena svih triju funkcija je skup \mathbb{R} . Zbog toga ćemo odrediti derivaciju svake od njih u bilo kojoj točki $c \in \mathbb{R}$ shvaćajući c kao konstantu. Dobivena vrijednost bit će funkcija varijable c . Promjenom naziva varijable dobit ćemo traženo pravilo derivacije.

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right) = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{x - c}{x - c} \right) = \lim_{x \rightarrow c} (1) = 1 \Rightarrow f'(x) = 1.$$

b) $g(t) = \sin t;$

Rješenje: Primijenit ćemo identitet:

$$\sin x - \sin y = 2 \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Tako redom imamo:

$$\begin{aligned} g'(c) &= \lim_{t \rightarrow c} \left(\frac{g(t) - g(c)}{t - c} \right) = \lim_{t \rightarrow c} \left(\frac{\sin t - \sin c}{t - c} \right) = \lim_{t \rightarrow c} \left(\frac{2 \cdot \sin\left(\frac{t-c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{t+c}{2}\right)}{t - c} \right) = \\ &= \left(\lim_{t \rightarrow c} \left(\frac{\sin\left(\frac{t-c}{2}\right)}{\frac{t-c}{2}} \right) \right) \cdot \left(\lim_{t \rightarrow c} \left(\cos\left(\frac{t+c}{2}\right) \right) \right) = \begin{cases} \text{zamjena: } x = \frac{t-c}{2} \\ \text{kad } t \rightarrow c, \text{ onda } x \rightarrow 0 \end{cases} = \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) \right) \cdot \left(\cos\left(\frac{c+c}{2}\right) \right) = \frac{1}{1} \cdot \cos c = \cos c \Rightarrow g'(t) = \cos t. \end{aligned}$$

c) $h(w) = e^w.$

Rješenje: Imamo redom:

$$\begin{aligned} h'(c) &= \lim_{w \rightarrow c} \left(\frac{h(w) - h(c)}{w - c} \right) = \lim_{w \rightarrow c} \left(\frac{e^w - e^c}{w - c} \right) = \lim_{w \rightarrow c} \left(\frac{e^c \cdot (e^{w-c} - 1)}{w - c} \right) = \\ &= \left(\lim_{w \rightarrow c} (e^c) \right) \cdot \left(\lim_{w \rightarrow c} \left(\frac{e^{w-c} - 1}{w - c} \right) \right) = \begin{cases} \text{zamjena: } x = w - c \\ \text{kad } w \rightarrow c, \text{ onda } x \rightarrow 0 \end{cases} = \\ &= e^c \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) \right) = e^c \cdot 1 = e^c \Rightarrow h'(w) = e^w. \end{aligned}$$

3. Odredite f' i $f'(1)$ ako su:

a) $f(x) = x^{2021} + 2022 \cdot x + 2020;$

Rješenje: U svim podzadacima primjenjujemo osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija.

$$f'(x) = 2021 \cdot x^{2021-1} + 2022 \cdot 1 + 0 = 2021 \cdot x^{2020} + 2022 \Rightarrow \\ f'(1) = 2021 \cdot 1^{2020} + 2022 = 2021 + 2022 = 4043.$$

b) $f(t) = \ln t - \frac{1}{t};$

Rješenje: $f'(t) = \frac{1}{t} - (t^{-1})' = \frac{1}{t} - (-1) \cdot t^{-2} = \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} \Rightarrow \\ f'(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2.$

c) $f(u) = e^u - e \cdot u;$

Rješenje: $f'(u) = e^u - e \cdot 1 = e^u - e \Rightarrow f'(1) = 0.$

d) $f(v) = (\cos 1 - \sin 1) \cdot (\sin v - \cos v);$

Rješenje: $f'(v) = (\cos 1 - \sin 1) \cdot (\cos v + \sin v) \Rightarrow \\ f'(1) = \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos(2 \cdot 1) = \cos 2.$

e) $f(x) = 2 \cdot \left(1 - \frac{2}{x+1}\right);$

Rješenje: $f'(x) = 2 \cdot \left(0 - \frac{0 \cdot (x+1) - 2 \cdot (1+0)}{(x+1)^2}\right) = 2 \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{4}{(x+1)^2} \Rightarrow \\ f'(1) = \frac{4}{(1+1)^2} = \frac{4}{4} = 1.$

f) $f(t) = \frac{\ln t}{t};$

Rješenje: $f'(t) = \frac{\frac{1}{t} \cdot t - \ln t \cdot 1}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2} \Rightarrow$

$$f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = \frac{1 - 0}{1} = 1.$$

g) $f(u) = 3 \cdot \frac{u-1}{u^2-4}$.

