1. Zadana je **neprava** potpuno skraćena racionalna funkcija

$$f(x)=\frac{x^4-2\cdot x^2+1}{x^3+2\cdot x}.$$

a) **Isključivo pomoću odgovarajućega rastava na faktore** odredite **skup svih nultočaka** zadane funkcije.

Rješenje:

Primjenom formula za kvadrat razlike i razliku kvadrata dobivamo:

$$\begin{aligned} x^4-2\cdot x^2+1&=\left(x^2-1\right)^2=\\ &=\left((x-1)\cdot(x+1)\right)^2=\\ &=(x-1)^2\cdot(x+1)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Potpuno skraćena racionalna funkcija poprima vrijednost 0 ako i samo ako njezin brojnik poprima vrijednost nula. Tako dalje imamo:

$$\begin{aligned} &x^4-2\cdot x^2+1=0,\\ &(x-1)^2\cdot(x+1)^2=0,\\ &(x-1=0)\vee(x+1=0),\\ &x_1=1,\ x_2=-1. \end{aligned}$$

Dakle, traženi skup je $N(f)=\{-1,1\}$.

Napomena: Primijetite da je skup $N(f)$ dvočlan iako je brojnik zadane funkcije polinom 4. stupnja. To je u skladu s osnovnim teoremom algebre: polinom 4. stupnja ima *najviše različite realne* nultočke. U ovom slučaju brojnik zadane funkcije ima dvije različite nultočke, od kojih je svaka kratnosti 2.

b) **Isključivo pomoću odgovarajućega rastava na faktore** odredite **skup svih polova** zadane funkcije.

Rješenje:

Rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore. Imamo:

$$x^3 + 2 \cdot x = x \cdot \left(x^2 + 2\right), \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Polovi zadane funkcije su sve *realne* nultočke njezina nazivnika. Primijetimo da vrijedi nejednakost

$$x^2 + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R},$$

jer je lijeva strana zbroj nenegativnoga realnoga broja $\left(x^2\right)$ i prirodnoga broja (2). Zbog toga je nazivnik zadane funkcije jednak nuli ako i samo ako je $x = 0$. Dakle, $P(f) = \{0\}$.

Napomena: I ovaj je rezultat u skladu s osnovnim teoremom algebre. Nazivnik zadane funkcije je polinom 3. stupnja. Osnovni teorem algebre povlači da taj polinom mora imati *barem jednu* (realnu) nultočku. Ovaj polinom ima *točno jednu* nultočku (a ne točno tri, kako bismo možda očekivali).

c) Prikažite zadanu funkciju u obliku zbroja polinoma i **prave** racionalne funkcije.

Rješenje:

Podijelimo brojnik zadane funkcije njezinim nazivnikom. Imamo redom:

$$\begin{array}{l}
\left(x^4 - 2 \cdot x^2 + 1\right) : \left(x^3 + 2 \cdot x\right) = x \\
\underline{-\left(x^4 + 2 \cdot x^2\right)} \\
-4 \cdot x^2 + 1
\end{array}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
f(x) &= x + \frac{-4 \cdot x^2 + 1}{x^3 + 2 \cdot x} = \\
&= x - \frac{4 \cdot x^2 - 1}{x^3 + 2 \cdot x}.
\end{aligned}$$

2. Zadana je **prava** racionalna funkcija $f(x)=\dfrac{x^2+5\cdot x+4}{x^3+4\cdot x^2+4\cdot x}$.

a) Odredite **skup svih nultočaka** zadane funkcije.

Rješenje:

Argumentacijom kao u zadatku 1.a) dobivamo:

$$x^2+5\cdot x+4=0,$$
$$x_1=-4,\ x_2=-1.$$

Zbog toga je $N(f)=\{-4,-1\}$.

b) **Isključivo pomoću odgovarajućega rastava na faktore** odredite **skup svih polova** zadane funkcije.

Rješenje:

Primjenom formule za kvadrat zbroja dobivamo redom:

$$x^3+4\cdot x^2+4\cdot x=x\cdot\left(x^2+4\cdot x+4\right)=$$
$$=x\cdot(x+2)^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Argumentacijom kao u zadatku 1.b) slijedi:

$$x\cdot(x+2)^2=0,$$
$$(x=0)\vee(x+2=0),$$
$$x_1=0,\ x_2=-2.$$

Dakle, traženi je skup $P(f)=\{-2,0\}$.

