4.8. OSNOVNE TEHNIKE DERIVIRANJA

DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE.

DERIVACIJA IMPLICITNO ZADANIH FUNKCIJA.

LOGARITAMSKO DERIVIRANJE.

DERIVACIJA INVERZA FUNKCIJE.

DERIVACIJA PARAMETARSKI ZADANE FUNKCIJE.

4.8.1. DERIVACIJA SLOŽENE FUNKCIJE

- Ako je funkcija koju treba derivirati *kompozicija* (najmanje) dviju funkcija, primjenjujemo pravilo za deriviranje kompozicije funkcija:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$$

- To pravilo možemo interpretirati ovako:
- *Derivirati funkciju koja djeluje posljednja* (funkciju f) *kao da je njezin argument nezavisna varijabla* (npr. x), *a potom pomnožiti dobiveni izraz s derivacijom izraza za kojega smo smatrali da je ta nezavisna varijabla.*

4.8.2. DERIVACIJA IMPLICITNO ZADANE FUNKCIJE

- Ako je realna funkcija f definirana pravilom
- $f(x, y) = 0$
- iz kojega *nije* moguće eksplicitno izraziti y pomoću x, onda takvu funkciju nazivamo *implicitno zadanom funkcijom.*
- Derivacija takve funkcije određuje se tako da se članovi izraza $f(x, y)$ koji sadrže samo x (uobičajeno) deriviraju po x, a članovi izraza $f(x, y)$ koji sadrže y deriviraju prema pravilu deriviranja složene funkcije.
- Iz dobivenoga izraza treba izraziti y'. Kao rješenje se dobije novi izraz oblika $y' = g(x, y)$.
- Zbog toga je i derivacija implicitno zadane funkcije ponovno implicitno zadana funkcija.

4.8.3. LOGARITAMSKO DERIVIRANJE

- Ako je realna funkcija zadana u obliku
  - $y = (f(x))^{g(x)}$
- onda logaritmiranjem dobivamo:
- $\ln y = g(x) \cdot \ln(f(x))$
- Deriviranjem obiju strana prema pravilu za deriviranje umnoška i pravilu za deriviranje složene funkcije dobijemo

$$y' = (f(x))^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \cdot \ln(f(x)) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)} \right)$$

- Ovaj postupak naziva se *logaritamsko deriviranje*.

4.8.4. DERIVACIJA INVERZA FUNKCIJE

- Ako je f bijekcija, onda je derivacija njezina inverza f^{-1} dana formulom

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

- Dakle, da bismo odredili derivaciju inverza funkcije, moramo znati derivaciju zadane funkcije i pravilo njezina inverza.

4.8.5. DERIVACIJA PARAMETARSKI ZADANE FUNKCIJE

- Radi izbjegavanja implicitnoga zadavanja funkcije, zavisnost zavisne varijable y o nezavisnoj varijabli x često se pogodnije opisuje pomoću novoga *parametra* (koji se obično označava s t).
- U slučaju kada je funkcija zadana parametarski s

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

- njezina derivacija jednaka je $y' = \dfrac{g'(t)}{f'(t)}$
- i ona je također parametarski zadana funkcija.

1. Odredite derivacije sljedećih realnih funkcija i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete:

a) $f_1(x)=\left(x^2+1\right)^{2023}$;

Rješenje: Primjenjujemo pravilo za deriviranje složene funkcije.

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 2023\cdot\left(x^2+1\right)^{2023-1}\cdot\left(x^2+1\right)' = \\ &= 2023\cdot\left(x^2+1\right)^{2022}\cdot(2\cdot x+0) = \\ &= 4046\cdot x\cdot\left(x^2+1\right)^{2022}; \end{aligned}$$

b) $f_2(t)=A\cdot\sin(\omega\cdot t+\varphi)$;

Rješenje: $$\begin{aligned} f_2'(t) &= A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)\cdot(\omega\cdot t+\varphi)' = \\ &= A\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi)\cdot(\omega\cdot 1+0) = \\ &= A\cdot\omega\cdot\cos(\omega\cdot t+\varphi); \end{aligned}$$

c) $f_3(u)=\sin^2(2\cdot u)$;

Rješenje: **I.** $$\begin{aligned} f_3'(u) &= 2\cdot(\sin(2\cdot u))^{2-1}\cdot(\sin(2\cdot u))' = \\ &= 2\cdot\sin(2\cdot u)\cdot\cos(2\cdot u)\cdot(2\cdot u)' = \\ &= 2\cdot\sin(2\cdot u)\cdot\cos(2\cdot u)\cdot 2 = \\ &= 4\cdot\sin(2\cdot u)\cdot\cos(2\cdot u) = \\ &= 2\cdot\sin(4\cdot u); \end{aligned}$$

