VELEUČILIŠTE U POŽEGI

Antonija Parić, 234

PRIMJENA RAČUNALNOG PROGRAMA LINEAR PROGRAM SOLVER NA RJEŠAVANJE PROBLEMA PLANIRANJA PROIZVODNJE

ZAVRŠNI RAD

Požega, 2016. godine

VELEUČILIŠTE U POŽEGI

DRUŠTVENI ODJEL

SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ TRGOVINSKOG POSLOVANJA

Primjena računalnog programa *Linear Program Solver* na rješavanje problema planiranja proizvodnje

ZAVRŠNI RAD

IZ KOLEGIJA: KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

MENTOR: mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

STUDENT: Antonija Parić

Matični broj studenta: 234

Požega, 2016. godine

SAŽETAK

Ovaj rad donosi prikaz matematičkoga modeliranja nekoliko praktičnih problema planiranja proizvodnje.

Navedeni su tipični primjeri linearnoga programiranja u rješavanju problema planiranja proizvodnje. Svi primjeri riješeni su koristeći računalni program *Linear Program Solver*. Detaljno su prikazani i opisani svi postupci rješavanja. Također, navedene su interpretacije dobivenih optimalnih rješenja, kao i jednostavnije analize osjetljivosti tih rješenja.

Zaključkom se ukratko daje osvrt na cjelokupni rad, te posebno ukazuje na neke komponente postupka rješavanja problema.

Ključne riječi: linearno programiranje, matematičko modeliranje, planiranje proizvodnje, *Linear Program Solver*

SUMMARY

This thesis provides a review of some mathematical models applied in a few typical problems of production planning.

In thesis are given some typical examples of application of linear programming in production planning. All examples are solved using software *Linear Program Solver*. The solutions are described in detail. The decisions are interpreted and analyzed.

An overview of the entire analyzing is given in the conclusion of the thesis. Some important phases of mathematical modelling are also pointed out.

Keywords: linear programming, mathematical modelling, production planning, *Linear Program Solver.*

Sadržaj

1. UVOD

Osnovni cilj ovoga rada je pokazati kako matematički modelirati tipične probleme vezane uz planiranje proizvodnje, te riješiti dobivene modele pomoću pogodno odabranoga računalnoga programa. Dosad je razvijena nekolicina takvih programa. U radu će biti prikazana primjena računalnoga programa *Linear Program Solver*. Kad god to bude moguće, dat će se i analiza osjetljivosti optimalnoga rješenja.

Računalni programi koji sadrže implementirane metode matematičkoga programiranja uvelike pomažu poduzećima u izradi optimalnih planova proizvodnje, optimizaciji ostvarene dobiti, minimizaciji troškova proizvodnje itd.

U drugom poglavlju dat će se kratak prikaz povijesnoga razvoja i osnovnih postavki linearnoga programiranja. Bit će definirani svi pojmovi koji će se koristiti u daljnjem tekstu rada.

U trećem poglavlju dat će se kratak prikaz korisničkoga sučelja računalnoga programa *Linear Program Solver*, kao i objašnjenje onih dijelova sučelja koji će kasnije biti efektivno korišteni u rješavanju primjera. Radi lakšega razumijevanja, sva objašnjenja bit će popraćena odgovarajućim slikama.

U četvrtom poglavlju će biti prikazano detaljno rješavanje pogodno odabranih tipičnih primjera primjene linearnoga programiranja na probleme planiranja proizvodnje pomoću programa *Linear Program Solver*. Postupak dobivanja matematičkoga modela bit će detaljno prikazan i obrazložen. Postupak rješavanja dobivenoga modela pomoću računalnoga programa *Linear Program Solver* bit će, također, detaljno prikazan i popraćen odgovarajućim slikama radi lakšega razumijevanja izlaganja. Bit će interpretirane sve optimalne vrijednosti nezavisnih varijabli, kao i optimalna vrijednost funkcije cilja. S obzirom na potrebe iz gospodarske prakse, bit će prikazana i relativno jednostavna analiza osjetljivosti dobivenoga optimalnoga rješenja ako se promijeni funkcija cilja, odnosno neki od početnih uvjeta. U svakom pojedinom slučaju bit će izračunate i pripadne relativne promjene optimalnih vrijednosti.

2. OSNOVNI POJMOVI LINEARNOGA PROGRAMIRANJA

Prema Neraliću (2003)., linearno programiranje spominje se već 30-ih godina 20. stoljeća. Unutar SAD-a, linearno programiranje razvilo se tijekom Drugoga svjetskoga rata isključivo za rješavanje problematike logistike unutar vojske, poput optimiziranja opreme i prijevoza vojnika. Metodu linearnoga programiranja 1947. godine je razvio američki matematičar George Dantzig (1914.-2005.). On ju je utemeljio na svojemu radu u statističkom odjelu američkoga zrakoplovstva. Metoda je dobila naziv „linearno programiranje“ jer su se pri rješavanju koristila pomagala poput kalkulatora. Prvi Dantzigov riješeni problem bio je problem prehrane uz minimalne troškove. Problem se sastojao od 77 varijabli i 9 ograničenja. Za rješenje toga problema bilo je potrebno 120 dana uz korištenje kalkulatora.

Leonid Kantorovič (1912.-1986.), sovjetski matematičar i ekonomist, uveo je ovu metodu u rješavanje problema planiranja proizvodnje. Treba spomenuti i Tjallinga Koopmansa (1910.-1985.), nizozemsko-američkog matematičara i ekonomista, koji je zajedno sa Kantorovičem 1975. godine podijelio Nobelovu nagradu za ekonomiju. Nagrada se odnosila na njihov rad o linearnom programiranju.

Prema Chiangu (1996.) i Neraliću (2003.), većina problema koja se javlja u praksi, a postavljena je u matematičkom obliku, sastoji se od određivanja maksimuma i minimuma određenih funkcija. Svaka pojedina funkcija ima određen broj nezavisnih varijabli. Na vrijednosti tih varijabli se postavljaju uvjeti zapisani u obliku jednadžbi i nejednadžbi. Takav problem naziva se problemom matematičkog programiranja. Ako je funkcija za koju treba odrediti minimum i maksimum linearna i ako su uvjeti na vrijednost njezinih varijabli zapisani u obliku linearnih jednadžbi i nejednadžbi, tada se taj problem svrstava u kategoriju problema linearnoga programiranja. Pritom se podrazumijeva optimalna raspodjela ograničenih resursa u svrhu postizanja određenih ciljeva.

Pod resursima se podrazumijevaju resursi za rad, strojevi i sirovine i sl., koje je potrebno kombinirati kako bi se maksimizirala ukupna dobit ili minimizirali ukupni troškovi (nerijetko i oboje). Dakle, može se reći da je programiranje grana matematike koja se bavi problematikom optimizacije rada različitih sustava unutar zadanih ograničenja.

Rješavanje problema metodama linearnoga programiranja uvijek započinje postavljanjem matematičkoga modela kojim se nastoji opisati razmatrani problem. Taj se problem potom rješava različitim metodama linearnoga programiranja, pa se provodi analiza

dobivenih rješenja. Na temelju te analize mogu se jednostavnije donositi različite odluke koje se odnose na sam promatrani sustav, kao i odluke proizašle iz naknadnih promjena ograničenja postavljenih na početku razmatranja problema. Drugim riječima, moguće je provesti analizu osjetljivosti dobivenih optimalnih rješenja zavisno o promjenama polazne funkcije cilja i početnih uvjeta.

Posebno bitno je istaknuti da se u razmatranju ekonomskih problema najčešće postavlja tzv. prirodni uvjet na vrijednost svake pojedine varijable. Taj prirodni uvjet zapravo znači da vrijednost svake pojedine varijable treba biti nenegativna.

Područje primjene linearnoga programiranja je vrlo veliko. Ono se najčešće primjenjuje u proizvodnji, distribuciji i transportu, u marketingu, telekomunikacijama, u raspodjeli zaposlenika, financijskom ulaganju, planiranju i sl.

Prema Neraliću (2003.), opći oblik problema linearnoga programiranja može se zapisati u obliku:

$$
\begin{aligned}
&\max.\ z = f(x_1,...,x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n \\
&\text{pod uvjetima} \\
&a_{11} \cdot x_1 + ... + a_{1n} \cdot x_n \le b_1, \\
&\vdots \\
&a_{n1} \cdot x_1 + ... + a_{nn} \cdot x_n \le b_n, \\
&x_1,...,x_n \ge 0.
\end{aligned}
$$

Pritom su $a_{11},...,a_{1n,},...,a_{n1},...,a_{nn},b_1,...,b_n,c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$ konstante.

Funkcija f naziva se funkcija cilja. U gornjem modelu ta se funkcija maksimizira. Ako se traži minimum funkcije, onda se primjenjuje relacija $\max z = \min(-z)$.

Veličine $x_1,...,x_n$ nazivaju se varijable modela. Metodama linearnoga programiranja nastoji se odrediti vrijednost svake pojedine varijable tako da se dobije minimum, odnosno maksimum funkcije cilja. Tako dobivene vrijednosti nazivaju se optimalne vrijednosti varijabli i označavaju se s $x_1^*,...,x_n^*$. Pripadna optimalna vrijednost funkcije cilja označava se s z^*. Treba napomenuti da ista varijabla može imati više optimalnih vrijednosti, dok funkcija cilja može imati najviše jednu optimalnu vrijednost.

3. OSNOVNO O RAČUNALNOM PROGRAMU LINEAR PROGRAM SOLVER

Linear Program Solver je računalni program koji se primjenjuje u linearnom programiranju. Program je osmislio Michael Melnick uz suradnju skupine stručnjaka na Odjelu za operacijska istraživanja Ekonomskog fakulteta u Moskvi. Prema Melnicku (n.d.), program sadrži implementirane razne metode linearnoga programiranja, sustavno i metodološki razrađuje postupak tabličnoga zapisa matematičkoga modela, povezuje podatke, sistematizira formule i funkcije te definira dodatne parametre. Osim programa *Linear Program Solver*, postoje i drugi računalni programi kojima je osnovna namjena rješavanje problema matematičkoga programiranja (npr. *WinQSB*, *Lindo* i dr.).

