TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – svibanj 2014. (osnovna razina)

1. **B.** Podsjetimo da oznaka $\langle$ uz točku na brojevnom pravcu pridruženu realnom broju a znači da broj a ne pripada istaknutom podskupu skupa realnih brojeva, a da oznaka [uz istu točku znači da broj a pripada spomenutom podskupu. Skup svih realnih brojeva koji su istodobni jednaki ili veći od 2 i manji od 7 je poluzatvoreni interval $[2, 7\rangle$. Stoga tražimo grafički prikaz koji će obuhvatiti sve realne brojeve između 2 i 7 uključujući 2, a isključujući 7. Taj grafički prikaz naveden je pod slovom **B**.

   Primijetimo da grafički prikaz **A** predstavlja poluotvoreni interval $\langle 2, 7]$, grafički prikaz **C** predstavlja skup $\mathbf{R} \setminus [2, 7\rangle = \langle -\infty, 2\rangle \cup [7, +\infty\rangle$, a grafički prikaz **D** predstavlja skup $\mathbf{R} \setminus \langle 2, 7] = \langle -\infty, 2] \cup \langle 7, +\infty\rangle$.

2. **D.** Prva nejednakost je netočna jer iz nejednakosti $-1 > -2$ dijeljenjem s 2 dobijemo $-\frac{1}{2} > -\frac{2}{2} = -1$.
   Druga nejednakost je netočna zbog činjenice da ako dva strogo pozitivna razlomka imaju jednake brojnike, onda je veći onaj koji ima manji nazivnik. Drugim riječima, ako su a, $b \in \mathbf{R}$ takvi da vrijedi nejednakost $0 < a < b$, onda vrijedi nejednakost $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$. Primijetimo da je ovdje nužna pretpostavka o strogoj pozitivnosti brojeva a i b jer npr. iz nejednakosti $-1 < 2$ ne slijedi nejednakost $-1 = \frac{1}{-1} > \frac{1}{2}$.

   Treća nejednakost je netočna jer vrijedi jednakost $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

   Četvrta nejednakost je točna zbog $1.3 = \frac{13}{10} = \frac{13 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{39}{30} > \frac{10}{30} = \frac{10:10}{30:10} = \frac{1}{3}$.

3. **D.** Neka su j, l i n redom količine jabuke, limuna i naranče u miješanom voćnom soku. Iz podatka da je $j : n = 1 : 4$ primjenom pravila za rješavanje razmjera („vanjski puta vanjski jednako je unutrašnji puta unutrašnji“) slijedi $4 \cdot j = 1 \cdot n$, odnosno $n = 4 \cdot j$.
   Iz podatka da je $l : n = 2 : 5$ primjenom pravila za rješavanje razmjera slijedi $5 \cdot l = 2 \cdot n$. U ovu jednakost uvrstimo jednakost $n = 4 \cdot j$, pa slijedi:

$$5 \cdot l = 2 \cdot (4 \cdot j),$$
$$5 \cdot l = 8 \cdot j.$$

   Dijeljenjem ove jednakosti izrazom $8 \cdot l$ dobijemo:

$$\frac{5}{8} = \frac{j}{l}.$$

Ovu jednakost zapišemo kao razmjer i dobivamo traženi omjer:

$$j : l = 5 : 8.$$

4. **A.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot a = \frac{3 \cdot a - 11}{5} \quad / \cdot 5\\
&10 \cdot a = 3 \cdot a - 11,\\
&10 \cdot a - 3 \cdot a = -11,\\
&7 \cdot a = -11 \quad / : 7\\
&a = -\frac{11}{7}.
\end{aligned}$$

5. **D.** Zadanu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot x \cdot (x-2) = 3 \cdot (x+3),\\
&2 \cdot x^2 - 4 \cdot x = 3 \cdot x + 9,\\
&2 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 3 \cdot x - 9 = 0,\\
&2 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 9 = 0 \;\; /:2\\
&x^2 - \frac{7}{2} \cdot x - \frac{9}{2} = 0.
\end{aligned}$$

Vièteove formule tvrde da je zbroj svih rješenja gornje kvadratne jednadžbe jednak suprotnoj vrijednosti koeficijenta uz x u toj jednadžbi. Koeficijent uz x jednak je $-\frac{7}{2}$, pa je traženi zbroj jednak $\frac{7}{2}$.

