VELEUČILIŠTE U POŽEGI

Danijela Japarić

PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA PROBLEME PROMIDŽBE

Diplomski rad

Lipanj, 2014.

VELEUČILIŠTE U POŽEGI

SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STUDIJ

TRGOVINSKO POSLOVANJE

PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA PROBLEME PROMIDŽBE

DIPLOMSKI RAD

PREDMET: KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

Mentor: mr.sc. Bojan Kovačić

Student: Danijela Japarić

Matični broj studenta: 173

Požega, lipanj 2014.

SADRŽAJ:

1. UVOD

Ovaj rad bavi se primjenom linearnoga programiranja na rješavanje problema iz područja promidžbe. Nastanak linearnog programiranja je posljedica razvoja tzv. operacijskih istraživanja. Linearno programiranje je namijenjeno raspoređivanju oskudnih resursa s ciljem postizanja optimalnih rezultata. Cilj ovog rada je prikazati kako se pomoću matematičkih programa na računalu mogu rješavati ~~mnogi~~ problemi iz područja promidžbe.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. U drugom poglavlju opisat će se ukratko povijest linearnog programiranja, te će se navesti osobe koje su najviše doprinijele linearnom programiranju. Definirat će se i objasniti pojam linearnog programiranja. Objasnit će se osnovne postavke matematičkoga modeliranja problema, te navesti područja moguće primjene linearnoga programiranja. Prikazat će se i standardna formulacija problema linearnog programiranja.

U trećem poglavlju će se objasniti računalni program WinQSB i modul za linearno i cjelobrojno linearno programiranje. Detaljno će se opisati najvažnije procedure namijenjene rješavanju matematičkih modela ekonomskih problema pomoću toga programa. Prikazat će se unos polaznih podataka, mogućnost naknadne izmjene postavljenih uvjeta, pohrana modela i rezultata radi kasnijega korištenja i slično.

U četvrtom poglavlju prikazat će se rješavanje odabranih primjera problema promidžbe pomoću računalnog programa WinQSB, točnije njegovog modula za linearno i cjelobrojno linearno programiranje. Izložit će se osam odabranih primjera i detaljno opisati postupak dobivanja matematičkoga modela, kao i postupak rješavanja modela pomoću programa WinQSB. Kad god to bude moguće, izvršit će se analiza osjetljivosti rješenja dodavanjem novih početnih uvjeta. Interpretirat će se i neki korisni dodatni podaci dobiveni pomoću računalnoga programa WinQSB.

2. OPĆENITO O LINEARNOM PROGRAMIRANJU

2.1. POVIJEST LINEARNOG PROGRAMIRANJA

U povijesti, linearno programiranje javlja se tijekom drugog svjetskog rata u planiranju troškova za opremanje vojne sile. Ruski matematičar Kantorovich[1] prvi put je 1939. godine uveo pojam linearnog programiranja u rješavanju problema optimalne potrošnje resursa. [5] Poslije rata su nastavljena istraživanja s orijentacijom na organizacijska pitanja u okviru gospodarstva. U novije vrijeme razvijeno je posebno područje pod nazivom operacijska istraživanja koje obuhvaća veliki broj različitih optimizacijskih problema kao što su: optimalni proizvodni programi, optimalne zalihe, optimalno vrijeme zamjene proizvodnih sredstava, optimizacija transporta, organizacija, redova čekanja itd. Važnu ulogu u razvoju linearnog programiranja imali su matematičari: Dantizig, Foarier, Geuss, Gordon, Minkovski, Farkas i drugi. Najzapaženiju ulogu prema mnogim matematičarima imao je von Neumann[2] vezano uz definiranje i izgradnju pojma dualiteta. [3]

2.2. OSNOVE LINEARNOG PROGRAMIRANJA

Linearno programiranje je matematički postupak razvijen ponajprije za potrebe analitičke podrške u procesima odlučivanja. U tom je obliku postao jedan od najšire korištenih i najbolje poznatih alata na području menadžmenta. [1]