Rješenje: $f'(u) = 3 \cdot \frac{(1-0) \cdot (u^2-4) - (u-1) \cdot (2 \cdot u^{2-1} - 0)}{(u^2-4)^2} =$

$$= 3 \cdot \frac{u^2-4-(u-1) \cdot 2 \cdot u}{(u^2-4)^2} = 3 \cdot \frac{u^2-4+2 \cdot u-2 \cdot u^2}{(u^2-4)^2}$$

$$= 3 \cdot \frac{-u^2+2 \cdot u-4}{(u^2-4)^2} = \frac{(-3) \cdot (u^2-2 \cdot u+4)}{(u^2-4)^2} \Rightarrow$$

$$f'(1) = \frac{(-3) \cdot (1^2-2 \cdot 1+4)}{(1^2-4)^2} = \frac{(-3) \cdot 3}{(-3)^2} = \frac{-9}{9} = -1.$$

4. Izračunajte $f'(0)$ ako je:

a) $f(x) = e^x \cdot \sin x$;

Rješenje: U svim podzadacima primjenjujemo pravila za deriviranje umnoška, odnosno količnika dviju funkcija, te tablicu derivacija elementarnih funkcija.

$$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = (\sin x + \cos x) \cdot e^x \Rightarrow$$

$$f'(0) = (\sin 0 + \cos 0) \cdot e^0 = (0+1) \cdot 1 = 1.$$

b) $f(t) = \frac{\cos t}{e^t}$;

Rješenje: $f'(t) = \frac{-\sin t \cdot e^t - \cos t \cdot e^t}{(e^t)^2} = \frac{(-\sin t - \cos t) \cdot e^t}{(e^t)^2} = -\frac{\sin t + \cos t}{e^t} \Rightarrow$

$$f'(0) = -\frac{\sin 0 + \cos 0}{e^0} = -\frac{0+1}{1} = -1;$$

c) $f(u) = \operatorname{ch} u \cdot \operatorname{tg} u$.

Rješenje: $f'(u) = \operatorname{sh} u \cdot \operatorname{tg} u + \frac{\operatorname{ch} u}{\cos^2 u} \Rightarrow$

$$f'(0) = \operatorname{sh} 0 \cdot \operatorname{tg} 0 + \frac{\operatorname{ch} 0}{\cos^2 0} = 0 \cdot 0 + \frac{1}{1^2} = 0+1=1.$$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRBIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.7. Derivacija funkcije - zadaci
---	---	---

5. Odredite sve nultočke funkcije f' (tzv. *stacionarne točke funkcije f*) ako su:

a) $f(x) = x^4 - 50 \cdot x^2 + 2021$;

Rješenje: Prirodna domena svih funkcija, osim funkcije iz d) podzadatka, je skup \mathbb{R} .

Prirodna domena funkcije iz d) podzadatka je skup $(0, +\infty)$. U svakom podzadatku najprije ćemo odrediti pravilo funkcije f' i potom naći sva realna rješenja jednadžbe $f' = 0$. U svim podzadacima osim d) ta realna rješenja bit će ujedno i rješenja zadatka. U podzadatku d) morat ćemo odabrati samo strogo pozitivna rješenja pripadne jednadžbe.

Pri određivanju derivacije primjenjujemo osnovna pravila za deriviranje i tablicu derivacija elementarnih funkcija.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4 \cdot x^3 - 50 \cdot 2 \cdot x + 0 = 4 \cdot x^3 - 100 \cdot x; \\ 4 \cdot x^3 - 100 \cdot x &= 0, \quad /:4 \\ x \cdot (x^2 - 25) &= 0, \\ x \cdot (x+5) \cdot (x-5) &= 0, \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 5, \\ N(f') &= \{-5, 0, 5\}. \end{aligned}$$

b) $f(y) = 2 \cdot (y-1) \cdot e^y + e^{2021}$;

Rješenje: $f'(y) = 2 \cdot ((1-0) \cdot e^y + (y-1) \cdot e^y) = 2 \cdot (e^y + y \cdot e^y - e^y) = 2 \cdot y \cdot e^y$;
 $2 \cdot y \cdot e^y = 0, \quad /:2 \cdot e^y > 0$
 $y = 0$,
 $N(f') = \{0\}$.

c) $f(z) = \frac{4 \cdot z}{e^z} + \ln(2021)$;

Rješenje: $f'(z) = \frac{4 \cdot e^z - 4 \cdot z \cdot e^z}{(e^z)^2} = \frac{4 \cdot e^z \cdot (1-z)}{(e^z)^2} = 4 \cdot \frac{1-z}{e^z}$;
 $4 \cdot \frac{1-z}{e^z} = 0, \quad /: \frac{4}{e^z} > 0$
 $1-z = 0$,
 $z = 1$,
 $N(f') = \{1\}$.