6. **A.** Za svaku pojedinu funkciju treba izračunati $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i utvrditi koja od navedenih funkcija ima svojstvo $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. (To svojstvo, prema definiciji nultočke, znači da je $\frac{1}{2}$ nultočka funkcije f.) Imamo redom:

A. $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0.$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=2\cdot\frac{1}{4}-1=\frac{2}{4}-1=\frac{2}{4}-\frac{4}{4}=\frac{2-4}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{2:2}{4:2}=-\frac{1}{2}.$

C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=10^{2\cdot\frac{1}{2}}=10^1=10.$

D. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}+1-1=-\frac{1}{4}.$

Jedina funkcija koja ima svojstvo $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ je funkcija $f(x) = 2 \cdot x - 1$.

7. **B.** Primijetimo da je funkcija f polinom 2. stupnja, odnosno kvadratna funkcija oblika $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Iz podatka da ta funkcija ima najmanju vrijednost zaključujemo da je $a > 0$. Znamo da najmanja vrijednost u tom slučaju iznosi $f_{\min}=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}$ i da se postiže za $x_{\min}=-\frac{b}{2\cdot a}$.

U zadatku je zadano $x_{min} = 2$, $b = -3$ i $c=\frac{1}{2}$, pa uvrštavanjem $x_{min} = 2$, $b = -3$ u jednakost $x_{\min}=-\frac{b}{2\cdot a}$ dobivamo jednadžbu:

$$2=\frac{3}{2\cdot a}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$2=\frac{3}{2\cdot a}\quad /\cdot a$$
$$2\cdot a=\frac{3}{2}\quad /:2$$
$$a=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}.$$

U izraz za f_{min} uvrstimo $a=\frac{3}{4}$, $b=-3$ i $c=\frac{1}{2}$, pa dobijemo:

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – svibanj 2014. (osnovna razina)

$$f_{\min} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - (-3)^2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 9}{3} = \frac{\frac{3}{2} - 9}{3} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{18}{2}}{3} = \frac{-\frac{15}{2}}{3} = -\frac{15}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{2}.$$

Dakle, tražena najmanja vrijednost iznosi $-\frac{5}{2}$.

8. **C.** Koeficijent smjera pravca p_1 jednak je koeficijentu uz x u zadanoj (eksplicitnoj) jednadžbi toga pravca. Stoga je $k_1 = -3$. Analogno zaključujemo da je koeficijent smjera pravca p_2 jednak $k_2 = 3$, a koeficijent smjera pravca p_3 jednak $k_3 = 3$. Očito je $k_2 = k_3 = 3$, pa su pravci p_2 i p_3 usporedni. (Pravci u ravnini su usporedni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjerova.)
Primijetimo da pravac p_1 nije usporedan s pravcima p_2 i p_3. To znači da pravac p_1 siječe svaki od pravaca p_2 i p_3 u točno jednoj točki.

9. **B.** Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju.

Tvrdnja 1. Parabola $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, ima tjeme u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini ako i samo ako je $b = c = 0$.

Dokaz Tvrdnje 1.: Znamo da su koordinate tjemena T zadane parabole u općem slučaju određene s $T = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$. Ako je $T = (0, 0)$, onda istodobno moraju vrijediti jednakosti

$$\begin{cases} \frac{-b}{2 \cdot a} = 0, \\ \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = 0. \end{cases}$$

Množenjem tih jednakosti s $2 \cdot a$, odnosno $4 \cdot a$ (ti brojevi su različiti od nule jer je, prema pretpostavci, $a \neq 0$) dobivamo:

$$\begin{cases} -b = 0, \\ 4 \cdot a \cdot c - b^2 = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je $b = 0$.
Uvrštavanjem $b = 0$ u drugu jednadžbu dobijemo $4 \cdot a \cdot c = 0$, pa dijeljenjem te jednakosti s $4 \cdot a \neq 0$ slijedi $c = 0$. Time je dokazan smjer $\Rightarrow$ Tvrdnje 1.

Da dokažemo smjer ⇐, u formulu za koordinate točke T uvrstimo $b = 0$ i $c = 0$. Imamo:

$$T=\left(-\frac{b}{2\cdot a},\ \frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right)=\left(-\frac{0}{2\cdot a},\ \frac{4\cdot a\cdot 0-0^2}{4\cdot a}\right)=\left(0,\ \frac{0-0}{4\cdot a}\right)=(0,0),$$

pa je tjeme parabole doista ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. ■

Odredimo najprije jednadžbu parabole sa slike. Tražimo je u obliku $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Iz slike se vidi da ta parabola ima tjeme u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Prema Tvrdnji 1. to znači da je $b = c = 0$, pa se jednadžba parabole svodi na $y = a \cdot x^2$. Iz slike možemo „očitati“ da parabola prolazi točkom $S_1 = (2, –4)$.Točnije, ta je točka sjecište nacrtanoga pravca i parabole u četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Uvrštavanjem $x = 2$ i $y = –4$ u jednakost $y = a \cdot x^2$ dobivamo:

$$\begin{gathered}(-4) = a\cdot 2^2,\\ (-4) = a\cdot 4\ \ /:4\\ a=-1.\end{gathered}$$

Dakle, jednadžba parabole glasi: $y = (–1) \cdot x^2$, odnosno $y = –x^2$.