Napomena: I ovaj je rezultat u skladu s osnovnim teoremom algebre. Nazivnik zadane funkcije je polinom 3. stupnja. Osnovni teorem algebre povlači da taj polinom mora imati *barem jednu* (realnu) nultočku. Ovaj polinom ima *točno dvije* nultočke (a ne točno tri, kako bismo možda očekivali).

c) **Koristeći rezultat b) podzadatka** rastavite zadanu funkciju na parcijalne razlomke.

Rješenje:

Tražimo rastav oblika

$$\frac{x^2+5\cdot x+4}{x^3+4\cdot x^2+4\cdot x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{(x+2)^2},$$

gdje su $A_1, A_2, A_3 \in \mathbb{R}$ konstante. Množenjem te jednakosti s $x\cdot(x+2)^2$ dobivamo:

$$\frac{x^2+5\cdot x+4}{x^3+4\cdot x^2+4\cdot x}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x+2}+\frac{A_3}{(x+2)^2}, \qquad /\cdot x\cdot(x+2)^2$$

$$x^2+5\cdot x+4=A_1\cdot(x+2)^2+A_2\cdot x\cdot(x+2)+A_3\cdot x,$$

$$\begin{cases} x=0 \to 4=A_1\cdot(0+2)^2 \to 4\cdot A_1=4 \to A_1=1, \\ x=-2 \to (-2)^2+5\cdot(-2)+4=A_3\cdot(-2) \to (-2)\cdot A_3=-2 \to A_3=1, \\ x=1 \to 1^2+5\cdot 1+4=A_1\cdot(1+2)^2+A_2\cdot 1\cdot(1+2)+A_3\cdot 1 \to \\ \qquad 10=9\cdot A_1+3\cdot A_2+A_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1=1. \\ A_3=1, \\ 9\cdot A_1+3\cdot A_2+A_3=10. \end{cases}$$

Rješenje ovoga sustava je $(A_1, A_2, A_3)=(1,0,1)$.

Dakle, traženi rastav glasi:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+2)^2}.$$

3. Rastavite pravu racionalnu funkciju $f(x)=\dfrac{4}{x^4+4\cdot x^2}$ na parcijalne razlomke.

Rješenje:

Najprije rastavimo nazivnik zadane funkcije na faktore:

$$x^4+4\cdot x^2=x^2\cdot\left(x^2+4\right),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

Zbog toga tražimo rastav oblika

$$\frac{4}{x^4+4\cdot x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3\cdot x+A_4}{x^2+4},$$

gdje su $A_1, A_2, A_3, A_4\in\mathbb{R}$ konstante. Množenjem te jednakosti s $x^2\cdot\left(x^2+4\right)$ slijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{x^4+4\cdot x^2}=\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\frac{A_3\cdot x+A_4}{x^2+4}, \qquad /\cdot x^2\cdot\left(x^2+4\right)\\
&4=A_1\cdot x\cdot\left(x^2+4\right)+A_2\cdot\left(x^2+4\right)+\left(A_3\cdot x+A_4\right)\cdot x^2,\\
&4=A_1\cdot x^3+4\cdot A_1\cdot x+A_2\cdot x^2+4\cdot A_2+A_3\cdot x^3+A_4\cdot x^2,\\
&4=\left(A_1+A_3\right)\cdot x^3+\left(A_2+A_4\right)\cdot x^2+4\cdot A_1\cdot x+4\cdot A_2.
\end{aligned}$$

Prema teoremu o jednakosti dvaju polinoma dobivamo sustav:

$$\begin{cases}A_1+A_3=0,\\ A_2+A_4=0,\\ 4\cdot A_1=0,\\ 4\cdot A_2=4.\end{cases}$$