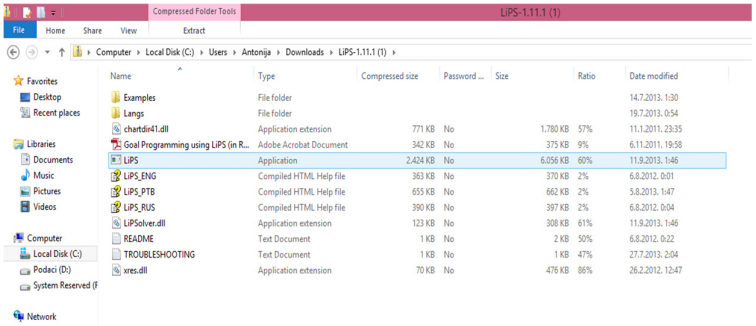
Prema Melnicku (n.d.), program *Linear Program Solver* ima sljedeće osnovne karakteristike:

- Učinkovita provedba metoda za rješavanje problema s velikim brojem varijabli.
- Omogućava se detaljan uvid u postupak rješavanja matematičkog modela koji uvid se onda može koristiti za analizu primijenjenih metoda matematičkoga programiranja.
- Omogućava analizu osjetljivosti optimalnoga rješenja pri promjeni vrijednosti koeficijenata funkcije cilja, odnosno koeficijenata u zadanim ograničenjima. Ti podaci mogu bitno koristiti pri praktičnoj analizi dobivenoga optimalnoga rješenja.
- Za razliku od ranijih programa poput *WinQSB*-a, kompatibilan je s novijim verzijama *Windows*-a (*Windows 7* i novije verzije). Na temelju toga omogućava se rad i novim korisnicima.

Ovaj zanimljiv i koristan program se relativno jednostavno može instalirati na bilo koje osobno računalo. Početni korak je njegovo preuzimanje na računalo. Program je besplatno dostupan na internetskoj stranici *https://sourceforge.net/projects/lipside*. Programska datoteka na ovoj adresi je dostupna u komprimiranom obliku pa je, nakon preuzimanja, program potrebno „raspakirati“ u odgovarajuću mapu (vidjeti Sliku 1.). Radi jednostavnosti korištenja programa, obično se napravi prečac na radnoj površini računala (*desktop*) koji omogućuje pokretanje programa izravno s radne površine.

Slika 1. Mapa nastala raspakiranjem komprimirane datoteke programa.

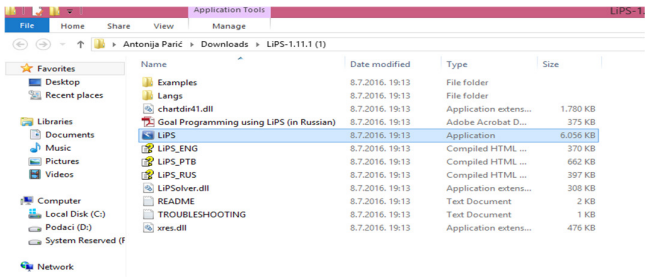
Linear Program Solver.



Izvor: autor

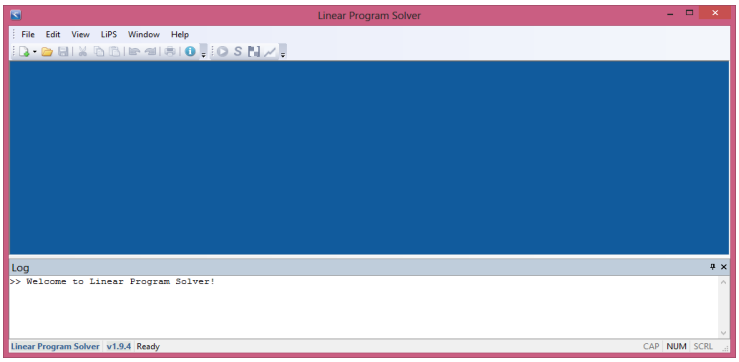
Klikom na datoteku *LiPS* pokreće se program *Linear Program Solver* (vidjeti Slike 2. i 3.):

Slika 2. Pokretanje programa *Linear Program Solver*.



Izvor: autor

Slika 3. Korisničko sučelje programa *Linear Program Solver*.



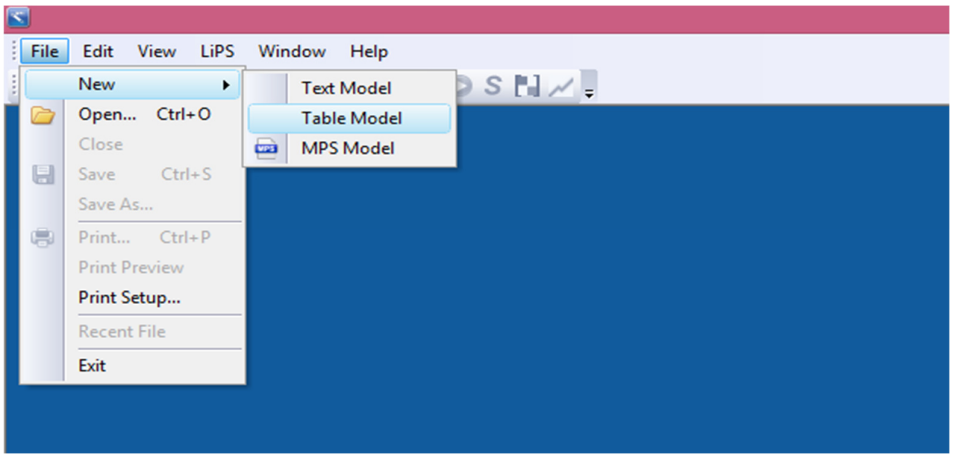
Izvor: autor

U korisničkom sučelju nalazi se nekoliko izbornika. To su: *File*, *Edit*, *View*, *LiPS*, *Window* i *Help*. Ukratko će se opisati svaki od njih.

Izbornik *File* omogućuje rad s datotekama. Unutar izbornika postoje sljedeće opcije (vidjeti Sliku 4.):

- *New* namijenjena određivanju oblika zapisa modela. Taj zapis može biti tablični, tekstualni i MPS (koji označava matematičko programiranje sustava). U ovom radu koristit će se tablični oblik zapisa modela.
- *Open* namijenjena otvaranju različitih datoteka programa *Linear Program Solver* pohranjenih na računalu (datoteke s ekstenzijom *lpx*). Te datoteke obično su ranije pohranjeni matematički modeli.
- *Save* namijenjena pohrani aktivne datoteke na računalo.
- *Print* i *Print Setup* namijenjene različitim vrstama ispisa programskih datoteka (vidjeti Sliku 4.)

Slika 4. Izbornik *File*.

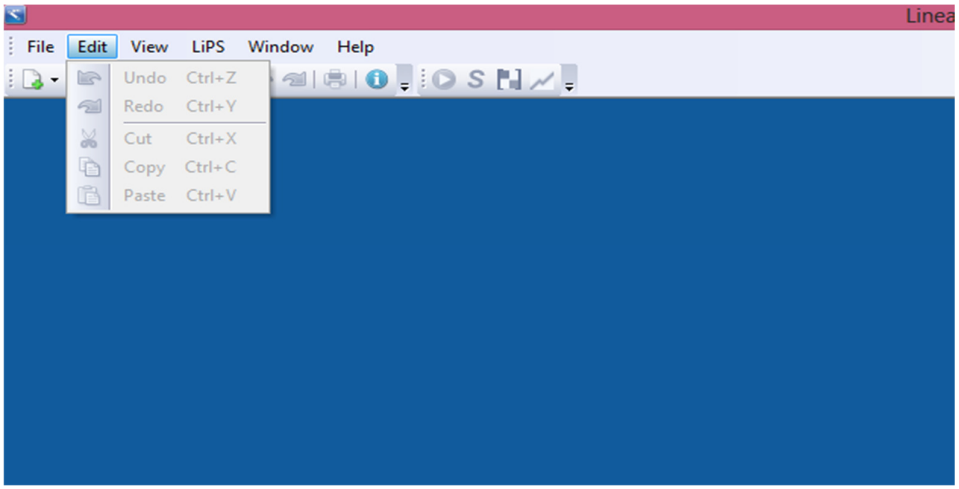


Izvor: autor

Izbornik *Edit* omogućuje uređivanje datoteke koja predstavlja matematički model. Unutar ovog izbornika postoje sljedeće opcije (vidjeti Sliku 5.):

- *Undo* namijenjena poništavanju posljednje učinjene akcije u programu.
- *Redo* namijenjena ponovnom izvršavanju akcije poništene opcijom *Undo*.
- *Copy* namijenjena kopiranju određenih podataka, pri čemu se ti podaci pohranjuju u međuspremnik.
- *Paste* namijenjena „lijepljenju“ podatka pohranjenoga u međuspremniku na određeno mjesto u datoteci.
- *Cut* namijenjena brisanju podataka označenih u datoteci.

Slika 5. Izbornik *Edit*.

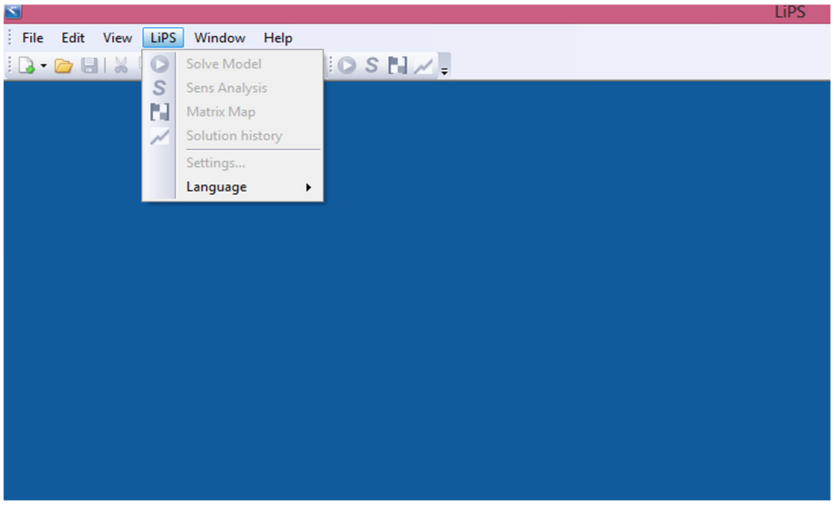


Izvor: autor

Izbornik *LiPS* je zapravo najvažniji izbornik cijeloga programa jer je namijenjen efektivnom rješavanju matematičkoga modela. Njegove najvažnije opcije su (vidjeti Sliku 6.):

- *Solve Model* namijenjena rješavanju postavljenoga modela. Klikom miša na ovu opciju dobiva se optimalno rješenje postavljenoga matematičkoga modela.
- *Sens Analysis* namijenjena analizi osjetljivosti optimalnoga rješenja matematičkoga modela.
- *Matrix Map* namijenjena vizualnom prikazu različitih struktura (najčešće „blokova“ koji tvore matematički model, a povezani su npr. istim tipom uvjeta). Takve se strukture dobiju algoritmima dekompozicije modela.
- *Solution History* namijenjena proučavanju mijenjanja različitih parametara modela tijekom serije različitih pokusa. To se proučavanje radi „vizualno“, odnosno koristeći različite vrste grafičkih prikaza podataka.
- *Settings* namijenjena podešavanju tehničkih postavki programa.
- *Language* namijenjena podešavanju jezika koji koristi sam program. U radu s programom koristit će se engleski jezik.