II. $$f_3(u)=\frac{1}{2}\cdot(1-\cos(4\cdot u))=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\cos(4\cdot u)\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} f_3'(u) &= 0-\frac{1}{2}\cdot(-\sin(4\cdot u))\cdot(4\cdot u)' = \\ &= \frac{1}{2}\cdot\sin(4\cdot u)\cdot 4 = \\ &= 2\cdot\sin(4\cdot u). \end{aligned}$$

d) $f_4(x)=\sqrt{\sin x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}$;

Rješenje: $f_4^{'}(x)=\left((\sin x)^{\frac{1}{2}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}\right)^{'}=$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(\sin x)^{'}+\frac{2}{3}\cdot(\cos x)^{\frac{2}{3}-1}\cdot(\cos x)^{'}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(\sin x)^{\frac{-1}{2}}\cdot\cos x-\frac{2}{3}\cdot(\cos x)^{\frac{-1}{3}}\cdot\sin x=$$

$$=\frac{\cos x}{2\cdot\sqrt{\sin x}}-\frac{2\cdot\sin x}{3\cdot\sqrt[3]{\cos x}};$$

e) $f_5(t)=\mathrm{e}^{1-t^2}$.

Rješenje: $f_5^{'}(t)=\mathrm{e}^{1-t^2}\cdot\left(1-t^2\right)^{'}=$

$$=\mathrm{e}^{1-t^2}\cdot(0-2\cdot t)=$$

$$=-2\cdot t\cdot\mathrm{e}^{1-t^2}.$$

2. Odredite derivacije sljedećih implicitno zadanih funkcija i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete:

a) $b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 - a^2 \cdot b^2 = 0;$

Rješenje: Primjenjujemo pravilo za deriviranje implicitno zadane funkcije.

$$b^2 \cdot 2 \cdot x + a^2 \cdot 2 \cdot y \cdot y' = 0,$$
$$a^2 \cdot y \cdot y' = -b^2 \cdot x,$$
$$y' = -\frac{b^2 \cdot x}{a^2 \cdot y}.$$

b) $\operatorname{ctg} x = x \cdot y^2;$

Rješenje: $\frac{-1}{\sin^2 x} = 1 \cdot y^2 + x \cdot 2 \cdot y \cdot y',$

$$-2 \cdot x \cdot y \cdot y' = \frac{1}{\sin^2 x} + y^2,$$
$$y' = -\left(\frac{\frac{1}{\sin^2 x} + y^2}{2 \cdot x \cdot y}\right) = -\frac{y^2 \cdot \sin^2 x + 1}{2 \cdot x \cdot \sin^2 x \cdot y};$$

c) $\ln x + \mathrm{e}^{\frac{-y}{x}} = a,\ a \in \mathbb{R};$

Rješenje: $\frac{1}{x} + \mathrm{e}^{\frac{-y}{x}} \cdot \left(\frac{-y}{x}\right)' = 0,$

$$\frac{1}{x} + \mathrm{e}^{\frac{-y}{x}} \cdot \left(\frac{-y' \cdot x - (-y) \cdot 1}{x^2}\right) = 0,$$
$$x + \mathrm{e}^{\frac{-y}{x}} \cdot \left(-y' \cdot x + y\right) = 0,$$
$$-y' \cdot x + y = \frac{-x}{\mathrm{e}^{\frac{-y}{x}}},$$
$$y' \cdot x = y + x \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}},$$
$$y' = \frac{y}{x} + \mathrm{e}^{\frac{y}{x}}.$$

d) $\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+y^2)$.

Rješenje: $\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{'}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(x^2+y^2\right)^{'}$,

$$\frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{y^{'}\cdot x-y\cdot 1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}\cdot\left(2\cdot x+2\cdot y\cdot y^{'}\right),\quad /\left(x^2+y^2\right)$$

$$y^{'}\cdot x-y=x+y\cdot y^{'},$$

$$y^{'}\cdot x-y\cdot y^{'}=x+y,$$

$$y^{'}=\frac{x+y}{x-y}.$$

3. Pomoću logaritamskoga deriviranja odredite derivacije sljedećih realnih funkcija i pojednostavnite dobiveni izraz što više možete:

a) $f(x)=x^x$;

Rješenje: Primjenjujemo pravilo za deriviranje logaritamski zadane funkcije.

$$\ln\left(f(x)\right)=x\cdot\ln x,\quad /\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x},$$

$$f^{'}(x)=f(x)\cdot(\ln x+1)=x^x\cdot(\ln x+1);$$

b) $g(t)=(\cos t)^{\sin t}$.

