4.9.

L'HÔPITAL – BERNOULLIJEVO PRAVILO

4.9.1. L'HÔPITAL – BERNOULLIJEVO PRAVILO

U određenim se slučajevima računanje graničnih vrijednost može značajno pojednostavniti primjenom sljedećega pravila:

Pretpostavimo da su realne funkcije f i g definirane na intervalu $\langle a, b\rangle$ osim možda u točki $c \in \langle a,b\rangle$, te da za svaki $x \in \langle a,b\rangle \setminus \{c\}$ postoje derivacije f' i g' koje su neprekidne na $\langle a, b\rangle \setminus \{c\}$ i takve da je $g'(x) \neq 0$.

Ako vrijedi $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ i ako postoji $\lim\limits_{x\to c}\left(\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, onda je

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Analogna tvrdnja vrijedi i za $c = \pm\infty$, te za $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \pm\infty$

4.9.2. NAPOMENA

U skladu s izrekom prethodnoga pravila, jednakost

$$\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\lim_{x\to c}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

treba „čitati” ovako:

Ako postoji granična vrijednost $\lim_{x\to c}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$, *onda postoji i granična vrijednost* $\lim_{x\to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$

i te dvije granične vrijednosti su međusobno jednake.

4.9.2. NAPOMENA

Naime, može se dogoditi da granična vrijednost $\lim_{x \to c}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ postoji, ali da granična vrijednost $\lim_{x \to c}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ *ne* postoji.

Tipičan primjer takvoga slučaja je npr. $\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

Očito su:

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\frac{(\sin x)'}{(x)'}\right) = \lim_{x \to +\infty}(\cos x) \textbf{ ne } \text{postoji.}$$

Primjenom L'Hôpital – Bernoullijeva pravila odredite sljedeće granične vrijednosti:

1. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{\sin(a \cdot x)}{b \cdot x}\right)$, pri čemu je $b \neq 0$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0}\left(\frac{(\sin(a \cdot x))'}{(b \cdot x)'}\right) = \\ &= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos(a \cdot x) \cdot a}{b}\right) = \\ &= \frac{a \cdot \cos(a \cdot 0)}{b} = \\ &= \frac{a \cdot 1}{b} = \\ &= \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x \to 0}\left(\frac{a^x - 1}{x}\right)$, pri čemu je $a > 0$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 0}\left(\frac{(a^x - 1)'}{(x)'}\right) = \\ &= \lim_{x \to 0}\left(\frac{a^x \cdot \ln a}{1}\right) = \\ &= a^0 \cdot \ln a = \\ &= 1 \cdot \ln a = \\ &= \ln a. \end{aligned}$$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{x} \right)$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\dfrac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\left(\ln(1+x)\right)'}{(x)'} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{1}{1+x} \cdot (x+1)'}{1} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{1+x} \cdot (1+0) \right) =$$
$$= \frac{1 \cdot 1}{1+0} = 1.$$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{3 \cdot (\sin x - x \cdot \cos x)}{x^3} \right)$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\dfrac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{3 \cdot \left(\sin x - x \cdot \cos x\right)'}{\left(x^3\right)'} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{3 \cdot \left(\cos x - (1 \cdot \cos x + x \cdot (-\sin x))\right)}{3 \cdot x^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x - \cos x + x \cdot \sin x}{x^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{x \cdot \sin x}{x^2} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(\sin x)'}{(x)'} \right) =$$
$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{1} \right) = \cos 0 = 1.$$

5. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} \right)$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x = 0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\dfrac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(\operatorname{tg} x - \sin x)'}{(x - \sin x)'} \right) = \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} \right) = \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\dfrac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x}}{1 - \cos x} \right) = \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos^3 x}{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x} \right) = \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{(1 - \cos x) \cdot \left(1 + \cos x + \cos^2 x\right)}{(1 - \cos x) \cdot \cos^2 x} \right) = \\
&= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) = \\
&= \frac{1 + \cos 0 + \cos^2 0}{\cos^2 0} = \\
&= \frac{1 + 1 + 1^2}{1^2} = \\
&= 3.
\end{aligned}
$$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\cdot \ln(\cos x)}{x^2}\right)$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x=0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\frac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot(\ln(\cos x))'}{\left(x^2\right)'}\right)= \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot(\cos x)'}{2\cdot x}\right)= \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{\cos x}\cdot(-\sin x)}{x}\right)= \\
&= -\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\right)= \\
&= -1\cdot\frac{1}{\cos 0}= \\
&= -1\cdot 1= \\
&= -1.
\end{aligned}
$$

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{\sin^2 x}-1}{x^2}\right)$.