Slika 6. Izbornik *LiPS*.



Izvor: autor

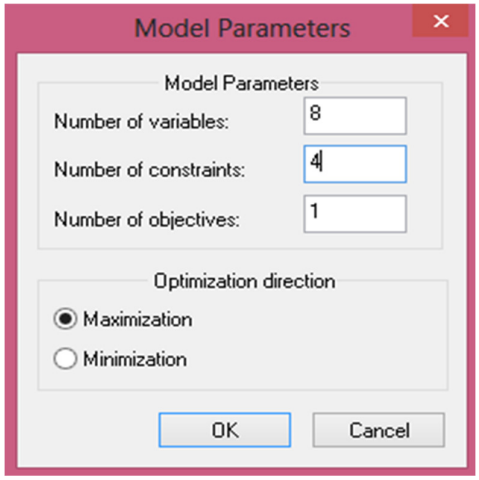
Od ostalih izbornika, spomenut će se izbornik *View* namijenjen uključivanju i isključivanju alatnih traka i prozora unutar samoga programa, te izbornik *Help* namijenjen dobivanju pomoći za rad sa programom.

Kako je već istaknuto, pri rješavanju matematičkog problema koristit će se tablični zapis. On se odabire klikom miša na sljedeće izbornike/opcije: *File - New - Table Model*.

Nakon otvaranja tabličnoga modela, potrebno je zadati osnovne parametre promatranoga matematičkoga modela. To su (vidjeti Sliku 7.):

- *Number of variables* (broj varijabli)
- *Number of constraints* (broj uvjeta)
- *Number of objectives* (broj funkcija cilja)
- *Optimization direction* (vrsta optimizacijskog problema, tj. je li riječ o problemu minimizacije ili problemu maksimizacije).

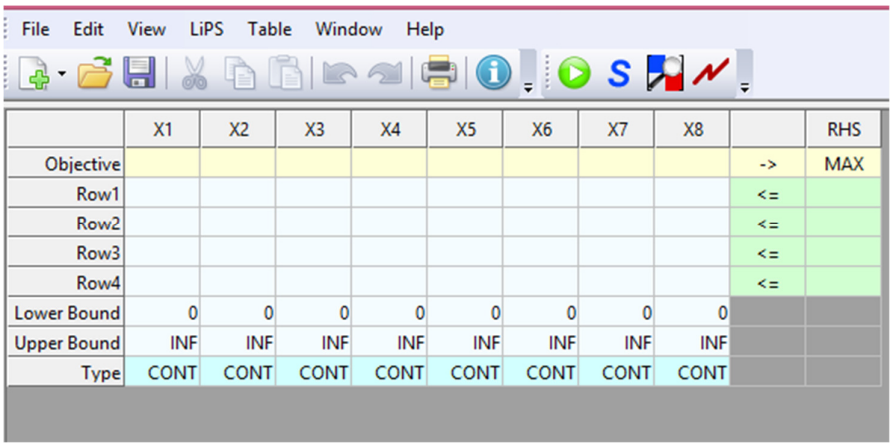
Slika 7. Unos osnovnih parametara modela u programu *Linear Program Solver*.



Izvor: autor

Nakon unosa potrebnih vrijednosti klikne se na *OK* i dobije se tablica kao na Slici 8.

Slika 8. Polazna tablica pri rješavanju matematičkoga modela.



	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8		RHS
Objective									->	MAX
Row1									<=	
Row2									<=	
Row3									<=	
Row4									<=	
Lower Bound	0	0	0	0	0	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF	INF	INF	INF	INF	INF		
Type	CONT	CONT	CONT	CONT	CONT	CONT	CONT	CONT		

Izvor: autor

Sve varijable modela inicijalno su označene s $X_1, X_2, \ldots$ Te nazive nije moguće mijenjati. Stupac *RHS* označava slobodne članove u ograničenjima (članove na desnim stranama nejednakosti).

U retku *Objective* upisuju se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. U presjek retka *Objective* i stupca X_i upisuje se koeficijent uz varijablu x_i u funkciji cilja. U presjeku retka *Objective* i stupca *RHS* upisana je kratica *MAX* jer je prigodom zadavanja osnovnih

parametara matematičkoga modela unutar dijela *Optimization direction* odabrana opcija *Maximization*. U slučajevima kad se odabere opcija *Minimization*, u presjeku retka *Objective* i stupca *RHS* bit će upisana kratica *MIN*.

U retku *Row*1 zadaje se prvo ograničenje. U presjek retka *Row*1 i stupca X_i upisuje se koeficijent uz varijablu x_i u prvom ograničenju. U presjek retka *Row*1 i stupca *RHS* upisuje se koeficijent na desnoj strani nejednakosti koja zadaje prvo ograničenje. Znak nejednakosti moguće je promijeniti jednostrukim klikom desne tipke miša na znak <= i odabirom odgovarajućega znaka nejednakosti na pripadnom padajućem izborniku.

Postupak analogan za redak *Row*1 ponavlja se i u recima *Row*2, *Row*3, ….

U retku *Lower Bound* upisuju se najmanje dozvoljene vrijednosti svake pojedine varijable modela. Početna (pretpostavljena) najmanja dozvoljena vrijednost svake varijable jednaka je nuli jer se pretpostavlja da vrijede ranije spomenuti prirodni uvjeti na vrijednosti varijabli modela. Međutim, moguće je da polazna najmanja dozvoljena vrijednost neke varijable modela bude različita od nule, pa je u tom slučaju potrebno u presjek retka *Lower Bound* i odgovarajućega stupca upisati dotičnu vrijednost.

U retku *Upper Bound* upisuju se najveće polazne vrijednosti svake pojedine varijable modela. Početna (pretpostavljena) najveća vrijednost svake varijable modela jednaka je *INF*, što teorijski znači da svaka varijabla može poprimiti proizvoljno veliku strogo pozitivnu vrijednost. Međutim, moguće je da polazna najveća dozvoljena vrijednost neke varijable modela bude unaprijed zadana, pa je u tom slučaju potrebno u presjek retka *Upper Bound* i odgovarajućega stupca upisati dotičnu vrijednost.

U retku *Type* naveden je tip svake pojedine varijable. Polazni (pretpostavljeni) tip svake varijable je *CONT*, što znači da vrijednost dotične varijable može biti bilo koji strogo pozitivan realan broj. Međutim, vrlo često sama priroda problema nalaže da vrijednosti varijabli moraju biti cijeli brojevi (npr. ako se optimizira broj radnika, broj proizvedenih proizvoda i sl.) U takvim je slučajevima potrebno promijeniti tip varijabli u *INT* klikom na natpis *CONT* i odabirom opcije *INT* u dobivenom padajućem izborniku. Drugi tipovi varijabli (binarne i sl.) nisu obuhvaćeni ovim programom.

Ovi postupci bit će zajednički u svakom razmatranom primjeru u sljedećem poglavlju, pa se u daljnjem tekstu samo navoditi bez detaljnijega opisa.

4. PRIMJERI PRIMJENE RAČUNALNOGA PROGRAMA LINEAR PROGRAM SOLVER NA RJEŠAVANJE PROBLEMA PLANIRANJA PROIZVODNJE

4.1. Primjer 1.[1]

U završnoj fazi proizvodnje nekoga proizvoda proizvode se tri njegova sastavna dijela. Te dijelove proizvode dva pogona tvornice. Osnovni podaci navedeni su u Tablici 1.

Odjel	*Proizvodnja* 1. *dijela* (komada/sat)	*Proizvodnja* 2. *dijela* (komada/sat)	*Proizvodnja* 3. *dijela* (komada/sat)	*Trošak proizvodnje* [kn/sat]
1	7	6	9	30
2	6	11	5	16

Tablica 1. Ulazni podaci za Primjer 1.

U jednom radnom tjednu može se proizvesti između 1050 i 1200 proizvoda. Odjel 1 na raspolaganju ima najviše 100 radnih sati tjedno, a odjel 2 110 radnih sati tjedno. Zbog ograničene veličine skladišta, na kraju tjedna u skladištu se može pohraniti najviše 350 dijelova proizvoda.

Treba napraviti optimalan tjedni plan proizvodnje tako da troškovi proizvodnje budu što manji. Pritom se u jednom radnom satu na svakom odjelu moraju proizvoditi sva tri dijela proizvoda, tj. nije moguće proizvoditi samo dio 1, samo dio 2 itd.

a) Formulirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*. Interpretirati svaku komponentu optimalnoga rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Izračunati pripadni optimalan broj komada proizvoda koji će na kraju tjedna biti pohranjen u skladištu.

[1] Prilagođeno prema Beasley (n.d.)

Rješenje:

Neka su:

x_1 – ukupan broj sati koje će odraditi Odjel 1,

x_2 – ukupan broj sati koje će odraditi Odjel 2,

x_3 – ukupan broj gotovih proizvoda.

Odjel 1 raspolaže sa najviše 100 radnih sati, a Odjel 2 sa najviše 110 radnih sati. Prema zahtjevu zadatka, broj radnih sati u svakom odjelu treba biti pozitivan cijeli broj. Iz ovih uvjeta dobiju se sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} &0 \le x_1 \le 100, \\ &0 \le x_2 \le 110, \\ &x_1, x_2 \in \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}. \end{aligned}$$

Iz zahtjeva da treba proizvesti najmanje 1050 proizvoda, a najviše 1200 proizvoda, dobiva se nejednakost:

$$1050 \le x_3 \le 1200.$$

I ukupan broj proizvedenih proizvoda mora biti prirodan broj, pa dodajemo uvjet:

$$x_3 \in \mathbb{N}.$$

U Odjelu 1 proizvodi se $7 \cdot x_1$ komada prvoga dijela, $6 \cdot x_1$ komada drugoga dijela i $9 \cdot x_1$ komada trećega dijela.

U Odjelu 2 proizvodi se $6 \cdot x_2$ komada prvoga dijela, $11 \cdot x_2$ komada drugoga dijela i $5 \cdot x_2$ komada trećega dijela.

Ukupan broj proizvedenih komada prvoga dijela jednak je $7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2$, ukupan broj proizvedenih komada drugoga dijela $6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2$, a ukupan broj proizvedenih komada trećega dijela $9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$.