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.7. Derivacija funkcije - zadaci
--	---	---

d) $f(w) = 5 \cdot (2 \cdot \ln w - 1) \cdot w^2 + 2021^{2022};$

Rješenje: $f'(w) = 5 \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{1}{w} - 0 \right) \cdot w^2 + (2 \cdot \ln w - 1) \cdot 2 \cdot w \right) =$
 $= 5 \cdot (2 \cdot w + 4 \cdot w \cdot \ln w - 2 \cdot w) = 20 \cdot w \cdot \ln w;$
 $20 \cdot w \cdot \ln w = 0, \quad / : 20 \cdot w > 0$
 $\ln w = 0,$
 $w = e^0 = 1,$
 $N(f') = \{1\}.$

e) $f(t) = 10 \cdot (\sin t - t \cdot \cos t) + 11 \cdot \pi;$

Rješenje: $f'(t) = 10 \cdot (\cos t - (1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t))) = 10 \cdot (\cos t - \cos t + t \cdot \sin t) = 10 \cdot t \cdot \sin t;$
 $t \cdot \sin t = 0,$
 $(t = 0) \vee (\sin t = 0),$
 $(t = 0) \vee (t = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}),$
 $N(f') = \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}.$

f) $f(q) = 20 \cdot (q \cdot \sin q + \cos q) - 21 \cdot \pi.$

Rješenje: $f'(q) = 20 \cdot (1 \cdot \sin q + q \cdot \cos q - \sin q) + 0 = 20 \cdot q \cdot \cos q,$
 $20 \cdot q \cdot \cos q = 0, \quad / : 20$
 $q \cdot \cos q = 0,$
 $(q = 0) \vee (\cos q = 0),$
 $(q = 0) \vee \left(q = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right),$
 $N(f') = \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{0\}.$

 TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE Elektrotehnički odjel	Matematika 1 (preddiplomski stručni studij elektrotehnike)	4.7. Derivacija funkcije - zadaci
--	---	---

IZBOR ZADATAKA S KOLOKVIJA

1. Zadana je realna funkcija $f(x) = \frac{\pi \cdot \sin x}{x}$. Izračunajte $f'(\pi)$.

$$Rješenje: f'(x) = \pi \cdot \frac{x \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x}{x^2} = \pi \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2} \Rightarrow \\ f'(\pi) = \pi \cdot \frac{\pi \cdot \cos \pi - \sin \pi}{\pi^2} = \frac{-\pi^2}{\pi^2} = -1.$$

2. Zadana je realna funkcija $h(t) = t \cdot \sin t$. Izračunajte $h'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

$$Rješenje: h'(t) = 1 \cdot \sin t + t \cdot \cos t = \sin t + t \cdot \cos t \Rightarrow \\ h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

3. Zadana je realna funkcija $h(t) = t \cdot \cos t$. Izračunajte $h'(2 \cdot \pi)$.

$$Rješenje: h'(t) = 1 \cdot \cos t + t \cdot (-\sin t) = \cos t - t \cdot \sin t \Rightarrow \\ h'(2 \cdot \pi) = \cos(2 \cdot \pi) - 2 \cdot \pi \cdot \sin(2 \cdot \pi) = 1.$$

4. Zadana je realna funkcija $h(t) = t^2 \cdot \ln t$. Izračunajte $h'(1)$.

$$Rješenje: h'(t) = 2 \cdot t \cdot \ln t + t^2 \cdot \frac{1}{t} = 2 \cdot t \cdot \ln t + t \Rightarrow \\ h'(1) = 2 \cdot 1 \cdot \ln 1 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

5. Zadana je realna funkcija $g(t) = \frac{t}{e^t}$. Izračunajte $g'(1)$.

$$Rješenje: g'(t) = \frac{1 \cdot e^t - t \cdot e^t}{(e^t)^2} = \frac{e^t \cdot (1-t)}{(e^t)^2} = \frac{1-t}{e^t} \Rightarrow \\ g'(1) = \frac{1-1}{e^1} = 0.$$