1. Opći član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiran je pravilom:

$$a_n = \frac{7-8\cdot n}{4\cdot n+3}\ .$$

a) Izračunajte graničnu vrijednost L zadanoga niza.

b) Odredite najmanji $k\in\mathbb{N}$ za koji je $|a_k - L| < 10^{-7}$ i objasnite značenje dobivenoga rezultata.

Rješenje: a) Podijelimo brojnik i nazivnik s n. Dobivamo:

$$L = \lim_n \left(\frac{\frac{7}{n} - \frac{8\cdot n}{n}}{\frac{4\cdot n}{n} + \frac{3}{n}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{-8+\frac{7}{n}}{4+\frac{3}{n}} \right) =$$

$$= \frac{-8+0}{4+0} = -2.$$

b) Imamo redom:

$$\left| \frac{7-8\cdot k}{4\cdot k+3} + 2 \right| < 10^{-7},$$

$$\left| \frac{7-8\cdot k + 2\cdot(4\cdot k+3)}{4\cdot k+3} \right| < 10^{-7},$$

$$\left| \frac{13}{4\cdot k+3} \right| < 10^{-7},$$

$$\frac{|13|}{|\underbrace{4\cdot k+3}_{>0}|} < 10^{-7},$$

$$\frac{13}{4\cdot k+3} < 10^{-7}, \qquad / \cdot \frac{4\cdot k+3}{10^{-7}}$$

$$4\cdot k+3 > \frac{13}{10^{-7}},$$

$$4\cdot k > 13\cdot 10^7 - 3,$$

$$k > \frac{13\cdot 10^7 - 3}{4} = 32\ 499\ 999.25.$$

(Primijenili smo jednakost:

$$|4\cdot k+3|=4\cdot k+3,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Ona vrijedi jer je izraz pod znakom apsolutne vrijednosti strogo pozitivan kad god je $k\in\mathbb{N}$.)

Najmanji prirodan broj koji zadovoljava dobivenu nejednakost je $k_{\min}=32\,500\,000.$ To znači da se prvih 32 499 999 članova zadanoga niza nalazi *izvan* intervala $\left\langle -2-10^{-7},-2+10^{-7}\right\rangle$, a da se svi članovi niza počevši od 32 500 000. nalaze *unutar* toga intervala.

2. Odredite graničnu vrijednost niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

$$b_n=\frac{(n-2)^2+(3\cdot n+1)^2}{(n+3)^2+(2\cdot n-1)^2}.$$

Rješenje: Koristeći formulu za kvadrat binoma imamo redom:

$$\begin{aligned} b_n&=\frac{n^2-4\cdot n+4+9\cdot n^2+6\cdot n+1}{n^2+6\cdot n+9+4\cdot n^2-4\cdot n+1}=\\ &=\frac{10\cdot n^2+2\cdot n+5}{5\cdot n^2+2\cdot n+10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L=\lim_n b_n&=\lim_n\left(\frac{10\cdot n^2+2\cdot n+5}{5\cdot n^2+2\cdot n+10}\right)=\\ &=\lim_n\left(\frac{10\cdot n^2+2\cdot n+5\ :n^2}{5\cdot n^2+2\cdot n+10\ :n^2}\right)=\\ &=\lim_n\left(\frac{10+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}}{5+\frac{2}{n}+\frac{10}{n^2}}\right)=\\ &=\frac{10+0+0}{5+0+0}=\frac{10}{5}=2. \end{aligned}$$

3. Odredite graničnu vrijednost niza $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ čiji je opći član definiran pravilom:

$$c_n = 7\cdot n - \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}.$$

Rješenje: Zadano pravilo svest ćemo na ekvivalentni oblik u kojemu ćemo moći primijeniti tabličnu graničnu vrijednost

$$\lim_n \left(\frac{a}{n^k}\right) = 0,\ \forall a \in \mathbb{R},\ \forall k > 0.$$

U toj ćemo transformaciji koristiti formulu za razliku kvadrata

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b).$$

Imamo redom:

$$L = \lim_n \left(\left(7\cdot n - \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right) \cdot \frac{\left(7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)}{\left(7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{(7\cdot n)^2 - \left(\sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}\right)^2}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{49\cdot n^2 - \left(49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29\right)}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{28\cdot n - 29}{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{\frac{28\cdot n - 29}{n}}{\frac{7\cdot n + \sqrt{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}}{n}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{28 - \frac{29}{n}}{7 + \sqrt{\frac{49\cdot n^2 - 28\cdot n + 29}{n^2}}} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{28 - \frac{29}{n}}{7 + \sqrt{49 - \frac{28}{n} + \frac{29}{n^2}}} \right) =$$

$$= \frac{28 - 0}{7 + \sqrt{49 - 0 + 0}} = \frac{28}{7+7} = 2.$$

4. Odredite **sve asimptote** na krivulju

$$y = \frac{x^3 - 2 \cdot x^2 + 1}{x^2 - x - 6}.$$

Rješenje: Primijetimo da je izraz kojim je zadana krivulja neprava racionalna funkcija takva da je stupanj brojnika (3) za jedan veći od stupnja nazivnika. Prema kriteriju iz zadatka 1. u točki 4.10., zadana krivulja ima točno jednu kosu asimptotu.