Njegovo je rješenje $\left(A_1, A_2, A_3, A_4\right)=(0,1,0,-1).$

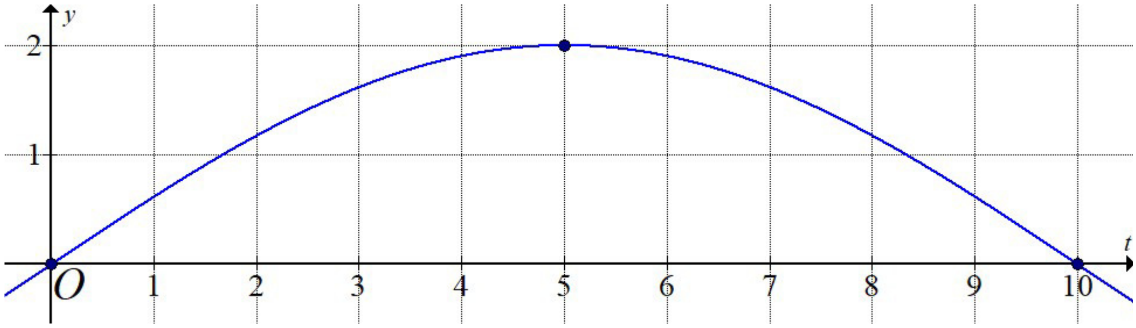
Dakle, traženi rastav glasi:

$$f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}.$$

Napomena: Traženi rastav može se brže (ali ne i jednostavnije!) dobiti ovako:

$$\begin{aligned}
\frac{4}{x^4+4\cdot x^2}&=\frac{4+x^2-x^2}{x^2\cdot\left(x^2+4\right)}=\frac{\left(4+x^2\right)-x^2}{x^2\cdot\left(x^2+4\right)}=\\
&=\frac{4+x^2}{x^2\cdot\left(x^2+4\right)}-\frac{x^2}{x^2\cdot\left(x^2+4\right)}=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^2+4}
\end{aligned}$$

4. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ konstante. Odredite pravilo harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na donjoj slici.



Slika 1.

Rješenje:

Iz slike 1. očitamo $A = 2$.

Razmak između dviju uzastopnih nultočaka (koji je jednak udaljenosti pripadnih sjecišta grafa s osi apscisa!) jednak je $d = 10 - 0 = 10$. Taj razmak mora biti jednak polovici temeljnoga perioda T. Tako dobivamo:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 10,$$

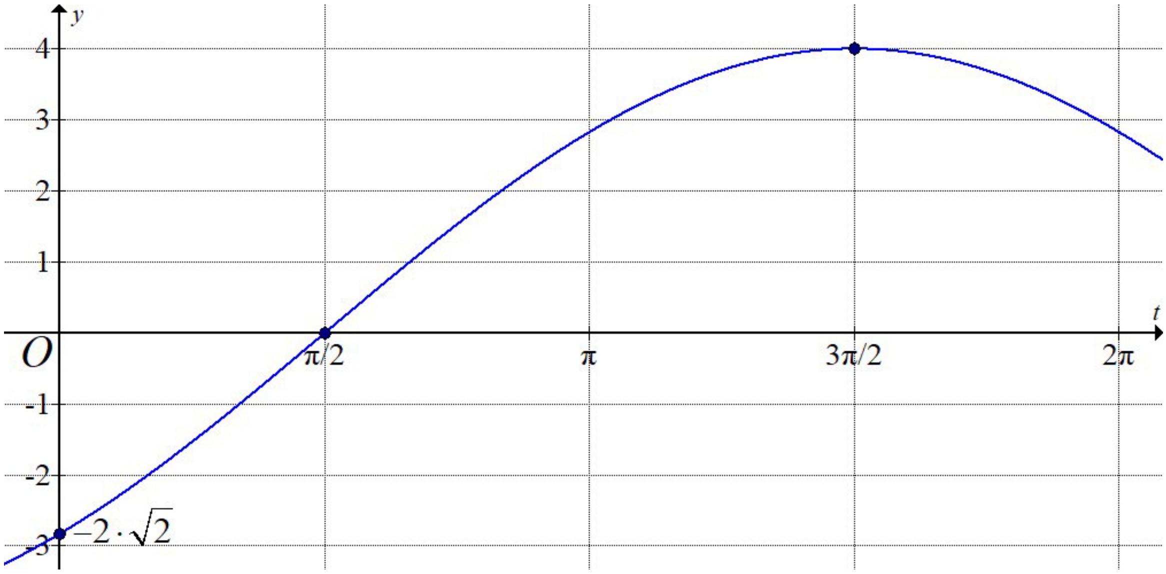
otkuda je $\omega = \frac{\pi}{10}$.

Naposljetku, uočimo da zadani graf prolazi ishodištem. Budući da je pravilo funkcije h definirano pomoću funkcije sinus, to znači da je $\varphi = 0$.

Dakle, traženo je pravilo:

$$h(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{10} \cdot t \right).$$

5. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ konstante. Odredite pravilo harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na donjoj slici.



Slika 2.

Rješenje:

Iz zadane slike očitamo $A = 4$.