Da bi se dobilo barem x_3 komada proizvoda, mora se proizvesti ukupno barem x_3 komada prvoga dijela, barem x_3 komada drugoga dijela i barem x_3 komada trećega dijela. Tako se dobiju uvjeti:

$$\begin{aligned} 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 &\geq x_3, \\ 6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 &\geq x_3, \\ 9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 &\geq x_3. \end{aligned}$$

Ovi uvjeti se mogu zapisati u ekvivalentnom obliku:

$$\begin{aligned} 7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 &\geq 0, \\ 6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 - x_3 &\geq 0, \\ 9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 &\geq 0. \end{aligned}$$

Ukupan broj svih proizvedenih dijelova jednak je:

$$(7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2) + (6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2) + (9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2) = 22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 .$$

Od tih dijelova, za proizvodnju x_3 komada proizvoda potrošit će se x_3 komada prvoga dijela, x_3 komada drugoga dijela i x_3 komada trećega dijela. Zbog toga je ukupan broj svih preostalih dijelova jednak:

$$22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - x_3 - x_3 - x_3 = 22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 .$$

Ta vrijednost ne smije biti strogo veća od kapaciteta skladišta, što znači da mora vrijediti jednakost:

$$22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \leq 350.$$

Ukupan tjedni trošak rada Odjela 1 iznosi $30 \cdot x_1$ kuna, a ukupan tjedni trošak rada Odjela iznosi $16 \cdot x_2$ kuna. Dakle, ukupan tjedni trošak rada oba odjela iznosi:

$$30 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \text{ kn.}$$

Prema zahtjevu zadatka, taj trošak je potrebno minimizirati.

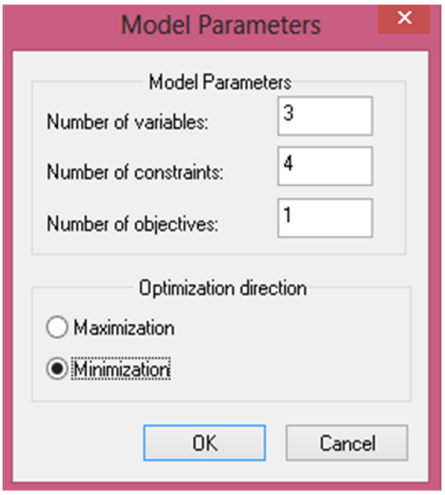
Tako je dobiven sljedeći matematički model:

$$
\begin{aligned}
&\min.\ z = 30 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&7 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 - x_3 \geq 0, \\
&6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 - x_3 \geq 0, \\
&9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 \geq 0, \\
&22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \leq 350, \\
&0 \leq x_1 \leq 100, \\
&0 \leq x_2 \leq 110, \\
&1050 \leq x_3 \leq 1200, \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Nakon postavljenog matematičkog problema otvara se *Linear Program Solver* i odabire se opcija *File-New-Table model*. Zatim se upisuju sljedeći podaci:

- broj varijabli: 3
- broj uvjeta: 4
- klikne se na kružić *Minimization* zbog minimiziranja troškova
- klikne se na *OK* (vidjeti Sliku 9.)

Slika 9. Unos podataka matematičkoga modela u Primjeru 1.



Izvor: autor

U dobivenu tablicu se upisuje:

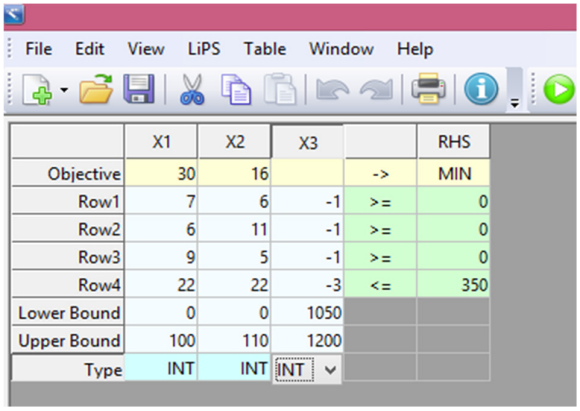
- u redak *Objective*: 30 i 16
- u redak *Row*1: 7, 6, -1
- u redak *Row*2: 6, 11, -1
- u redak *Row*3: 9, 5, -1
- u redak *Row*4: 22, 22, -3
- u redak *Lower Bound*: 0, 0, 1050
- u redak *Upper Bound*:100, 110, 1200 (vidjeti Sliku 10.)

Znakovi u recima *Row*1, *Row*2 i *Row*3 mijenjaju se dvostrukim klikom miša na znak ≤ i odabirom znaka ≥ u dobivenom padajućem izborniku. U retku *Row*4 nije potrebno mijenjati znak nejednakosti.

Vrijednost pojedine varijable mora biti cijeli broj, pa je u retku *Type* potrebno kliknuti lijevom tipkom miša na svaki od natpisa *CONT* i u dobivenom padajućem izborniku odabrati opciju *INT*.

Tako se dobije tablica prikazana na Slici 10. Klikom na *File – Save as…*, ta se tablica pohrani na računalu pod nazivom *Primjer*1.*lpx*.

Slika 10. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 1.



Izvor: autor

Klikne se na izbornik *LiPS* i odabere opcija *Solve model*. (Alternativno se može kliknuti na strelicu u zelenom kružiću gore desno od natpisa *RHS*.) Dobije se tablica s optimalnim vrijednostima prikazana na Slici 11.

Slika 11.Tablica s optimalnim vrijednostima varijabli u Primjeru 1.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Minimum = 3888
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	96	30	YES
X2	63	16	YES
X3	1050	0	YES

Izvor: autor

Dakle, optimalno rješenje problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (96, 63, 1050)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja je $z^* = 3888$ kn.

Zaključuje se da je optimalan tjedni plan proizvodnje:

- Odjel 1 treba raditi 96 radnih sati, a Odjel 2 63 radna sata.

Ukupan broj proizvedenih proizvoda iznosi 1050.

Preostaje izračunati koliko će proizvoda na kraju tjedna ostati u skladištu. Prema prethodnim razmatranjima, njihov je broj jednak

$$22 \cdot x_1^* + 22 \cdot x_2^* - 3 \cdot x_3^* = 22 \cdot 96 + 22 \cdot 63 - 3 \cdot 1050 = 348.$$

Na kraju tjedna u skladištu će biti pohranjeno 348 proizvoda.

4.2. Primjer 2.

Uprava tvornice iz Primjera 1. odlučila je optimizirati proizvodnju nadogradnjom skladišta i povećanjem njegova kapaciteta. Predviđeno je da se time na kraju svakoga tjedna u skladištu može pohraniti najviše 500 komada proizvoda.

a) Formirati novi matematički model i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*.

b) Izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake varijable i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja. Zaokružiti dobivene rezultate na najbliže cijele brojeve.

Rješenje:

U matematičkom modelu dobivenom u rješenju Primjera 1. mijenja se jedino uvjet koji se odnosi na ukupan broj svih dijelova koji na kraju tjedna mogu biti pohranjeni u skladištu. Kapacitet skladišta je povećan s 350 na 500 komada svih dijelova, pa izmijenjeni uvjet glasi:

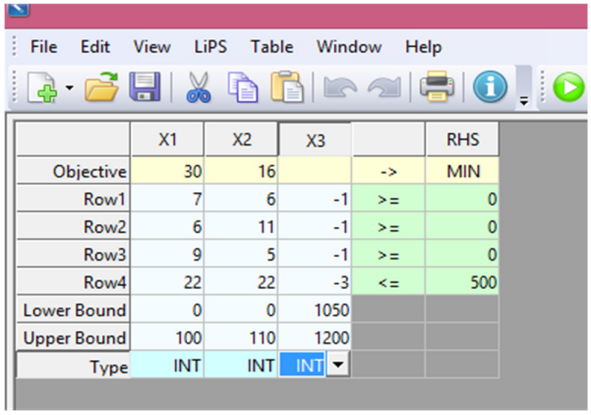
$$22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \leq 500.$$

Dakle, matematički model ovoga problema je:

$$\begin{aligned}
&\min.\ z = 30 \cdot x_1 + 16 \cdot x_2 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&7 \cdot x_1 + 6x_2 - x_3 \geq 0, \\
&6 \cdot x_1 + 11 \cdot x_2 - x_3 \geq 0, \\
&9 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - x_3 \geq 0, \\
&22 \cdot x_1 + 22 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 \leq 500, \\
&0 \leq x_1 \leq 100, \\
&0 \leq x_2 \leq 110, \\
&1050 \leq x_3 \leq 1200, \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}
\end{aligned}$$

Tablični zapis matematičkoga modela iz prethodnog primjera otvara se pomoću opcije *Open…* i odabirom datoteke *Primjer*1.*lpx*. Potom se u presjeku četvrtoga retka i stupca *RHS* umjesto 350 upisuje 500. Tako se dobije tablica prikazana na Slici 12.

Slika 12. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 2.



File Edit View LiPS Table Window Help

	X1	X2	X3		RHS
Objective	30	16		->	MIN
Row1	7	6	-1	>=	0
Row2	6	11	-1	>=	0
Row3	9	5	-1	>=	0
Row4	22	22	-3	<=	500
Lower Bound	0	0	1050		
Upper Bound	100	110	1200		
Type	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom na *Solve* rješava se postavljeni matematički model. Dobije se tablica prikazana na Slici 13.

Slika 13. Tablica s optimalnim vrijednostima u Primjeru 2.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Minimum = 3440
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	56	30	YES
X2	110	16	YES
X3	1052	0	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog matematičkog problema je: $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (56,110,1052)$, a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 3440$ kn. Novi optimalan tjedni plan proizvodnje je:

- Odjel 1 treba raditi 56 radnih sati, a Odjel 2 110 radnih sati tjedno.

Ukupan broj proizvedenih proizvoda iznosi 1052.