Linearno programiranje predstavlja matematičku analizu problema u kojoj se traži maksimalna (minimalna) vrijednost linearne funkcije pri zadanim ograničavajućim uvjetima. Pri promatranju ekonomskih problema linearni sustavi opisuju uvjete u kojima se odvijaju ekonomski procesi, dok linearna funkcija opisuje određeni zahtjev (cilj) koji se želi postići pod tim uvjetima. U procesu linearnoga programiranja se formiraju odgovarajući sustavi jednadžbi i nejednadžbi. Njihovim rješavanjem različitim metodama dobivaju se optimalna rješenja. Linearno programiranje rješava velik broj ekonomskih problema, a mogu se odnositi na proizvodnju, sirovine, radnu snagu, tržište, ponudu, potražnju, uvoz, izvoz. [3]

[1] Leonid Vitalijevič Kantorovič (1912. – 1986.), ruski matematičar i ekonomist.
[2] John von Neumann (1903. – 1957.), američki matematičar mađarskoga porijekla.

Primarni zadatak linearnog programiranja je odrediti maksimum (minimum) linearne funkcije ovisno o nizu postavljenih uvjeta. Neki uvjeti mogu zahtijevati npr. nenegativnost varijabli u matematičkom modelu i zadovoljavanje ograničenja zapisanih u obliku linearnih nejednadžbi.

Da bi se zadao problem matematičkog programiranja mora se:

1. Definirati funkciju cilja
2. Formirati skup ograničenja.
3. Odabrati jedno ili više optimalnih rješenja. [8]

Ekonomski problem koji ima ove tri komponente može se definirati kao problem matematičkog programiranja. Kriterij problema linearnog programiranja može se izraziti u naturalnim, novčanim ili drugim pokazateljima, ovisno o prirodi promatranoga problema. [9]

U različitim financijskim analizama čest slučaj je da je potrebno minimizirati ili maksimizirati neku linearnu funkciju. Najčešće tu podrazumijevamo smanjenje troškova ili povećanje profita. Naravno, želje su u tom slučaju usmjerene prema njihovim ekstremima, tj. minimalnim troškovima i maksimalnom profitu. Da bi mogli pristupiti traženju ekstrema, prvo treba definirati linearnu funkciju (funkciju cilja) koja je općenito tipa:

min ili max $z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + c_4x_4 + \ldots + c_nx_n$

gdje su:

$x_j = 1, 2, 3\ldots, n$ varijable koje se nazivaju varijable odlučivanja

uz zadovoljavanje sljedećih ograničenja:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n \leq b_3$$

$$\ldots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + a_{mn}x_n \leq b_m$$

gdje su a_{ij}, b_i i c_j realne konstane, za svaki i =1,…, m i svaki j = 1, …, n, pri čemu su $m,n \in$ **N.**

Neka ograničenja mogu biti prilično jednostavna (npr. neka varijabla odlučivanja ne može biti strogo negativna). Drugi slučajevi ograničenja mogu biti različiti i ne moraju se svesti na samo na relaciju „biti manji ili jednak“ (≤), već mogu sadržavati stroga jednakost (=) ili relaciju „biti veći ili jednak“ (≥). Svako ograničenje je linearna kombinacija varijabli odlučivanja. Najčešći slučaj je da sve varijable odlučivanja poprimaju nenegativne vrijednosti, pa se ostalim ograničenjim dodaje tzv. prirodni uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \geq 0$$

Ovo je tzv. standardna formulacija linearnog programiranja. Definirana je s funkcijom cilja, n varijabli odlučivanja i m ograničenja. Prijedlog specifičnih vrijednosti varijabli odlučivanja naziva se rješenje problema linearnoga programiranja. Ukoliko to rješenje $\left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ zadovoljava sva ograničenja, govori se o dopustivom rješenju. Rješenje se naziva optimalnim ako je dopustivo i ako minimizira/maksimizira funkciju cilja. [7]