Odredimo jednadžbu pravca (u eksplicitnom obliku, tj. u obliku $y = k \cdot x + l$, gdje su $k, l \in \mathbf{R}$). Već smo uočili da pravac prolazi točkom $S_1 = (2, –4)$. Iz slike vidimo da pravac siječe os ordinata (os y) u točki $S = (0, –3)$. To znači da je $l = –3$. Zbog toga se jednadžba pravca svodi na $y = k \cdot x + (–3)$, odnosno $y = k \cdot x – 3$. Uvrštavanjem $x = 2$ i $y = –4$ u jednakost $y = k \cdot x – 3$ dobivamo:

$$\begin{gathered}-4 = k\cdot 2-3,\\ (-2)\cdot k=-3+4,\\ (-2)\cdot k = 1.\end{gathered}$$

Odavde dijeljenjem s $(–2)$ slijedi $k=-\frac{1}{2}$. Dakle, jednadžba pravca glasi: $y=-\frac{1}{2}\cdot x-3$. Prevedimo tu jednadžbu u implicitni oblik:

$$\begin{aligned}&y=-\frac{1}{2}\cdot x-3\quad /\cdot 2\\ &2\cdot y=-x-6,\\ &x+2\cdot y=-6.\end{aligned}$$

Stoga je rješenje zadatka sustav:

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = -6, \\ y = -x^2. \end{cases}$$

10. B. Označimo duljinu kraka promatranoga trokuta s b, duljinu osnovice s a, a duljinu visine povučene na osnovicu s v. Iz podatka da je duljina osnovice kraća od duljine kraka za četvrtinu duljine kraka slijedi:

$$a = b - \frac{1}{4} \cdot b = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot b = \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot b = \frac{4-1}{4} \cdot b = \frac{3}{4} \cdot b.$$

U jednakokračnom trokutu visina povučena na osnovicu, krak trokuta i dužina određena nožištem visine povučene na osnovicu i jednim vrhom trokuta tvore pravokutan trokut. Duljine kateta toga trokuta su v i $\frac{1}{2} \cdot a$ jer se nožište visine povučene na osnovicu jednakokračnoga trokuta podudara s polovištem te osnovice. Duljina hipotenuze jednaka je duljini kraka b. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\ .$$

U ovu jednakost uvrstimo jednakost $a = \frac{3}{4} \cdot b,$ pa imamo:

$$v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot b\right)^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot b^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\frac{9}{16}}{4} \cdot b^2} = \sqrt{b^2 - \frac{9}{16 \cdot 4} \cdot b^2} =$$
$$= \sqrt{b^2 - \frac{9}{64} \cdot b^2} \sqrt{\left(1 - \frac{9}{64}\right) \cdot b^2} = \sqrt{\left(\frac{64}{64} - \frac{9}{64}\right) \cdot b^2} = \sqrt{\frac{64-9}{64} \cdot b^2} = \sqrt{\frac{55}{64} \cdot b^2} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{64}} \cdot \sqrt{b^2} = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot |b|.$$

Budući da je prema prirodi zadatka $b > 0$, to je $|b| = b$, pa zaključujemo da je:

$$v = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot b.$$

U ovu jednakost uvrstimo $b = 24$, pa konačno dobivamo:

$$v = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot 24 = 3 \cdot \sqrt{55} \approx 22.24859546 \approx 22.25 \text{ cm}.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – svibanj 2014. (osnovna razina)

11. B. Tražena površina jednaka je zbroju površina trokuta AFD i usporednika $FBCD$. Prema pretpostavci su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ usporedne, pa je duljina visine na stranicu $\overline{AF}$ trokuta AFD jednaka duljini visine na stranicu FB usporednika $FBCD$. Potonja visina je dužina $\overrightarrow{FC}$ čija je duljina $\left|\overline{FC}\right| = 2 \cdot \left|\overline{FB}\right| = 2 \cdot 1.3 = 2.6$ cm.