Na kraju tjedna u skladištu će biti pohranjeno ukupno:

$$22 \cdot x_1^* + 22 \cdot x_2^* - 3 \cdot x_3^* = 22 \cdot 56 + 22 \cdot 110 - 3 \cdot 1052 = 496 \text{ proizvoda.}$$

U nastavku se računaju relativne promjene optimalne vrijednosti svake pojedine varijable, odnosno funkcije cilja. Relativne promjene optimalnih vrijednosti varijabli x_1, x_2 i x_3 iznose:

$$r_1 = \frac{56-96}{96} = -\frac{40}{96} = -\frac{5}{12} \approx -0.41667 \approx -42\%,$$
$$r_2 = \frac{110-63}{63} = \frac{47}{63} \approx 0.74603 \approx 75\%,$$
$$r_3 = \frac{1052-1050}{1050} = \frac{1}{525} \approx 0.0019 \approx 0.1\%,$$

dok relativna promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja iznosi

$$r_4 = \frac{3440-3888}{3888} = -\frac{448}{3888} = -\frac{28}{243} \approx -0.11523 \approx -12\%.$$

Zaključuje se da se optimalan ukupan broj radnih sati Odjela 1. smanjio za 42%, optimalan ukupan broj radnih sati Odjela 2. povećao za 75% i dosegao gornju granicu raspoloživoga broja radnih sati za taj odjel, dok su se optimalni ukupni troškovi smanjili za 12%. Optimalna ukupna proizvodnja se povećala u zanemarivom postotku.

4.3. Primjer 3.[2]

Tvornica proizvodi amonijak i amonijev klorid. Na raspolaganju ima 50 jedinica dušika, 180 jedinica vodika i 40 jedinica klora. Za proizvodnju svake jedinice amonijaka potrebne su jedna jedinica dušika i tri jedinice vodika. Za proizvodnju svake jedinice amonijeva klorida potrebne su jedna jedinica dušika, četiri jedinice vodika i jedna jedinica klora.

Cijena jedne jedinice amonijaka iznosi 40 €, a jedne jedinice amonijeva klorida 50 €. Treba napraviti optimalan plan proizvodnje tako da ukupna zarada nastala prodajom amonijaka i amonijeva klorida bude što veća. Pritom broj jedinica svakoga proizvoda mora biti cijeli broj.

a) Formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*. Interpretirati svaku komponentu optimalnoga rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Utvrditi hoće li optimalnim planom proizvodnje biti potrošene sve raspoložive količine svakoga sastojka. Obrazložiti odgovore.

Rješenje:

Neka su:

x_1 - ukupan broj jedinica amonijaka;

x_2 - ukupan broj jedinica amonijeva klorida.

U x_1 jedinica amonijaka ima ukupno x_1 jedinica dušika. U x_2 jedinica amonijeva klorida ima ukupno x_2 jedinica dušika. Stoga je ukupan broj jedinica dušika u obama proizvodima jednak $x_1 + x_2$. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupnoga broja raspoloživih jedinica dušika, pa se dobije uvjet:

$$x_1 + x_2 \leq 50 .$$

[2] Prilagođeno prema IBM (n.d.)

U x_1 jedinica amonijaka ima ukupno $3 \cdot x_1$ jedinica vodika. U x_2 jedinica amonijeva klorida ima ukupno $4 \cdot x_2$ jedinica vodika. Stoga je ukupan broj jedinica vodika u obama proizvodima jednak $3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupnoga broja raspoloživih jedinica vodika, pa se dobije uvjet:

$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180 .$$

U x_1 jedinica amonijaka nema nijedne jedinice klora. U x_2 jedinica amonijeva klorida ima ukupno x_2 jedinica vodika. Stoga je ukupan broj jedinica klora u obama proizvodima jednak x_2. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupnoga broja raspoloživih jedinica klora, pa se dobije uvjet:

$$x_2 \leq 40 .$$

Cijena x_1 jedinica amonijaka iznosi $40 \cdot x_1$ €. Cijena x_2 jedinica amonijeva klorida iznosi $50 \cdot x_2$ €. Stoga ukupna zarada nastala prodajom obaju proizvoda iznosi $40 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2$ €. Taj iznos treba maksimizirati.

Dodatno se postavlja zahtjev da brojevi jedinica amonijaka i amonijeva klorida moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga mora vrijediti uvjet:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N} .$$

Tako se dobije sljedeći matematički model:

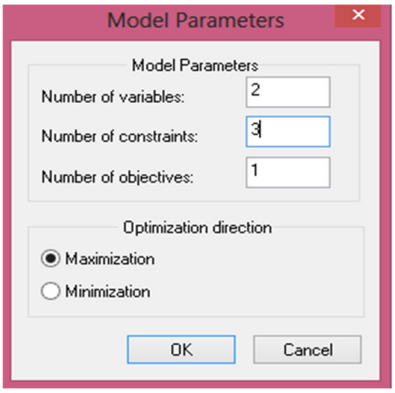
$$\begin{aligned}
&\max .\ z = 40 \cdot x_1 + 50 \cdot x_2 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&x_1 + x_2 \leq 50, \\
&3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180, \\
&x_2 \leq 40, \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pokrene se program *Linear Program Solver* i odabire se *File-New-Table model*. Zatim se upisuju sljedeći podaci:

- broj varijabli: 2
- broj uvjeta: 3

- klikne se na kružić *Maximization* jer je cilj maksimizirati dobit;
- klikne se na *OK* (vidjeti Sliku 14.)

Slika 14. Unos podataka matematičkog modela u Primjeru 3.



Izvor: autor

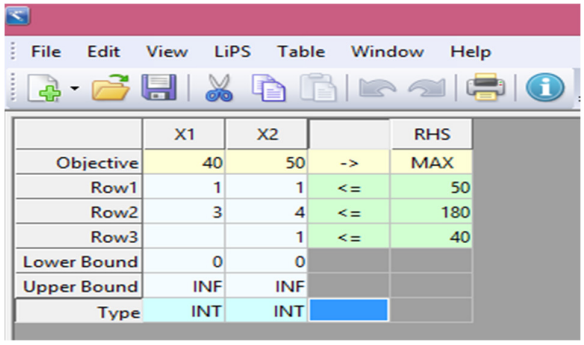
Nakon što se otvori tablica u kojoj će se upisivati koeficijenti matematičkoga modela, potrebno je opet obratiti pozornost na promjene znakova nejednakosti, kao i na promjene tipa varijabli iz *CONT* u *INT* jer optimalne vrijednosti varijabli moraju biti cijeli brojevi. Te promjene izvode se na način opisan u rješenju Primjera 1.

U dobivenu tablicu se upisuje:

- u redak *Objective*: 40 i 50
- u redak *Row*1: 1, 1
- u redak *Row*2: 3, 4
- u redak *Row*3: 0, 1

Nakon unosa podataka dobije se tablica prikazana na Slici 15. Ta tablica pohrani se pod nazivom *Primjer*3.*lpx*.

Slika 15. Tablica s upisanim podacima iz Primjera 3.



	X1	X2		RHS
Objective	40	50	->	MAX
Row1	1	1	<=	50
Row2	3	4	<=	180
Row3		1	<=	40
Lower Bound	0	0		
Upper Bound	INF	INF		
Type	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom na *Solve* dobije se tablica prikazana na Slici 16.

Slika 16. Tablica s optimalnim vrijednostima u Primjeru 3.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 2300
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	20	40	YES
X2	30	50	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje je: $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (20, 30)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 2300$. Dakle, optimalan plan proizvodnje je:

- Treba proizvesti 20 jedinica amonijaka i 30 jedinica amonijeva klorida.

Optimalna ukupna zarada iznosi 2300 €.

Preostaje odrediti hoće li optimalnim planom proizvodnje biti potrošene sve raspoložive količine svakoga sastojka.

Ukupan broj utrošenih jedinica dušika jednak je $20 + 30 = 50$, a toliko jedinica dušika je na raspolaganju. Dakle, bit će potrošene sve raspoložive jedinice dušika.

Ukupan broj utrošenih jedinica vodika jednak je $3 \cdot 20 + 4 \cdot 30 = 60 + 120 = 180$, a toliko jedinica vodika je na raspolaganju. Dakle, bit će potrošene sve raspoložive jedinice vodika.

Ukupan broj utrošenih jedinica klora jednak je 30. Na raspolaganju je 40 jedinica klora. Dakle, neće biti potrošene sve raspoložive jedinice klora, nego će preostati ukupno $40 - 30 = 10$ jedinica klora.

4.4. Primjer 4.

Zbog ekonomske krize i pada prodaje, uprava tvornice iz prethodnoga zadatka prisiljena je sniziti prodajnu cijenu amonijaka i prodajnu cijenu amonijeva klorida za 10%.

a) Formirati novi matematički model i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*.

b) Izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake varijable i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja. Zaokružiti dobivene rezultate na najbliže cijele brojeve.

Rješenje:

Cijena amonijaka je iznosila 40 €, a cijena amonijeva klorida 50 €. Treba izračunati nove prodajne cijene tih proizvoda nakon sniženja od 10%:

$$p_1 = 40 - \frac{10}{100} \cdot 40 = 40 - 4 = 36 \text{ €},$$
$$p_2 = 50 - \frac{10}{100} \cdot 50 = 50 - 5 = 45 \text{ €}.$$

U matematičkom modelu iz Primjera 3. potrebno je promijeniti samo funkciju cilja. Dobije se sljedeći model:

$$\max.\ z = 36 \cdot x_1 + 45 \cdot x_2$$
pod uvjetima
$$x_1 + x_2 \leq 50,$$
$$3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 180,$$
$$x_2 \leq 40,$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$

Tablicu matematičkog problema iz prethodnog zadatka otvara se pomoću opcije *Open…* Odabirom pripadajuće tablice izmjene se podaci u retku *Objective*. Umjesto 40 potrebno je upisati 36, a umjesto 50 potrebno je upisati 45. Tako se dobije tablica prikazana na Slici 17.

Slika 17. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 4.

	X1	X2		RHS
Objective	36	45	->	MAX
Row1	1	1	<=	50
Row2	3	4	<=	180
Row3		1	<=	40
Lower Bound	0	0		
Upper Bound	INF	INF		
Type	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom na *Solve* rješava se postavljeni matematički model. Dobije se tablica prikazana na Slici 18.

Slika 18. Tablica s optimalnim vrijednostima u Primjeru 4.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 2070
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	20	36	YES
X2	30	45	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje je: $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (20, 30)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja je $z^* = 2070$. Zaključuje se da optimalan plan proizvodnje ostaje nepromijenjen:

- Treba proizvesti 20 jedinica amonijaka i 30 jedinica amonijeva klorida.

Nova optimalna ukupna zarada iznosi 2070 kn.

Pripadna relativna promjena optimalne ukupne zarade iznosi:

$$r_1 = \frac{2070 - 2300}{2300} = -\frac{230}{2300} = -\frac{1}{10} = -0.1 = -10\%,$$

pa slijedi da se optimalna ukupna zarada smanjila za 10%.

4.5. Primjer 5.[3]

Tvornica proizvodi stolove i stolice koristeći dva oblika drvne građe: G_1 i G_2. Na raspolaganju ima 30 komada građe G_1 i 40 komada građe G_2. Za izradu jednoga stola potrebna su po dva komada svake vrste građe. Za izradu jedne stolice potrebni su jedan komad građe G_1 i dva komada građe G_2.