U slučaju dviju varijabli (n = 2), grafička metoda rješavanja može relativno jednostavno dovesti do optimalnog rješenja bez obzira na broj postavljenih ograničenja u modelu linearnoga programiranj. Dodatna ograničenja mogu samo povećati broj kandidata za optimalno rješenje, ali ne i dimenziju prostora u kojemu se promatra problem. Međutim, ako se radi o n = 3, metoda postaje nespretna jer će se zahtijevati trodimenzionalni grafički prikaz. Za slučaj $n \geq 4$ metoda je potpuno neprimjerena za primjenu. [2]

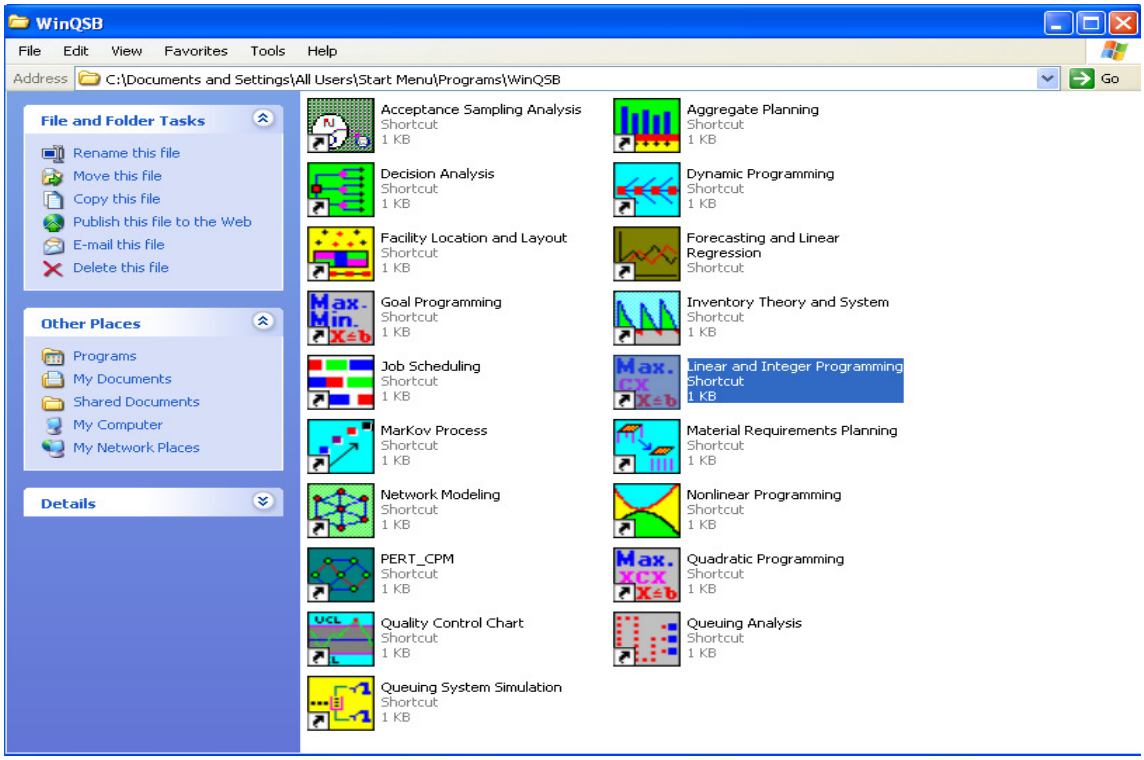
3. RAČUNALNI PROGRAM WINQSB

WinQSB je programska podrška za rješavanje problema iz područja operacijskih istraživanja, poslovnog odlučivanja i sl. [6] Sastoji se od ukupno devetnaest aplikacijskih modula. Jedan od modula je linearno i cjelobrojno linearno programiranje LP-ILP. Taj će model biti opisan u nastavku, a koristit će se za rješavanje odabranih primjera iz područja promidžbe.