Nadalje, razmak između strogo pozitivne nultočke i apscise točke lokalnoga maksimuma mora biti jednak četvrtini temeljnoga perioda T. Iz slike vidimo da je taj razmak jednak

$$d = \frac{3}{2} \cdot \pi - \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Tako iz

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \pi$$

slijedi

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{2}.$$

Naposljetku uočimo da graf zadane funkcije prolazi točkom $\left(0, -2 \cdot \sqrt{2}\right)$. To znači da je $h(0) = -2 \cdot \sqrt{2}$.

Uvrštavanjem $A = 4$, $\omega = \frac{1}{2}$, $t = 0$ i $h(0) = -2\cdot\sqrt{2}$ u pravilo funkcije *h* dobivamo:

$$-2\cdot\sqrt{2} = 4\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\varphi\right),$$
$$\sin\varphi = \frac{-\sqrt{2}}{2}.$$

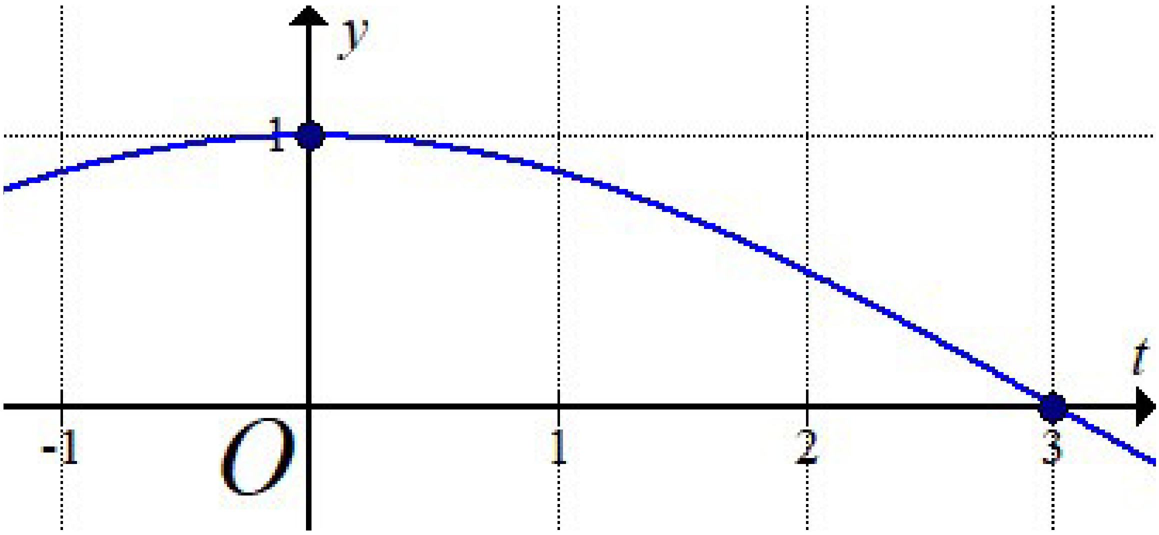
Prema pretpostavci je $\varphi\in\left\langle\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$. Skup $\left\langle\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ je pravi podskup segmenta $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ koji je prirodna domena funkcije arkus sinus, pa smijemo primijeniti tu funkciju i dobiti:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\pi}{4}.$$

Dakle, traženo je pravilo

$$h(t) = 4\cdot\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4}\right).$$

6. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in [0, \pi]$ konstante. Odredite pravilo harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na donjoj slici.



Slika 3.

Rješenje:

Iz zadane slike očitamo $A = 1$.

Nadalje, razmak između strogo pozitivne nultočke i apscise točke lokalnoga maksimuma mora biti jednak četvrtini temeljnoga perioda *T*. Iz slike vidimo da je taj razmak jednak

$$d = 3 - 0 = 3.$$

Tako iz

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 3$$

slijedi

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot 3} = \frac{\pi}{6}.$$

Naposljetku uočimo da graf zadane funkcije prolazi točkom $(0,1)$. To znači da je $h(0) = 1$.