Cijena jednoga stola iznosi 150 kn, a jedne stolice 100 kn.

Potrebno je napraviti optimalan plan proizvodnje tako da ukupna zarada nastala prodajom obaju proizvoda bude što veća.

a) Formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*. Interpretirati svaku komponentu optimalnoga rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Utvrditi hoće li optimalnim planom proizvodnje biti potrošene sve raspoložive količine svake vrste građe. Obrazložiti odgovore.

[3] Prilagođeno prema Hillier (n.d.)

Rješenje:

Neka su:

x_1 – broj proizvedenih stolova,

x_2 – broj proizvedenih stolica.

Za izradu jednoga stola potrebna su po dva komada građe G_1 i građe G_2. To znači da su za izradu x_1 stolova potrebni $2 \cdot x_1$ komada grade G_1 i $2 \cdot x_1$ komada građe G_2.

Za izradu jedne stolice potreban je jedan komad građe G_1 i dva komada građe G_2. To znači da su za izradu x_2 stolica potrebni x_2 komada grade G_1 i $2 \cdot x_2$ komada građe G_2.

Ukupan utrošeni broj komada građe G_1 iznosi $2 \cdot x_1 + x_2$. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupno raspoloživoga broja komada te građe, pa se dobiva uvjet:

$$2 \cdot x_1 + x_2 \leq 30.$$

Ukupan utrošeni broj komada građe G_2 iznosi $2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2$. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupno raspoloživoga broja komada te građe, pa se dobiva uvjet:

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40.$$

Cijena jednoga stola iznosi 150 kn, pa cijena x_1 stolova iznosi $150 \cdot x_1$ kn. Cijena jedne stolice iznosi 100 kn, pa cijena x_2 stolica iznosi $100 \cdot x_2$ kn. Dakle, ukupna cijena svih proizvedenih stolova i stolica iznosi $150 \cdot x_1 + 100 \cdot x_2$ kn. Prema zahtjevu zadatka, tu zaradu je potrebno maksimizirati.

Preostaje dodati prirodan uvjet da broj stolova i broj stolica moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Taj uvjet se zapisuje u obliku:

$$x_1, x_2 \in \mathbb{N}.$$

Tako je dobiven sljedeći matematički model:

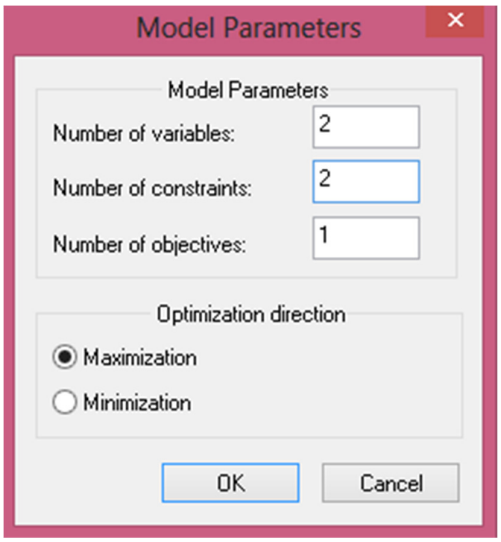
$$
\begin{aligned}
&\max.\ z = 165 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&2 \cdot x_1 + x_2 \leq 30, \\
&2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40, \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Nakon postavljenog matematičkog problema otvara se *Linear Program Solver* i odabire se opcija *File- New-Table model*. Zatim se upisuju sljedeći podaci:

- broj varijabli: 2
- broj uvjeta: 2
- klikne se na kružić *Maximization* jer je cilj maksimizirati dobit;
- klikne se na *OK* (vidjeti Sliku 19.)

Tako se dobije tablica u koju se upisuju koeficijenti u modelu. Pri njezinu popunjavanju je potrebno ponovno obratiti pozornost na promjene znakova nejednakosti, kao i na promjenu tipa varijabli *CONT* u *INT* jer vrijednosti svih varijabli modela moraju biti cijeli brojevi.

Slika 19. Unos podataka matematičkoga modela u Primjeru 5.



Izvor: autor

U dobivenu tablicu se upisuje:

- u redak *Objective*: 150 i 100,

- u redak *Row*1: 2, 2,
- u redak *Row*2: 2, 1

Nakon unosa podataka dobije se tablica prikazana na Slici 20. Tablica se pohrani pod nazivom *Primjer 5.lpx.*

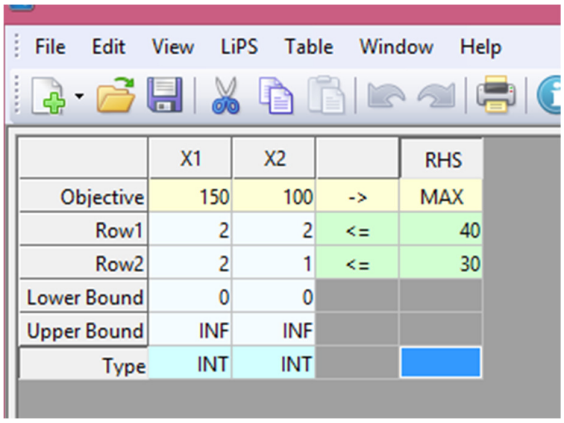
Klikom na *Solve* dobije se tablica prikazana na Slici 21. Iz nje se zaključuje da je optimalno rješenje problema $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (10,10)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 2500$.

Dakle, optimalan plan proizvodnje glasi:

- Treba proizvesti 10 stolova i 10 stolica.

Optimalna ukupna zarada iznosi 2500 kn.

Slika 20. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 5.



	X1	X2		RHS
Objective	150	100	->	MAX
Row1	2	2	<=	40
Row2	2	1	<=	30
Lower Bound	0	0		
Upper Bound	INF	INF		
Type	INT	INT		

Izvor: autor

Slika 21. Tablica s optimalnim vrijednostima u Primjeru 5.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 2500
```

*** RESULTS ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	10	150	YES
X2	10	100	YES

Izvor: autor

Preostaje utvrditi hoće li optimalnim planom proizvodnje biti utrošene sve raspoložive količine svake vrste građe. Ukupan broj potrošenih komada građe G_1 iznosi:

$$2 \cdot 10 + 10 = 20 + 10 = 30,$$

a upravo toliko komada građe G_1 je raspoloživo. Analogno, ukupan broj potrošenih komada građe G_2 iznosi:

$$2 \cdot 10 + 2 \cdot 10 = 20 + 20 = 40,$$

a upravo toliko komada građe G_2 je raspoloživo.

Dakle, optimalnim planom proizvodnje bit će utrošene sve raspoložive količine obiju vrsta građe.

4.6. Primjer 6.

Zbog izvrsne prodaje stolova i stolica, uprava tvornice iz prethodnoga zadatka donijela je odluku da se jedinična cijena stola, odnosno stolice poveća za 10%.

a) Formirati novi matematički model i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*.

b) Izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake varijable i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja. Zaokružiti dobivene rezultate na najbliže cijele brojeve.

Rješenje:

Najprije treba izračunati nove jedinične cijene stola, odnosno stolice. Nakon povećanja od 10%, cijena jednoga stola iznosi:

$$p_1 = 150 + \frac{10}{100} \cdot 150 = 150 + 15 = 165 \text{ kn}.$$

Analogno, nakon povećanja od 10%, cijena jedne stolice iznosi:

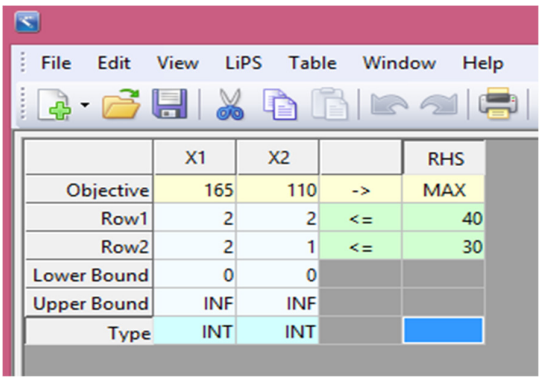
$$p_2 = 100 + \frac{10}{100} \cdot 100 = 100 + 10 = 110 \text{ kn}.$$

U matematičkom modelu dobivenom u prethodnom primjeru treba promijeniti jedino funkciju cilja. Tako se dobiva novi matematički model:

$$
\begin{aligned}
&\max.\ z = 165 \cdot x_1 + 110 \cdot x_2 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&2 \cdot x_1 + x_2 \leq 30, \\
&2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 40, \\
&x_1, x_2 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Datoteka s tabličnim zapisom matematičkoga modela iz prethodnoga primjera otvara se opcijom *Open...* i odabirom datoteke *Primjer*5.*lpx*. U toj je tablici potrebno promijeniti koeficijente upisane u retku *Objective*. Umjesto 150 upisuje se 165, a umjesto 100 upisuje se 110. Dobije se tablica prikazana na Slici 22.

Slika 22. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 6.



	X1	X2		RHS
Objective	165	110	->	MAX
Row1	2	2	<=	40
Row2	2	1	<=	30
Lower Bound	0	0		
Upper Bound	INF	INF		
Type	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom na opciju *Solve* rješava se postavljeni matematički model. Dobije se tablica prikazana na Slici 23.

Slika 23. Tablica s optimalnim vrijednostima u Primjeru 6.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 2750
```

*** RESULTS ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	10	165	YES
X2	10	110	YES

Izvor : autor

Optimalno rješenje je: $\left(x_1^*, x_2^*\right) = (10,10)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 2750$. Zaključuje se da optimalan plan proizvodnje ostaje nepromijenjen, tj.:

- Treba proizvesti 10 komada stolova i 10 komada stolica.

Optimalna ukupna zarada iznosi 2750 kn.

U odnosu na optimalnu ukupnu zaradu iz Primjera 5., pripadna relativna promjena iznosi

$$r = \frac{2750 - 2500}{2500} = \frac{250}{2500} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\% .$$

Dakle, optimalna ukupna zarada se povećala za 10%.

4.7. Primjer 7.[4]

Tvornica automobila proizvodi tri marke automobila: A_1, A_2 i A_3. Za sastavljanje jednoga automobila marke A_1 potrebna je jedna minuta, za sastavljanje jednoga automobila marke A_2 potrebne su dvije minute, a za sastavljanje jednoga automobila marke A_3 potrebne su tri minute.

S jednom litrom benzina u spremniku vozilo A_1 može prijeći 10 km, vozilo A_2 6 km, a vozilo A_3 4 km. Propisi EU propisuju da svako vozilo s jednom litrom benzina mora prijeći prosječno najmanje 7.5 km.