Nadalje, duljina stranice $\overline{AF}$ trokuta AFD jednaka je $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{FB}\right| = 4.5 - 1.3 = 3.2$ cm. Tako konačno dobivamo:

$$P = P_{AFD} + P_{FBCD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AF}\right| \cdot \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FB}\right| \cdot \left|\overline{FC}\right| = \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FB}\right|\right) \cdot \left|\overline{FC}\right| = \left(\frac{1}{2} \cdot 3.2 + 1.3\right) \cdot 2.6 =$$
$$= (1.6 + 1.3) \cdot 2.6 = 2.9 \cdot 2.6 = 7.54 \text{ cm}^2$$

12. A. Osjenčano tijelo $ABCDP$ je kosa četverostrana piramida. Osnovka te piramide je pravokutnik $ABCD$. Njegova je površina

$$B = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right| = 4.2 \cdot 2 = 8.4 \text{ cm}^2.$$

Duljina visine h piramide $ABCDP$ jednaka je duljini brida DP jer je brid DH kvadra $ABCDEFGH$ okomit na ravninu u kojoj se nalazi pravokutnik $ABCD$. Prema pretpostavci, P je polovište brida DH, pa je $\left|\overline{DP}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{DH}\right|$. Budući da je $ABCDEFGH$ kvadar, slijedi da je $\left|\overline{DH}\right| = \left|\overline{CG}\right| = 3.8$ cm. Stoga je

$$h = \left|\overline{DP}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{DH}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{CG}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3.8 = 1.9 \text{ cm}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$V_{ABCDP} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8.4 \cdot 1.9 = 2.8 \cdot 1.9 = 5.32 \text{ cm}^3.$$

13. C. Pojednostavnimo zadani izraz na sljedeći način:

$$\frac{1}{2 \cdot x - 1} \cdot \frac{x - 2 \cdot x^2}{x^2} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{2 \cdot x - 1} \cdot \frac{(-x) \cdot (-1 + 2 \cdot x)}{x^2} + \frac{3}{x-3} = \frac{(-1) \cdot x \cdot (2 \cdot x - 1)}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)} + \frac{3}{x-3} =$$
$$= \frac{-1}{x} + \frac{3}{x-3} = \frac{(-1) \cdot (x-3) + 3 \cdot x}{x \cdot (x-3)} = \frac{-x + 3 + 3 \cdot x}{x \cdot (x-3)} = \frac{2 \cdot x + 3}{x \cdot (x-3)}$$

Brojnik ovoga izraza jednak je $2 \cdot x + 3$.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – svibanj 2014. (osnovna razina)

14. B. Na početku školske godine u zbor je bilo učlanjeno ukupno $z_0 = \frac{24}{100} \cdot 225 = 54$ učenika. Kad se u školu upisalo 15 novih učenika, novi ukupan broj učenika u školi iznosio je u_1 = 225 + 15 = 240. Od tih 15 novih učenika, 4 su se upisala u zbor, pa je u zboru bilo ukupno z_1 = 54 + 4 = 58 učenika. Potom se iz zbora iščlanilo 12 učenika, pa je u zboru na kraju godine bilo ukupno z_2 = 58 – 12 = 46 učenika. Da se dobije traženi postotak, treba izračunati koliko postotaka iznosi broj 46 u odnosu na broj 240:

$$p = \frac{100 \cdot 46}{240} = \frac{5 \cdot 46}{12} = \frac{5 \cdot 23}{6} = \frac{115}{6} \approx 19.1666667 \approx 19.17\% .$$

15. B. Izračunajmo cijenu jedne litre goriva prije pojeftinjenja. Ako se za 473.72 kn moglo kupiti 45.55 litara goriva, onda je cijena jedne litre goriva 473.72 : 45.55 = 10.4 kn. Nakon pojeftinjenja od 10 lipa = 0.1 kn, cijena goriva iznosi 10.4 – 0.1 = 10.3 kn. Stoga se za 473.72 kn može kupiti ukupno 473.72 : 10.3 ≈ 45.992233 ≈ 45.99 litara goriva. (*Napomena*: Dobiveni rezultat treba zaokružiti na 45.99, a ne na 46 litara jer 46 litara goriva nakon pojeftinjenja stoji ukupno 46 · 10.3 = 473.8 kn, što je veće od iznosa koji nam je na raspolaganju.)