3.1. Modul za linearno i cjelobrojno linearno programiranje (Linear and Integer Programming)

Da bi se matematički model problema linearnoga programiranja mogao riješiti pomoću modula LP-ILP, mora se pokrenuti računalni program WinQSB, zatim kliknuti na linearno i cjelobrojno linearno programiranje (vidjeti Sliku 1.)

Slika 1. Pokretanje aplikacijskog modula za linearno i cjelobrojno linearno programiranje



Kad se pokrene modul *Linear and Integer Programming* treba kliknuti na opciju „*File*“ pa „*New Problem*“ (vidjeti Sliku 2.).

Slika 2. Odabir za rješavanje novog zadatka

Tako će se otvoriti dijaloški okvir za unos početnih podataka o problemu kojega želimo riješiti (vidjeti Sliku 3.) U dobivenu tablicu upisuju se odgovarajući podaci.

U pravokutnik pored natpisa *Problem Title* upisuje se naziv problema (npr. Primjer 1, Problem 1 i slično).

U pravokutnik pored natpisa *Number of Variables* upisuje se broj nezavisnih varijabli.

U pravokutnik pored natpisa *Number of constraints* upisuje se broj uvjeta, odnosno ograničenja koje problem zahtjeva.

U izborniku *Objective Criterion* treba izabrati jednu od dvije ponuđene opcije ovisno o zahtjevu funkcije cilja:

- *Maximization* ako se u problemu zahtijeva maksimizacija funkcije cilja,
- *Minimization* ako se u problemu zahtijeva minimizacija funkcije cilja.

U izborniku *Data Entry Format* također treba odabrati jednu od dvije opcije i to:

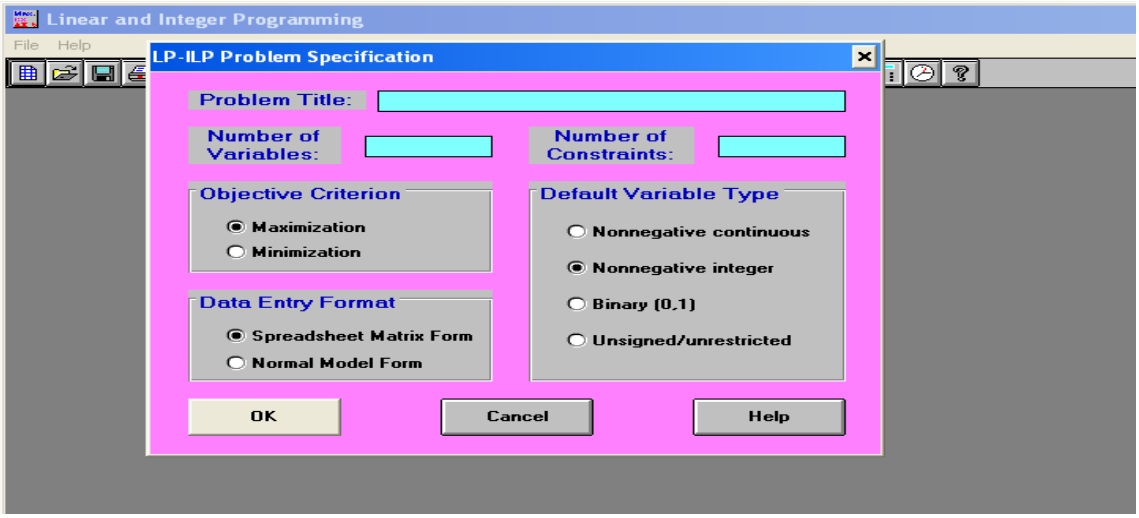
- *Spreadsheet Matrix Form* ako se želi polazne podatke unijeti kao proširene tablice zapisane u matričnom obliku (kao proračunske tablice MS Excela),
- *Normal Model Form* ako se želi polazne podatke unijeti u „obične“ tablice, odnosno upravo u onom obliku kakvom su postavljeni u matematičkom modelu.