Prodajom jednoga automobila marke A_1 tvornica ostvaruje gubitak od 1000 €, dok prodajom jednoga automobila svake od ostalih dviju marki ostvaruje zarade od redom 5000 € i 15 000 €.

Treba napraviti optimalan dnevni plan proizvodnje svih triju marki automobila tako da ukupna zarada nastala prodajom svih triju vrsta automobila bude što veća. Pritom pretpostavljamo da jedan radni dan ima 8 radnih sati (= 480 minuta).

[4] Prilagođeno prema Schulze (n.d.)

a) Formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*. Interpretirati svaku komponentu optimalnoga rješenja i optimalnu vrijednost funkcije cilja.

b) Utvrditi hoće li optimalnim planom proizvodnje tvornica raditi puno radno vrijeme (8 radnih sati). Obrazložiti odgovor.

Rješenje:

Neka su:

x_1 – ukupan broj proizvedenih automobila marke A_1,

x_2 – ukupan broj proizvedenih automobila marke A_2,

x_3 – ukupan broj proizvedenih automobila marke A_3.

Za sastavljanje jednoga automobila marke A_1 potrebna je jedna minuta. Zbog toga je za sastavljanje x_1 automobila te marke A_1 potrebno x_1 minuta.

Analogno, za sastavljanje jednoga automobila marke A_2 potrebne su dvije minute, pa je za sastavljanje x_2 automobila te marke potrebno $2 \cdot x_2$ minuta.

Naposljetku, za sastavljanje jednoga automobila marke A_3 potrebne su tri minute, pa je za sastavljanje x_3 automobila te marke potrebno $3 \cdot x_3$ minuta.

Dakle, za sastavljanje svih automobila potrebno je ukupno $x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3$ minuta. Taj broj ne smije biti strogo veći od ukupnoga predviđenoga radnoga vremena, pa se dobije uvjet:

$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480.$$

Jedan automobil marke A_1 može prijeći 10 km s jednom litrom benzina. Zbog toga x_1 automobila te marke može prijeći $10 \cdot x_1$ km, pri čemu svaki od tih x_1 automobila potroši jednu litru benzina.

Analogno, jedan automobil marke A_2 može prijeći 6 km s jednom litrom benzina. Zbog toga x_2 automobila te marke može prijeći $6 \cdot x_1$ km, pri čemu svaki od tih x_2 automobila potroši jednu litru benzina.

Naposljetku, jedan automobil marke A_3 može prijeći 4 km s jednom litrom benzina. Zbog toga x_3 automobila te marke može prijeći $4 \cdot x_3$ km, pri čemu svaki od tih x_3 automobila potroši jednu litru benzina.

Ukupan prijeđeni put svih automobila jednak je $10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3$ km. Budući da automobila ima ukupno $x_1 + x_2 + x_3$, prosječna duljina puta koju jedan od njih prijeđe s jednom litrom benzina iznosi:

$$\bar{s} = \frac{10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \text{ km/litra.}$$

Prema zahtjevu EU, vrijednost toga izraza mora biti jednaka ili veća od 7.5 km/litra, pa se dobije uvjet:

$$\frac{10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 7.5 .$$

Koristeći jednakost $7.5 = \frac{15}{2}$, taj se uvjet može transformirati ovako:

$$\begin{aligned}
&\frac{10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \geq \frac{15}{2}, \\
&2 \cdot (10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3) \geq 15 \cdot (x_1 + x_2 + x_3), \\
&20 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \geq 15 \cdot x_1 + 15 \cdot x_2 + 15 \cdot x_3, \\
&20 \cdot x_1 + 12 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 - 15 \cdot x_1 - 15 \cdot x_2 - 15 \cdot x_3 \geq 0, \\
&5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Prodajom jednog automobila marke A_1 ostvaruje se gubitak od 1000 €, pa se prodajom x_1 automobila te marke ostvaruje gubitak od $1000 \cdot x_1$ €.

Prodajom jednog automobila marke A_2 ostvaruje se zarada od 5000 €, pa se prodajom x_2 automobila te marke ostvaruje zarada od $5000 \cdot x_2$ €.

Prodajom jednog automobila marke A_3 ostvaruje se zarada od 15000 €, pa se prodajom x_3 automobila te marke ostvaruje zarada od $15000 \cdot x_3$ €.

Ukupna zarada nastala prodajom svih automobila iznosi $5000 \cdot x_2 + 15000 \cdot x_3 - 1000 \cdot x_1$ €. Taj izraz je potrebno maksimizirati.

Ponovno treba napomenuti da, prema prirodi zadatka, vrijednosti svih varijabli u modelu moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Zbog toga se dodaje uvjet:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Tako se dobiva sljedeći matematički model:

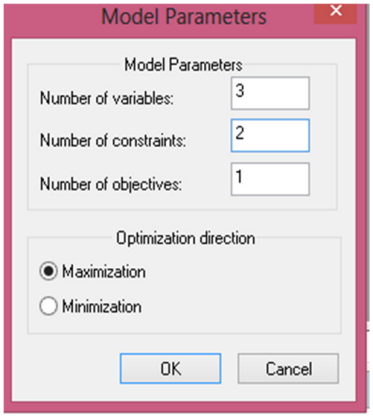
$$\begin{aligned}
&\max.\ z = -1000 \cdot x_1 + 5000 \cdot x_2 + 15000 \cdot x_3 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480, \\
&5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 \geq 0, \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Nakon pokretanja programa *Linear Program Solver* odabire se opcija *File-New-Table model.* Analogno kao u prethodnim primjerima, potrebno je promijeniti znakove nejednakosti i tip varijabli (*CONT* u *INT*).

U odgovarajući dijaloški okvir upisuju se sljedeće vrijednosti:

- broj varijabli: 3
- broj uvjeta: 2
- klikne se na kružić *Maximization* jer je cilj maksimizirati dobit
- klikne se na *OK* (vidjeti Sliku 24.)

Slika 24. Unos podataka matematičkog modela u Primjeru 7.



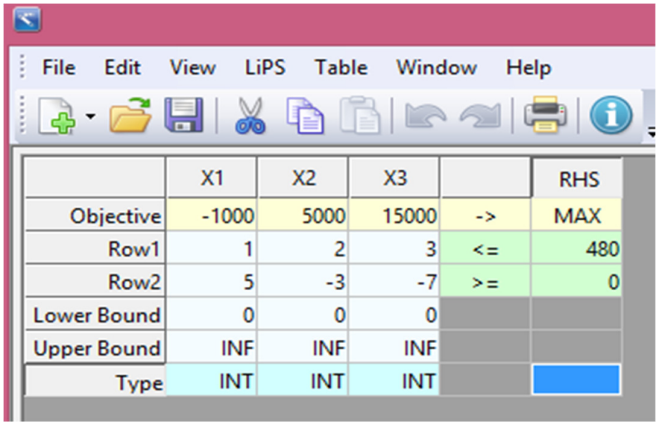
Izvor: autor

Dobiva se tablica u koju je potrebno upisati:

- u redak *Objective*: -1000, 5000 i 15000
- u redak *Row*1: 1, 2, 3
- u redak *Row*2: 5, -3, -7

Nakon unosa podataka dobije se tablica prikazana na Slici 25. Tablica se pohrani pod nazivom *Primjer 7.lpx.*

Slika 25. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 7.



	X1	X2	X3		RHS
Objective	-1000	5000	15000	->	MAX
Row1	1	2	3	<=	480
Row2	5	-3	-7	>=	0
Lower Bound	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Potom se klikne na *Solve*. Dobije se tablica prikazana na Slici 26.

Slika 26. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 7.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 1.482e+006
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	153	-1000	YES
X2	0	5000	YES
X3	109	15000	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje je: $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (153, 0, 109)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 1482000$.

Optimalan plan proizvodnje je:

- Treba proizvesti 153 automobila marke A_1 i 109 automobila marke A_3.

Optimalna ukupna zarada iznosi 1 482 000 €.

Potrebno je i utvrditi hoće li optimalnim planom proizvodnje tvornica raditi u punom radnom vremenu. Ukupno vrijeme potrebno za proizvodnju 153 automobila marke A_1 i 109 automobila marke A_3 iznosi:

$$153 + 3 \cdot 109 = 153 + 327 = 480 \text{ minuta,}$$

odnosno 8 radnih sati. Stoga optimalni plan predviđa da će tvornica raditi u punom radnom vremenu.

4.8. Primjer 8.

Uprava tvornice iz prethodnoga primjera donijela je odluku da se u jednom radnom danu mora proizvesti najmanje 10 automobila svake pojedine vrste.

a) Formirati novi matematički model i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*.

b) Izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake varijable i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja. Zaokružiti dobivene rezultate na najbliže cijele brojeve.

Rješenje:

Dodatni uvjet da treba proizvesti najmanje 10 automobila svake pojedine vrste zapisuje se kao nejednakost:

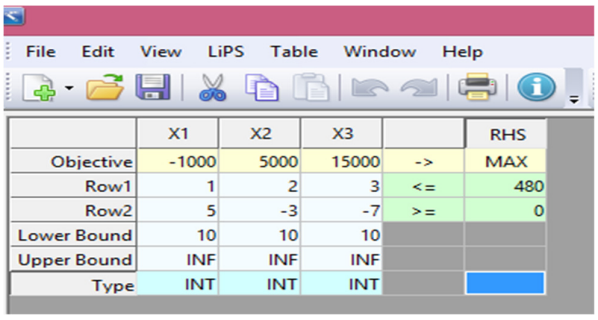
$$x_1, x_2, x_3 \geq 10 .$$

Novi matematički model glasi:

$$\begin{aligned}
&\max z = -1000 \cdot x_1 + 5000 \cdot x_2 + 15000 \cdot x_3 \\
&x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 480, \\
&5 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 7 \cdot x_3 \geq 0, \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 10, \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Otvori se datoteka *Primjer7.lpx* koristeći opciju *File-Open…* . U tablici iz prethodnoga primjera mijenjaju se koeficijenti u retku *Lower Bound*. U taj se redak upisuje 10, 10, 10. (vidjeti Sliku 27.)

Slika 27. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 8.



	X1	X2	X3		RHS
Objective	-1000	5000	15000	->	MAX
Row1	1	2	3	<=	480
Row2	5	-3	-7	>=	0
Lower Bound	10	10	10		
Upper Bound	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom na *Solve* dobije se tablica s optimalnim rješenjem prikazana na Slici 28.