Rješenje: $\ln\left(g(t)\right)=(\sin t)\cdot\ln(\cos t),\quad /\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$

$$\frac{g^{'}(t)}{g(t)}=(\cos t)\cdot\ln(\cos t)+(\sin t)\cdot\frac{1}{\cos t}\cdot(-\sin t),$$

$$g^{'}(t)=g(t)\cdot\left((\cos t)\cdot\ln(\cos t)-\sin t\cdot\frac{\sin t}{\cos t}\right)=$$

$$=(\cos t)^{\sin t}\cdot\left((\cos t)\cdot\ln(\cos t)-(\sin t)\cdot\operatorname{tg} t\right).$$

4. Primjenom pravila za derivaciju složene funkcije i/ili formule za derivaciju inverza funkcije dokažite sljedeće jednakosti:

a) $(\cos x)' = -\sin x$;

Rješenje:
$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right)' =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}+x\right)' =$$
$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot\sin x\right)\cdot(0+1) =$$
$$= (0\cdot\cos x - 1\cdot\sin x)\cdot 1 =$$
$$= -\sin x;$$

b) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Rješenje: $f(x) = \sin x,\ f'(x) = \cos x,\ f^{-1}(x) = \arcsin x \Rightarrow$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} =$$
$$= \left(\text{zbog } \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x},\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

c) $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Rješenje: $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$,
$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$
$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' =$$
$$= 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}};$$

d) $(\text{arctg } x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

Rješenje: $f(x) = \text{tg } x,\ f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ f^{-1}(x) = \text{arctg } x \Rightarrow$

$$(\text{arctg } x)' = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2(\text{arctg } x)}} =$$
$$= \cos^2(\text{arctg } x) =$$
$$= \left(\text{zbog } \cos^2 x = \frac{1}{1+\text{tg}^2 x},\ \forall x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \right) =$$
$$= \frac{1}{1+\text{tg}^2(\text{arctg } x)} =$$
$$= \frac{1}{1+x^2};$$

e) $(\text{arcctg } x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$;

Rješenje: $\text{arctg } x + \text{arcctg } x = \dfrac{\pi}{2},\ \forall x \in \mathbb{R},$

$$\text{arcctg } x = \frac{\pi}{2} - \text{arctg } x,$$
$$(\text{arcctg } x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \text{arctg } x\right)' =$$
$$= 0 - \frac{1}{1+x^2} =$$
$$= \frac{-1}{1+x^2};$$

f) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Rješenje: $f(x) = f'(x) = \text{e}^x,\ f^{-1}(x) = \ln x,$

$$(\ln x)' = \frac{1}{\text{e}^{\ln x}} =$$
$$= (\text{zbog } \text{e}^{\ln x} = x, \forall x > 0) =$$
$$= \frac{1}{x}.$$

5. Odredite derivacije sljedećih parametarski zadanih funkcija:

a) $\begin{cases} x = 4 \cdot t - 1; \\ y = t^2; \end{cases}$

Rješenje: Primjenjujemo pravilo za deriviranje parametarski zadane funkcije.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(t^2\right)'}{(4 \cdot t - 1)'} = \\ &= \frac{2 \cdot t}{4 - 0} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot t; \end{aligned}$$

b) $\begin{cases} x = \sqrt{t}; \\ y = \sqrt[3]{t^2}; \end{cases}$

Rješenje: $$\begin{aligned} y' &= \frac{\left(t^{\frac{2}{3}}\right)'}{\left(t^{\frac{1}{2}}\right)'} = \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{2}{3}-1}}{\frac{1}{2} \cdot t^{\frac{1}{2}-1}} = \\ &= \frac{\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{-1}{3}}}{\frac{1}{2} \cdot t^{\frac{-1}{2}}} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot t^{\frac{-1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \\ &= \frac{4}{3} \cdot t^{\frac{1}{6}} = \frac{4}{3} \cdot \sqrt[6]{t}. \end{aligned}$$

c) $\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t; \\ y = b \cdot \sin^3 t; \end{cases}$

Rješenje: $$y' = \frac{\left(b \cdot \sin^3 t\right)'}{\left(a \cdot \cos^3 t\right)'} =$$
$$= \frac{b \cdot 3 \cdot \sin^2 t \cdot (\sin t)'}{a \cdot 3 \cdot \cos^2 t \cdot (\cos t)'} =$$
$$= \frac{b \cdot \sin^2 t \cdot \cos t}{a \cdot \cos^2 t \cdot (-\sin t)} =$$
$$= \frac{-b \cdot \sin t}{a \cdot \cos t} =$$
$$= \frac{-b}{a} \cdot \text{tg } t;$$

d) $\begin{cases} x = \mathrm{e}^t \cdot \cos t; \\ y = \mathrm{e}^t \cdot \sin t. \end{cases}$

Rješenje: $$y' = \frac{\left(\mathrm{e}^t \cdot \sin t\right)'}{\left(\mathrm{e}^t \cdot \cos t\right)'} =$$
$$= \frac{\mathrm{e}^t \cdot \sin t + \mathrm{e}^t \cdot \cos t}{\mathrm{e}^t \cdot \cos t - \mathrm{e}^t \cdot \sin t} =$$
$$= \frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}.$$