U izborniku *Default Variable Type* treba odabrati jedan od četiri moguća tipa varijable odlučivanja, i to:

- *Nonnegative continous* ako vrijednosti varijabli u matematičkom modelu mogu biti bilo koji (pozitivni ili negativni) decimalni brojevi, iracionalni brojevi i sl., odnosno ako se u modelu pojavljuje najmanje jedna varijabla čije vrijednosti mogu biti strogo negativne,
- *Nonnegative integer* ako vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi,
- *Binary* ako vrijednosti svih varijabli mogu biti isključivo elementi skupa {0, 1}.

Unaprijed zadane postavke su *Maximization, Spreadsheet Matrix Form* i *Nonnegative continous.* U praksi se najčešće javljaju problemi maksimizacije funkcije cilja čije su varijable nenegativni realni brojevi. Zapis funkcije cilja i uvjeta u matričnom obliku lakši je i pregledniji od zapisa u „običnom“ tabličnom obliku.

Slika 3. Tablica za unos podataka o matematičkom modelu

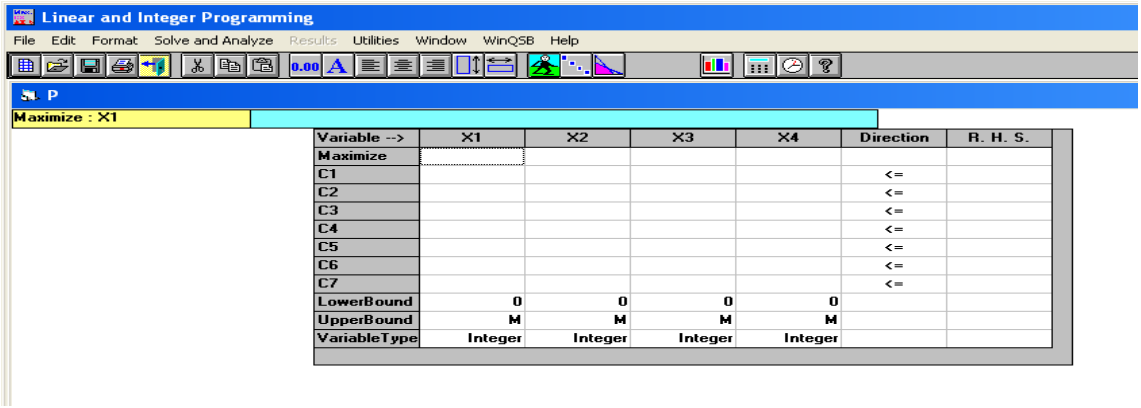


Nakon unosa podataka klikom na „OK“ dobiva se tablica za unos koeficijenata koja je prikazana na Slici 4.

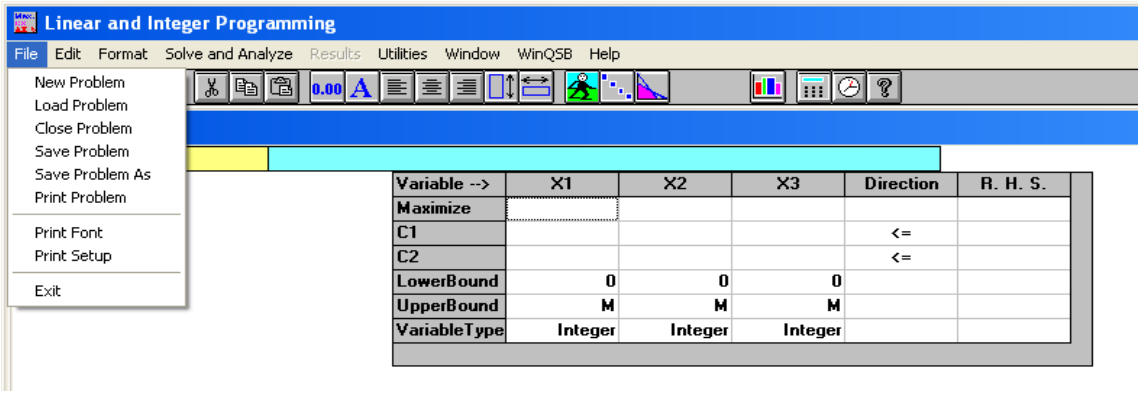
U retku *Variable* upisani su nazivi nezavisnih varijabli. WinQSB pretpostavlja da su varijable označene sa X1, X2 itd. U retku *Maximize/Minimize* treba upisati funkcije cilja tako da prvi koeficijent bude onaj uz varijablu X1, drugi onaj uz varijablu X2, itd. [6]