Uvrštavanjem $A = 1,\ \omega = \frac{\pi}{6},\ t = 0$ i $h(0) = 1$ u pravilo funkcije *h* dobivamo:

$$1 = 1 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + \varphi\right),$$

$$\cos\varphi = 1.$$

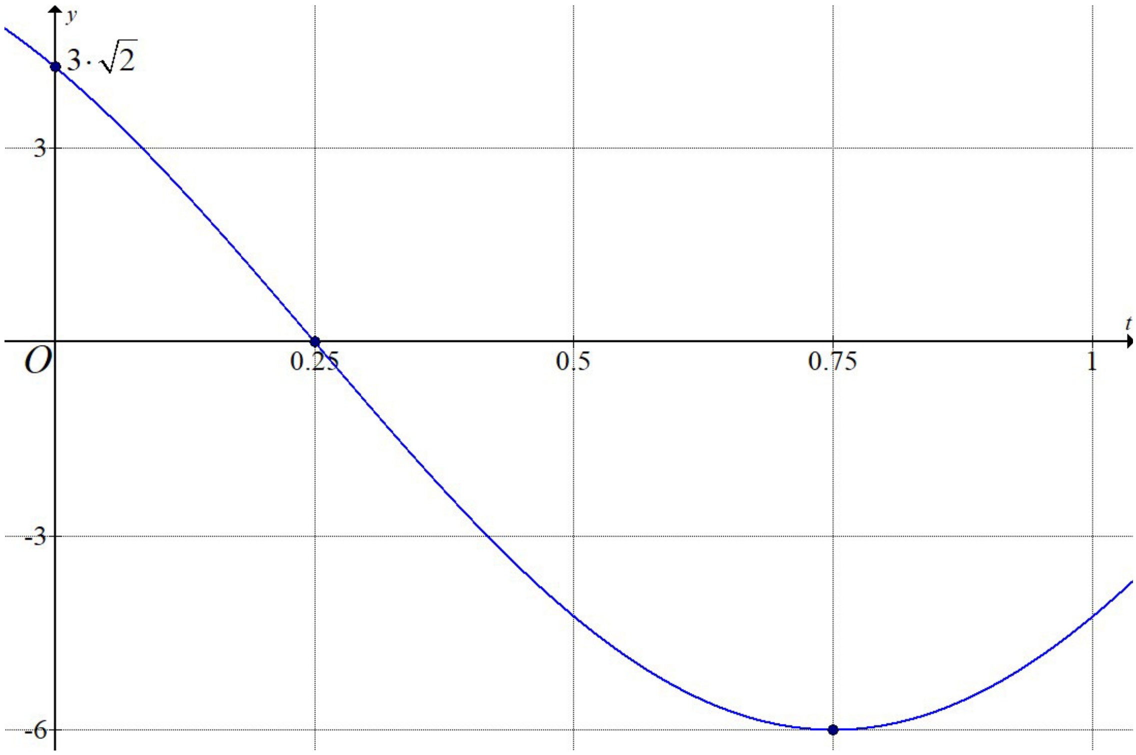
Prema pretpostavci je $\varphi \in [0, \pi]$. Skup $[0, \pi]$ je prirodna domena funkcije arkus kosinus, pa smijemo primijeniti tu funkciju i dobiti:

$$\varphi = \arccos(1) = 0.$$

Dakle, traženo je pravilo

$$h(t) = \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right).$$

7. Neka su $A, \omega > 0$ i $\varphi \in [0, \pi]$ konstante. Odredite pravilo harmonijske funkcije $h(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$ čiji je dio grafa prikazan na donjoj slici.



Slika 4.

Rješenje:

Iz zadane slike očitamo $A = |-6| = 6$.

Nadalje, razmak između strogo pozitivne nultočke i apscise točke lokalnoga minimuma mora biti jednak četvrtini temeljnoga perioda *T*. Iz slike vidimo da je taj razmak jednak

$$d = 0.75 - 0.25 = 0.5.$$

Tako iz

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 0.5$$

slijedi

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{4 \cdot 0.5} = \pi.$$

Naposljetku uočimo da graf zadane funkcije prolazi točkom $\left(0, 3 \cdot \sqrt{2}\right)$. To znači da je $h(0) = 3 \cdot \sqrt{2}$.

Uvrštavanjem $A=1$, $\omega=\pi$, $t=0$ i $h(0)=3\cdot\sqrt{2}$ u pravilo funkcije h dobivamo:

$$3\cdot\sqrt{2}=6\cdot\cos(\pi\cdot 0+\varphi),$$
$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Argumentacijom iz prethodnoga zadatka slijedi:

$$\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

Dakle, traženo je pravilo

$$h(t)=6\cdot\cos\left(\pi\cdot t+\frac{\pi}{4}\right).$$