Odredimo najprije uspravne asimptote. Nazivnik izraza kojim je zadana krivulja izjednačimo s nulom. Dobivamo:

$$x^2 - x - 6 = 0,$$
$$x_1 = -2,\ x_2 = 3.$$

Dakle, zadana krivulja ima dvije uspravne asimptote: $x = -2$ i $x = 3$.

Ispitajmo ima li krivulja (obostranu) kosu asimptotu. Odredimo:

$$k = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - 2\cdot x^2 + 1}{x^3 - x^2 - 6\cdot x}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1 - 2\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x} - 6\cdot\frac{1}{x^2}}\right) =$$
$$= \frac{1 - 2\cdot 0 + 0}{1 - 0 - 6\cdot 0} = 1,$$

$$l = \lim_{x\to\infty}(y - k\cdot x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - 2\cdot x^2 + 1}{x^2 - x - 6} - 1\cdot x\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3 - 2\cdot x^2 + 1 - \left(x^3 - x^2 - 6\cdot x\right)}{x^2 - x - 6}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-x^2 + 6\cdot x + 1}{x^2 - x - 6}\right) =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-1 + 6\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x} - 6\cdot\frac{1}{x^2}}\right) =$$
$$= \frac{-1 + 6\cdot 0 + 0}{1 - 0 - 6\cdot 0} = -1.$$

Dakle, obostrana kosa asimptota zadane krivulje je pravac $y = x - 1$.

5. Odredite **sve asimptote** na krivulju

$$y = 2 \cdot (\operatorname{arctg} x - x).$$

Rješenje: Primijetimo da je izraz kojim je definirana krivulja definiran za svaki $x \in \mathbb{R}$. Zbog toga krivulja *nema nijednu uspravnu asimptotu*.

Ispitajmo ima li zadana krivulja kose asimptote. Moramo odrediti (najviše) četiri granične vrijednosti. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
k_1 = k_2 &= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)}{x}\right) = \left\{\frac{\mp\infty}{\pm\infty}\right\} = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{\left(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x)\right)'}{(x)'}\right) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)}{1}\right) = \\
&= \lim_{x\to\pm\infty}\left(2\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}-1\right)\right) = \\
&= 2\cdot(0-1) = -2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_1 &= \lim_{x\to-\infty}(y - k_1\cdot x) = \lim_{x\to-\infty}(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x) - (-2\cdot x)) = \\
&= \lim_{x\to-\infty}(2\cdot \operatorname{arctg} x) = \\
&= 2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_2 &= \lim_{x\to+\infty}(y - k_2\cdot x) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}(2\cdot(\operatorname{arctg} x - x) - (-2\cdot x)) = \\
&= \lim_{x\to+\infty}(2\cdot \operatorname{arctg} x) = \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi.
\end{aligned}$$

Dakle, zadana krivulja ima dvije kose asimptote: $y = -2\cdot x - \pi$ i $y = -2\cdot x + \pi$.

6. U točki pregiba krivulje $y = x^3 - 3 \cdot x^2 + 5$ povučena je tangenta na krivulju. Izračunajte površinu trokuta kojega ta tangenta zatvara s objema koordinatnim osima.

Rješenje: Najprije odredimo prve dvije derivacije izraza koji zadaje krivulju y:

$$y' = 3 \cdot x^2 - 6 \cdot x,$$
$$y'' = 6 \cdot x - 6.$$

Iz jednadžbe $y'' = 0$, odnosno jednadžbe

$$6 \cdot x - 6 = 0$$

slijedi $x = 1$. Lako vidimo da su npr.

$$y''(0) = -6 < 0,$$
$$y''(2) = 6 > 0,$$

pa je $T = (1, y(1)) = (1, 3)$ točka pregiba zadane krivulje.

Koeficijent smjera tangente povučene na zadanu krivulju u točki T jednak je vrijednosti prve derivacije izraza kojim je zadana krivulja za $x = 1$:

$$k_t = \left(y'\right)_{x=1} = \left(3 \cdot x^2 - 6 \cdot x\right)_{x=1} = 3 - 6 = -3.$$

Jednadžba tangente zapisana u segmentnom obliku glasi:

$$y = (-3) \cdot (x - 1) + 3,$$
$$y = -3 \cdot x + 6,$$
$$3 \cdot x + y = 6, \quad / : 6$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1.$$

Odatle izravno slijedi da je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |2 \cdot 6| = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6 \text{ kv. jed.}$$