Klikom na opciju „*File*“ u glavnom izborniku otvara se padajući izbornik koji nudi opcije za spremanje tablice, traženje spremljenih tablica itd. (vidjeti Sliku 5.)

Slika 4. Tablica za unos koeficijenata



Slika 5. Izbornik „*File*“ i njegove opcije

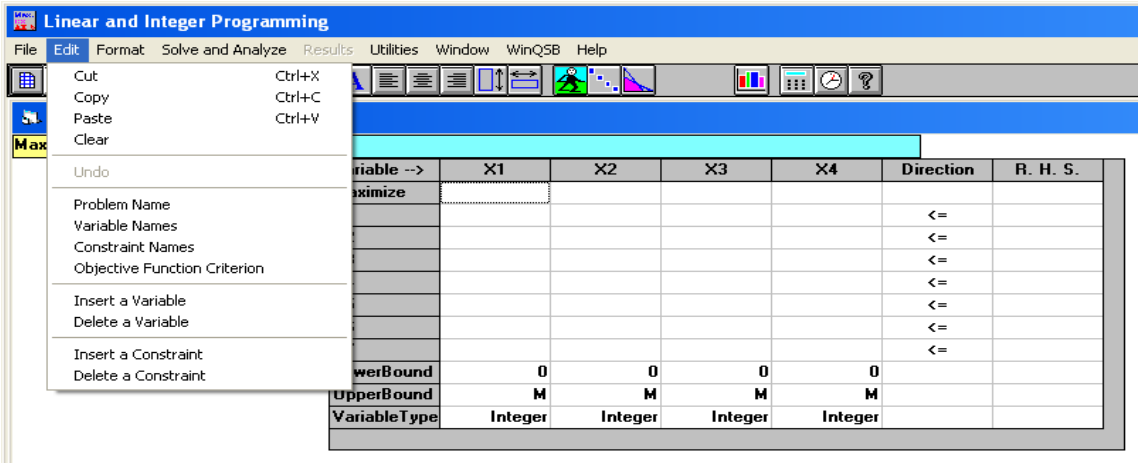


Klikom na opciju *„Edit“* u glavnom izborniku otvara se padajući izbornik koji nudi opcije za preimenovanje varijable, dodavanje novih uvjeta, brisanje postojećih uvjeta, dodavanje novih varijabli i brisanje postojećih varijabli. (vidjeti Sliku 6.)