Slika 28. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 8.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 1.444e+006
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	151	-1000	YES
X2	10	5000	YES
X3	103	15000	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovoga problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (151,10,103)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 1444000$.

Novi optimalan plan proizvodnje je:

- Treba proizvesti 151 automobil marke A_1, 10 automobila marke A_2 i 103 automobila marke A_3.

Nova optimalna zarada iznosi 1 444 000 €.

Preostaje izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake pojedine varijable modela, te relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Relativna promjena optimalne vrijednosti varijable x_1 jednaka je:

$$r_1 = \frac{151-153}{153} = -\frac{2}{153} = -0.01307 \approx -1\% .$$

Relativnu promjenu proizvodnje automobila marke A_2 nema smisla računati jer prvotni optimalan plan ne predviđa proizvodnju te marke automobila.

Relativna promjena optimalne vrijednosti varijable x_3 jednaka je:

$$r_3 = \frac{103-109}{109} = -\frac{6}{109} = -0.055 \approx -6\% .$$

Relativna promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja jednaka je:

$$z = \frac{1444000 - 1482000}{1482000} = -\frac{38000}{1482000} = -\frac{1}{39} = -0.0256 \approx -3\% .$$

Zaključuje se:

- Proizvodnja automobila marke A_1 smanjila se za približno 1%.
- Proizvodnja automobila marke A_3 smanjila se za približno 6%.
- Optimalna ukupna zarada smanjila se za približno 3%.

4.9. Primjer 9.

Odlukom Europskoga parlamenta izmijenjena je regulativa da svako vozilo s jednom litrom benzina mora prijeći najmanje 7.5 km, pa je propisano da svako vozilo s jednom litrom benzina mora prijeći najmanje 8 km. Svi ostali podaci ostaju nepromijenjeni u odnosu na podatke iz Primjera 7.

a) Formirati novi matematički model i riješiti ga koristeći *Linear Program Solver*.

b) Izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake varijable i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja. Zaokružiti dobivene rezultate na najbliže cijele brojeve.

Rješenje:

Analogno kao u Primjeru 7. dobije se nejednakost:

$$\frac{10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3}{x_1 + x_2 + x_3} \geq 8 .$$

Ta nejednakost se transformira na sljedeći način:

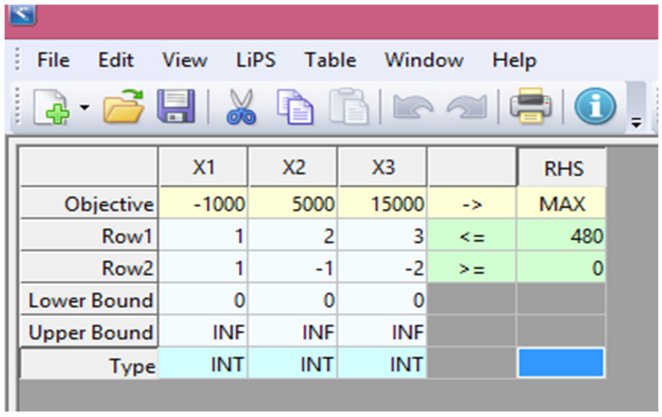
$$\begin{aligned}
&10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 8 \cdot (x_1 + x_2 + x_3), \\
&10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 \geq 8 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3, \\
&10 \cdot x_1 + 6 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 8 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 - 8 \cdot x_3 \geq 0, \\
&2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 \geq 0, \\
&x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 \geq 0.
\end{aligned}$$

Preinačeni matematički model iz Primjera 7. glasi:

$$\max.\ z = -1000 \cdot x_1 + 5000 \cdot x_2 + 15000 \cdot x_3$$
$$\text{pod uvjetima}$$
$$x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \le 480,$$
$$x_1 - x_2 - 2 \cdot x_3 \ge 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Otvori se datoteka *Primjer7.lpx* koristeći opciju *File-Open*… . U tablici iz Primjera 7. (vidjeti Sliku 25.) mijenjaju se koeficijenti u retku *Row*2. U taj se redak upisuje 1, –1, –2 (vidjeti Sliku 29.)

Slika 29. Tablica s upisanim matematičkim modelom u Primjeru 9.



	X1	X2	X3		RHS
Objective	-1000	5000	15000	->	MAX
Row1	1	2	3	<=	480
Row2	1	-1	-2	>=	0
Lower Bound	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Potom se klikne na *Solve*. Dobije se tablica s optimalnim rješenjem prikazana na Slici 30.

Slika 30. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 9.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 1.248e+006
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	192	-1000	YES
X2	0	5000	YES
X3	96	15000	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje je: $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (192, 0, 96)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $z^* = 1248000$.

Novi optimalan plan proizvodnje je:

- Treba proizvesti 192 automobila marke A_1 i 96 automobila marke A_3.

Nova optimalna zarada iznosi 1 248 000 €.

Preostaje izračunati relativnu promjenu optimalne vrijednosti svake pojedine varijable modela, te relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Relativna promjena optimalne vrijednosti varijable x_1 jednaka je:

$$r_1 = \frac{192 - 153}{153} = \frac{39}{153} = \frac{13}{51} = 0.2549 \approx 25\% .$$

Relativnu promjenu proizvodnje automobila marke A_2 nema smisla računati jer prvotni optimalan plan ne predviđa proizvodnju te marke automobila.

Relativna promjena optimalne vrijednosti varijable x_3 jednaka je:

$$r_3 = \frac{96 - 109}{109} = -\frac{13}{109} = -0.119266 \approx -12\% .$$

Relativna promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja jednaka je:

$$z = \frac{1248000 - 1482000}{1482000} = -\frac{234000}{1482000} = -\frac{3}{19} = -0.15789 \approx -16\% .$$

Zaključuje se:

- Proizvodnja automobila marke A_1 povećala se za približno 25%.
- Proizvodnja automobila marke A_3 smanjila se za približno 12%.
- Optimalna ukupna zarada smanjila se za približno 16%.

5. ZAKLJUČAK

Jedna od najprimijenjenijih matematičkih disciplina današnjice je matematičko programiranje, a posebno linearno programiranje. Njegove primjene na rješavanje praktičnih problema su vrlo različite, pa se linearno programiranje podjednako primjenjuje u ekonomiji, tehnici i drugim područjima. Pritom se razvijaju sve bolji računalni programi prilagođeni korisnicima koji u vrlo kratkom vremenu rješavaju optimizacijske probleme s relativno velikim brojem varijabli.

U ovom je radu razmatrana primjena linearnoga programiranja na probleme planiranja proizvodnje. U rješavanju tih problema korišten je računalni program *Linear Program Solver*. Taj je program odabran zbog relativno jednostavnoga korištenja jer prije samoga početka rada s programom korisnik ne treba nikakvo posebno informatičko predznanje. K tome, program je kompatibilan i s novijim verzijama operacijskoga sustava *Windows* koji se danas najčešće koristi u tvrtkama i drugim poslovnim subjektima.

U radu se nastojalo posebno istaknuti da u postupku rješavanja optimizacijskih problema nijedan računalni program ne može zamijeniti čovjeka – donositelja odluke. Zbog toga su detaljno opisani svi postupci dobivanja matematičkih modela razmatranih problema. Potpuno pogrešno je očekivati da će tu fazu procesa odlučivanja, kao i donošenje konačne odluke, ubuduće obavljati računala. U tome će smislu donositelj odluke i dalje biti nezamjenjiv. Stoga je primjerenije i bolje staviti dodatni naglasak na komponente programa koje će omogućavati još bržu i kvalitetniju analizu osjetljivosti optimalnih rješenja. Ta je analiza naročito bitna u velikim sustavima s relativno velikim brojem varijabli odlučivanja u kojima već i male relativne promjene početnih uvjeta mogu prouzročiti vrlo značajne relativne promjene optimalnih vrijednosti varijabli.

Za nadati se da će se daljnjim gospodarskim i informatičkim razvojem Republike Hrvatske vrlo uskoro stvoriti potrebni preduvjeti da se u gore navedene svrhe ubuduće koriste i domaći kvalitetni računalni programi, koji programi će nesumnjivo dati pozitivan doprinos daljnjem uspješnom razvoju naših poslovnih subjekata, a time i našem gospodarstvu u cjelini.

POPIS KRATICA

1. itd. = i tako dalje
2. i sl. = i slično
3. max. = maksimizirati
4. min. = minimizirati

LITERATURA

Knjige:

1. Chiang, C. A. (1996) *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Zagreb: Mate, str. 651-665.
2. Neralić, L., Šego, B. (2009) *Matematika*, Zagreb: Element , str. 127. – 130., 277. – 314.
3. Neralić, L. (2003) *Uvod u matematičko programiranje*, Zagreb: Element, str. 1. – 20.

Internetski izvori:

4. Beasley, J.E., *OR Notes*
   URL:http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpmore.html (javno dostupno 12.07.2016.)
5. Hillier, F., *Linear programming*
   URL:http://www.muhlenberg.edu/depts/abe/business/miller/mscipp/lpformulation.ppt (14.07.2016.)
6. IBM *Knowledge Center*
   URL:http://www.ibm.com/support/knowledgecenter/SS6MYV_3.4.0/ilog.odms.ide.odme.help/Content/Optimization/Documentation/ODME/_pubskel/ODME_pubskels/startall_ODME34_Eclipse1010.html (javno dostupno, 14.07.2016.)
7. Lovrić, Lj. (2008.) *Metode i modeli donošenja optimalnih poslovnih odluka*
   URL: .http://oliver.efri.hr/~kvmet/UMpredavanja.pdf (javno dostupno, 26.6.2016.)
8. Melnick, M., *Linear Program Solver*
   URL: https://sourceforge.net/projects/lipside/ (javno dostupno, 28.06.2016.)
9. Neralić, L. (2009) *O linearnom programiranju* I
   URL: http://www.mioc.hr/wp/wp-content/uploads/2016/03/O-Linearnom-programiranju-I-pdf (javno dostupno, 26.06.216.)

10. Schulze M.A., *Linear programming for optimization*
URL: http://www.markschulze.net/LinearProgramming.pdf (javno dostupno, 14.07.2016.)

Stručni radovi:

11. Kerepčić, M., *Primjena linearnog programiranja na izbor medija za oglašavanje*
URL:http://bkovacic.weebly.com/uploads/7/4/0/7/7407552/diplomski_rad__marica_kerepcic.pdf (javno dostupno, 28.6.2016.)
12. Petkoviček, D., *Linearno programiranje*,
URL:http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20%20Linearno%20programiranje.pdf (javno dostupno, 26.06.2016.)

POPIS PRILOGA

Popis slika

Popis tablica