Rješenje: Uvrštavanjem $x=0$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da se radi o graničnoj vrijednosti oblika $\dfrac{0}{0}$. Zbog toga redom imamo:

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(e^{\sin^2 x}-1\right)'}{\left(x^2\right)'}\right)= \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}\cdot\left(\sin^2 x\right)'-0}{2\cdot x}\right)= \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}\cdot 2\cdot \sin x\cdot(\sin x)'}{2\cdot x}\right)= \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\sin^2 x}\cdot \sin x\cdot\cos x}{x}\right)= \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\left(e^{\sin^2 x}\cdot\cos x\right)\right)= \\
&= 1\cdot e^{\sin^2 0}\cdot\cos 0= \\
&= 1\cdot e^0\cdot 1= \\
&= 1\cdot 1\cdot 1= \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)$.

Rješenje: Zadana granična vrijednost je oblika $(+\infty)^0$. U ovom obliku ne možemo primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo, pa moramo transformirati zadani izraz tako da dobijemo oblik pogodan za primjenu L'Hôpital – Bernoullijeva pravila.

Neka je

$$L := \lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right).$$

Logaritmiranjem te jednakosti (po bazi e) dobivamo:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \ln\left(\lim_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right),\\
\ln L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right),\\
\ln L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\ln x\right),\\
\ln L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right).
\end{aligned}$$

Granična vrijednost na desnoj strani posljednje jednakosti je oblika $\frac{+\infty}{+\infty}$, pa možemo primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo:

$$\begin{aligned}
\ln L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\ln x)'}{(x)'}\right),\\
\ln L &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right),\\
\ln L &= 0,\\
L &= \mathrm{e}^0 = 1.
\end{aligned}$$

9. $\lim\limits_{x\to 0+}\left(\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right)$.

Rješenje: Zadana granična vrijednost je oblika $(0)^0$. U ovom obliku ne možemo primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo, pa moramo transformirati zadani izraz tako da dobijemo oblik pogodan za primjenu L'Hôpital – Bernoullijeva pravila.

Neka je

$$L := \lim_{x\to 0+}\left(\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right).$$

Logaritmiranjem obiju strana te jednakosti (po bazi e) dobivamo:

$$\ln L = \ln\left(\lim_{x\to 0+}\left(\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right)\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\ln\left(\left(1-e^x\right)^{\frac{1}{\ln x}}\right)\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot\ln\left(1-e^x\right)\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\ln\left(1-e^x\right)}{\ln x}\right).$$

Granična vrijednost na desnoj strani posljednje jednakosti je oblika $\frac{-\infty}{-\infty}$, pa možemo primijeniti L'Hôpital – Bernoullijevo pravilo. Tako slijedi:

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\left(\ln\left(1-e^x\right)\right)'}{(\ln x)'}\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{\frac{1}{1-e^x}\cdot\left(1-e^x\right)'}{\frac{1}{x}}\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{1-e^x}\cdot\left(0-e^x\right)\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{e^x-1}\cdot e^x\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x}{e^x-1}\right)\cdot\lim_{x\to 0+}\left(e^x\right),$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{(x)'}{\left(\mathrm{e}^x-1\right)'}\right)\cdot \mathrm{e}^0,$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x-0}\right)\cdot 1,$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0+}\left(\mathrm{e}^{-x}\right),$$

$$\ln L = \mathrm{e}^{-0},$$

$$\ln L = 1,$$

$$L = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

10. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2\cdot x}{x-1}-\dfrac{2}{\ln x}\right).$

Rješenje: Uvrštavanjem $x=1$ u funkciju čiju graničnu vrijednost tražimo zaključujemo da je ona oblika $\dfrac{2}{0}-\dfrac{2}{0}$. Zbog toga u ovom obliku ne možemo primijeniti L'Hôpital-Bernoullijevo pravilo. No, svođenjem razlomaka u toj funkciji na zajednički nazivnik dobivamo redom:

$$L = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot x\cdot \ln x-2\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot \ln x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(2\cdot x\cdot \ln x-2\cdot(x-1))'}{((x-1)\cdot \ln x)'}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot \ln x+2\cdot x\cdot \frac{1}{x}-2\cdot(1-0)}{(1-0)\cdot \ln x+(x-1)\cdot \frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot \ln x+2-2}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot x\cdot \ln x}{x\cdot \ln x+x-1}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(2\cdot x\cdot \ln x)'}{(x\cdot \ln x+x-1)'}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{2\cdot \ln x+2\cdot x\cdot \frac{1}{x}}{1\cdot \ln x+x\cdot \frac{1}{x}+1-0}\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x \to 1} \left(\frac{2 \cdot \ln x + 2}{\ln x + 1 + 1} \right) = \\
&= \frac{2 \cdot \ln 1 + 2}{\ln 1 + 2} = \\
&= \frac{2 \cdot 0 + 2}{0 + 2} = \\
&= \frac{2}{2} = \\
&= 1.
\end{aligned}
$$