16. D. Neka je s tražena udaljenost. Ukupno vrijeme t_b koje je za prelazak te udaljenosti utrošio biciklist jednako je količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine biciklista, pa je

$$t_b = \frac{s}{12} .$$

Analogno, ukupno vrijeme t_a koje je za prelazak iste udaljenosti utrošio automobilist jednako je količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine automobilista, pa je:

$$t_a = \frac{s}{64} .$$

Biciklist je ukupno vozio 2 sata i 10 minuta dulje od automobilista. Izrazimo to vrijeme u satima jer je brzina obojice ljudi iskazana u km/h:

$$\text{2 sata i 10 minuta} = \text{2 sata} + \frac{10}{60}\ \text{sati} = \text{2 sata} + \frac{1}{6}\ \text{sata} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12+1}{6} = \frac{13}{6}\ \text{sati.}$$

To znači da mora vrijediti jednakost:

$$t_b - t_a = \frac{13}{6} .$$

U ovu jednakost uvrstimo $t_b = \frac{s}{12}$ i $t_a = \frac{s}{64}$, pa dobivamo:

$$\frac{s}{12} - \frac{s}{64} = \frac{13}{6} \quad / \cdot 192$$
$$16 \cdot s - 3 \cdot s = 416,$$
$$13 \cdot s = 416.$$

Odatle dijeljenjem s 13 slijedi s = 32 km.

17. $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2$**.** Prvi član binoma očito mora biti m. Dvostruki umnožak prvoga i drugoga člana binoma mora biti jednak $-m$, pa zaključujemo da je drugi član binoma jednak $\frac{-m}{2 \cdot m} = -\frac{1}{2}$.

Doista, $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = m^2 - m + \frac{1}{4}$.

18. 2500. Prisjetimo se da je 1 km = 1000 m. Stoga je 1 km^2 = 1000^2 m^2 = 1000000 m^2, pa je $\frac{1}{4}$ km^2 = $\frac{1}{4} \cdot 1000000 =$ 250000 m^2. Da bismo ovu površinu iskazali u arima, moramo je podijeliti sa 100. Tako se dobije P = 250000 : 100 = 2500 ara.

19. 9. Neka je x broj plesača, a y broj plesačica u tom društvu. Iz podatka da će u slučaju plesanja u mješovitim parovima četiri plesačice biti bez svojega para zaključujemo da plesačica ima za 4 više nego plesača, odnosno da vrijedi jednakost:

$$y = x + 4.$$

Ukupan broj članova folklornoga društva jednak je $x + y$. S druge strane, iz podatka da svi članovi društva tvore ukupno 7 parova zaključujemo da je ukupan broj članova društva jednak 2 · 7 = 14 jer svaki par tvori dvoje ljudi. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$x + y = 14.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Taj sustav možemo zapisati u obliku

$$\begin{cases} -x + y = 4, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Zbrajanjem posebno lijevih, a posebno desnih strana tih jednadžbi dobivamo

$$2 \cdot y = 18.$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $y = 9$. Dakle, u društvu ima 9 plesačica.

<u>Napomena</u>: U formulaciji zadatka nedostaje riječ *točno*. Preciznije, drugi dio druge rečenice treba glasiti: *Od ukupnoga broja plesača i plesačica moguće je napraviti točno 7 parova*.

20. 47°. Označimo s A, B i C vrhove trokuta čiji je jedan kut φ. Oznake postavimo tako da je A vrh kuta φ, a B vrh kuta čija je mjera 101°. Kut pri vrhu B trokuta ABC i kut čija je mjera 101° su komplementarni kutovi, pa je kut pri vrhu B trokuta ABC jednak:

$$\angle B = 180° - 101° = 79°.$$

Nadalje, budući da su pravci b i c prema pretpostavci usporedni, mjera kuta pri vrhu C trokuta ABC jednaka je 54° (šiljasti kutovi uz presječnicu a su međusobno jednaki), tj. vrijedi jednakost:

$$\angle C = 54°.$$

Traženi kut φ izračunat ćemo iz činjenice da zbroj mjera kutova u trokutu ABC mora biti jednak 180°:

$$\begin{gathered} \varphi + \angle B + \angle C = 180°, \\ \varphi + 79° + 54° = 180°, \\ \varphi = 180° - (79° + 54°), \\ \varphi = 180° - 133°, \\ \varphi = 47°. \end{gathered}$$

21. 25.13. Svaka se traka sastoji od ravnoga dijela i od kružnice koju tvore dvije sukladne polukružnice na različitim stranama staze. Duljina ravnoga dijela svake trake jednaka je 110 metara, pa nju ne moramo uzimati u obzir prigodom računanja tražene razlike duljina. „Spojimo“ polukružne dijelove traka tako da dobijemo ukupno šest kružnica. Trkač koji trči unutrašnjim dijelom najkraće trake prevali put jednak opsegu prve kružnice. Trkač koji trči unutrašnjim dijelom najdulje trake prevali put jednak opsegu pete kružnice.
Uočimo da svaka od navedenih šest kružnica, osim prve kružnice, ima za 2 metra veći promjer od neposredno prethodne kružnice (na promjer neposredno prethodne kružnice

treba dodati 1 metar širine na „sjevernoj“ i 1 metar širine na „južnoj“ strani promjera). Stoga promjeri tih šest kružnica tvore aritmetički niz d_1, $d_1 + 2$, $d_1 + 4$, $d_1 + 6$, $d_1 + 8$ i $d_1 + + 10$ pri čemu je $d_1 = 70$ metara.
Tražena razlika putova jednaka je razlici opsega pete kružnice i opsega prve kružnice, pa odmah imamo:

$$\Delta d = (d_1 + 8) \cdot \pi - d_1 \cdot \pi = d_1 \cdot \pi + 8 \cdot \pi - d_1 \cdot \pi = 8 \cdot \pi \approx 25.132741 \approx 25.13 \text{ m.}$$

22. 1.) 0.3927. Imamo:

$$\frac{\pi}{8} \approx 0.392699081698724 .$$

Zaokruživanjem ovoga broja na 4 decimale dobijemo 0.3927 (peta decimala je 9, pa prigodom zaokruživanja četvrtu decimalu moramo uvećati za 1).

2.) $-\frac{1}{4}$. Primijetimo da vrijedi nejednakost $\sqrt{2} > 1$, odnosno $1 - \sqrt{2} < 0$. Zo znači da je $\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1$. Tako imamo:

$$\frac{3-\left|1-\sqrt{2}\right|-2^2}{2\cdot\sqrt{8}} = \frac{3-\left(\sqrt{2}-1\right)-4}{2\cdot\sqrt{4\cdot 2}} = \frac{3-\sqrt{2}+1-4}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4} .$$

23. 1.) Vidjeti Sliku 1. Funkcija f je polinom 1. stupnja (linearna funkcija). Njezin graf je pravac čija je jednadžba $y = 2 \cdot x - 4$. Da bismo nacrtali taj pravac, dovoljno je odrediti bilo koje dvije njegove točke. Za vrijednosti varijable x uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 1$. Izračunamo:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4,$$
$$f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2,$$

Formiramo tablicu:

x	0	1
y	–4	–2

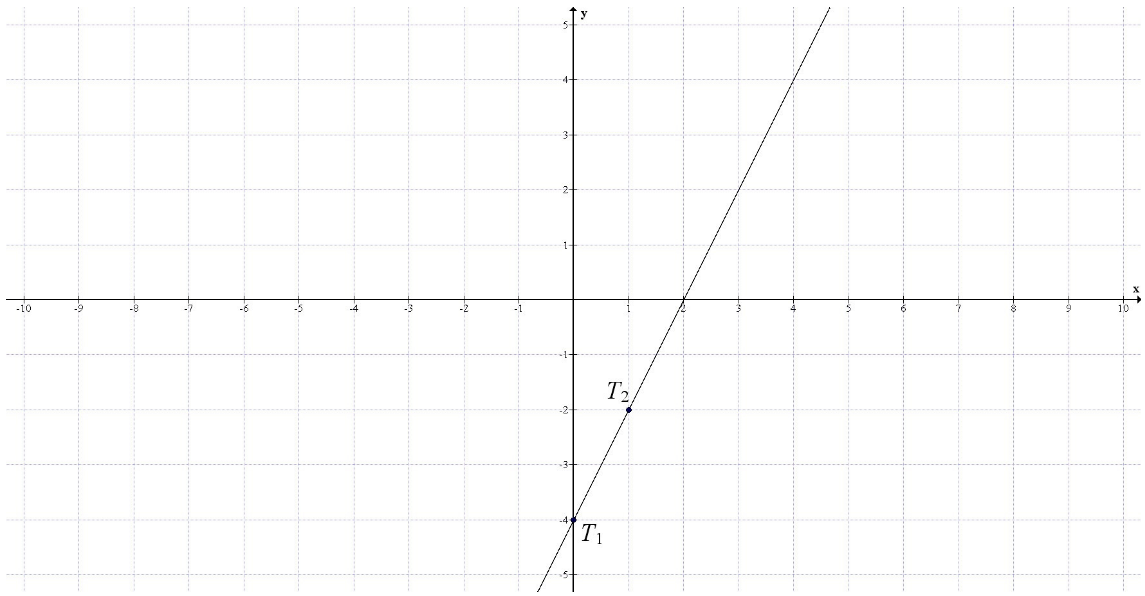
U zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke $T_1 = (0, -4)$ i $T_2 = (1, -2)$, pa ih spojimo jednim pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI – svibanj 2014. (osnovna razina)



Slika 1.

2.) **95.** Imamo redom:

$$\frac{1}{2}\cdot f(100)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 100-4)+\left(2\cdot\frac{1}{2}-4\right)=\frac{1}{2}\cdot(200-4)+(1-4)=\frac{1}{2}\cdot 196+(-3)=98-3=95$$

24. 1.) **8.1.** Traženu promjenu računamo prema formuli $R=100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)-100$.

U tu formulu uvrstimo $p_1 = +15$ i $p_2 = -6$. (+15 označava povećanje osnovne veličine za 15%, a –6 smanjenje osnovne veličine za 6%.) Dobijemo:

$$R=100\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{-6}{100}\right)-100=100\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{100}\right)-100=$$
$$=100\cdot 1.15\cdot 0.94-100=108.1-100=8.1$$

Predznak + ukazuje na to da je krajnja plaća veća od početne. Stoga zaključujemo da je zaposlenikova plaća u lipnju za 8.1% veća od zaposlenikove plaće u travnju.

2.) **4536.42.** Neka je x tražena plaća. Iz podzadatka **1.**) znamo da se uvećanjem te plaće za 8.1% njezina iznosa dobije plaća u lipnju. Stoga možemo postaviti jednadžbu:

$$x + \frac{8.1}{100} \cdot x = 4903.87 \;.$$

Riješimo tu jednadžbu standardnim postupkom:

$$\begin{aligned}
&x + \frac{8.1}{100} \cdot x = 4903.87 \quad / \cdot 100 \\
&100 \cdot x + 8.1 \cdot x = 490387, \\
&108.1 \cdot x = 490387.
\end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s 108.1 dobivamo $x \approx 4536.419981$. Taj rezultat treba zaokružiti na dvije decimale jer ne postoji tisućiti (ili manji) dio novčane jedinice od 1 kn. Zaokruživanjem dobijemo $x \approx 4536.42$ kn.

25. 1.) $y = -2 \cdot x + 3$. Neka je $y = k \cdot x + l$ tražena jednadžba. Iz slike vidimo da zadani pravac prolazi točkom $C = (0, 3)$. To znači da je $l = 3$. Također, iz slike vidimo da zadani pravac prolazi točkom $B = (-1, 5)$. To znači da koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca. U jednadžbu pravca uvrstimo $x = -1$, $y = 5$ i dobiveni rezultat $l = 3$:

$$\begin{aligned}
5 &= k \cdot (-1) + 3, \\
k &= 3 - 5, \\
k &= -2.
\end{aligned}$$

Dakle, tražena jednadžba (u eksplicitnom obliku) glasi: $y = -2 \cdot x + 3$.

2.) (3, –3). Da dođemo od ishodišta (točke (0, 0)) do točke D, moramo se pomaknuti za 3 jedinične dužine udesno i 3 jedinične dužine prema dolje. Pomicanjem udesno dolazimo u točku (3, 0). Pomicanjem prema dolje dolazimo u točku (3, –3) i to su tražene koordinate.

26. 1.) 450; 30. Primijetimo da pomak za jedan kvadratić u smjeru osi apscisa odgovara pomaku od 50 km (jer pomak za dva kvadratića u smjeru osi apscisa odgovara pomaku od 100 km), te da pomak za jedan kvadratić u smjeru osi ordinata odgovara pomaku za 5 litara (jer pomak za dva kvadratića u smjeru osi ordinata odgovara pomaku za 10 litara).
U zadatku se zapravo traži određivanje sjecišta zadanih pravaca. Lako očitamo da se radi o točki $S = (450, 30)$. To znači da će oba automobila nakon prijeđenih 450 km (prva koordinata točke S) imati točno 30 litara goriva (druga koordinata točke S) u spremniku .

2.) $\frac{13}{9}$. Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 24, a drugu s $3 - y$. Dobivamo:

$$\begin{cases} 3 \cdot (x - 3 \cdot y) = 1 \cdot 8, \\ 2 \cdot x = 9 \cdot (3 - y). \end{cases}$$

Podijelimo drugu jednadžbu s 2:

$$\begin{cases} 3\cdot(x-3\cdot y)=1\cdot 8, \\ x=\dfrac{9}{2}\cdot(3-y). \end{cases}$$

Uvrstimo drugu jednadžbu u prvu jednadžbu:

$$3\cdot\left[\frac{9}{2}\cdot(3-y)-3\cdot y\right]=8,$$
$$3\cdot\left(\frac{27}{2}-\frac{9}{2}\cdot y-3\cdot y\right)=8,$$
$$\frac{81}{2}-\frac{27}{2}\cdot y-9\cdot y=8 \quad /\cdot 2$$
$$81-27\cdot y-18\cdot y=16,$$
$$-27\cdot y-18\cdot y=16-81,$$
$$-45\cdot y=-65 \quad /:(-45)$$
$$y=\frac{-65}{-45}=\frac{65:5}{45:5}=\frac{13}{9}.$$

27.

1.) $x < 7$ ili $x \in \langle -\infty, 7\rangle$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu sa 6. Dobivamo:

$$3\cdot(x+3)+2\cdot(x+2)>6\cdot(x+1),$$
$$3\cdot x+9+2\cdot x+4>6\cdot x+6,$$
$$3\cdot x+2\cdot x-6\cdot x>6-9-4,$$
$$(-1)\cdot x>-7.$$

Odatle dijeljenjem s (-1), uz obaveznu promjenu znaka nejednakosti, slijedi $x < 7$. Dakle, sva rješenja zadane nejednadžbe tvore skup $\langle -\infty, 7\rangle$.

2.) $\frac{1}{2}$. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 2. Dobijemo:

$$10\cdot 100^{1-x}=10^{6\cdot x-1}.$$

Budući da je $100 = 10^2$, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s bazom 10 primjenjujući pravilo za potenciranje potencije i pravilo za množenje potencija s jednakim bazama:

$$10 \cdot (10^2)^{1-x} = 10^{6 \cdot x - 1},$$
$$10 \cdot 10^{2 \cdot 1 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1},$$
$$10^{1 + 2 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1},$$
$$10^{3 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1}.$$

Izjednačavanjem eksponenata slijedi:

$$3 - 2 \cdot x = 6 \cdot x - 1,$$
$$-2 \cdot x - 6 \cdot x = -1 - 3,$$
$$(-8) \cdot x = -4.$$

Odatle dijeljenjem s (–8) dobivamo $x = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$.

3.) **32.** Imamo redom:

$$6 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x) - (2 \cdot x^2 + 8 \cdot x) \cdot (3 - 7 \cdot x) =$$
$$= 6 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 30 \cdot x - (6 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 14 \cdot x^3 - 56 \cdot x^2) =$$
$$= 6 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 6 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 14 \cdot x^3 + 56 \cdot x^2 =$$
$$= 20 \cdot x^3 + 32 \cdot x^2 + 6 \cdot x$$

Član koji sadrži x^2 jednak je $32 \cdot x^2$.

28. **1.)** **142**. Neka je z indeks zagađenja (iskazan u broju čestica na milijun čestica zraka), a t vrijeme iskazano u satima. Iz podataka u zadatku slijedi da je $z(t) = 25 + 13 \cdot t$, pri čemu vrijednosti varijable t nužno pripadaju skupu $[9]_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9\}$. Drugim riječima, domena funkcije z je skup $[9]_0$. Traženo zagađenje jednako je $z(9)$, tj.

$$z(9) = 25 + 13 \cdot 9 = 25 + 117 = 142.$$

Dakle, indeks zagađenja u 16 sati iznosi 142 čestice na milijun čestica zraka.

2.) **21**. Najveća vrijednost indeksa zagađenja zraka, prema **1.)**, iznosi 142 čestice na milijun čestica zraka. Od 16 sati poslijepodne do 7 sati ujutro prođe ukupno 8 + 7 = 15 sati. U tih 15 sati indeks zagađenja se smanjio za 142 – 25 = 117 čestica na milijun čestica zraka. To znači da se u jednom satu indeks zagađenja smanjio za $\frac{117}{15} = \frac{117:3}{15:3} = \frac{39}{5}$ čestica na milijun čestica zraka. Stoga je funkcija zavisnosti indeksa zagađenja o vremenu dana s $z(t) = 142 - \frac{39}{5} \cdot t$, gdje je $t \in [0, 15]$.

Preostaje odrediti $t_0 \in [0, 15]$ takav da je $z(t_0) = 103$. Dobivamo jednadžbu:

$$142 - \frac{39}{5} \cdot t_0 = 103.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&142 - \frac{39}{5} \cdot t_0 = 103, \\
&-\frac{39}{5} \cdot t_0 = 103 - 142, \\
&-\frac{39}{5} \cdot t_0 = -39 \quad / : \left(-\frac{39}{5}\right) \\
&t_0 = 5
\end{aligned}$$

Dakle, nakon $t_0 = 5$ sati (računajući od 16 sati), tj u $16 + 5 = 21$ sat indeks zagađenja iznosit će 103 čestice na milijun čestica zraka.