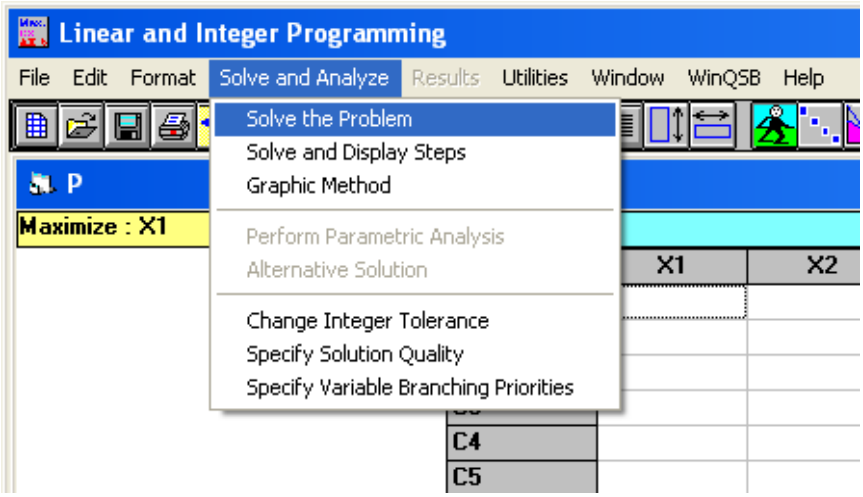
Opciju za rješavanje problema može se dobiti klikom na ikonicu „čovječuljka“ ili klikom u glavnom izborniku na *„Solve and Analyze“* pa odabirom opcije *„Solve the Problem“* kao što je prikazano na slici 7.

Ako je pronađeno optimalno rješenje, pojavljuje se obavijest koja je prikazana na slici 8.

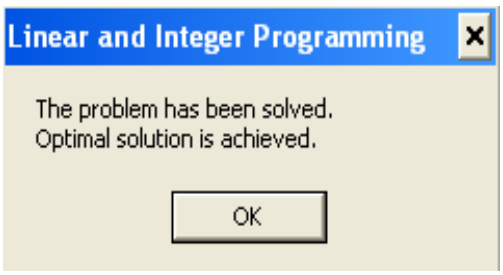
Slika 6. Izbornik *„Edit“* i njegove opcije



Slika 7. Odabir opcije za rješavanje problema klikom na *„Solve and Analyze“*

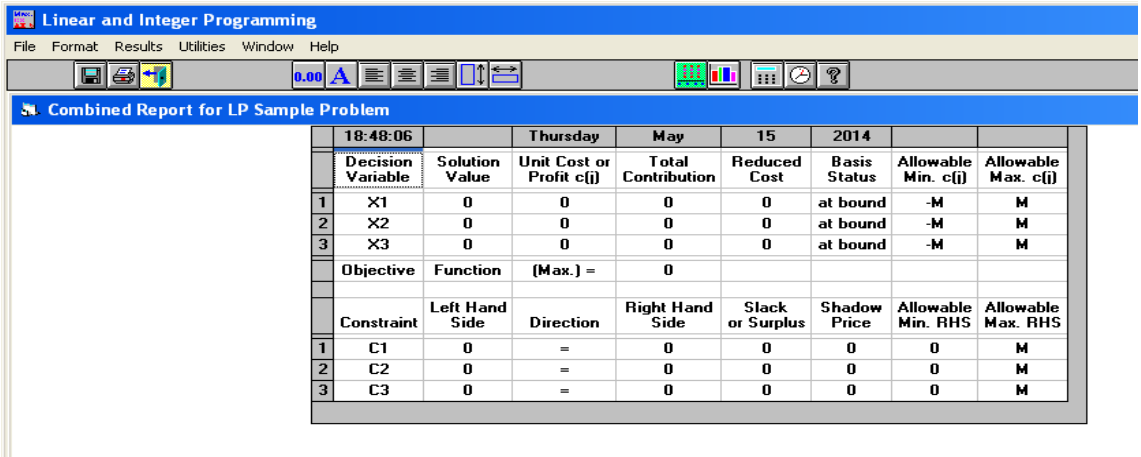


Slika 8. Obavijest da je rješenje pronađeno



Klikom miša na „OK“ dobiva se tablica s optimalnim rješenjima koja je prikazana na slici 9.

Slika 9. Tablica s optimalnim rješenjima



	18:48:06		Thursday	May	15	2014		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	0	0	0	at bound	-M	M
2	X2	0	0	0	0	at bound	-M	M
3	X3	0	0	0	0	at bound	-M	M
	Objective	Function	(Max.) =	0				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	0	=	0	0	0	0	M
2	C2	0	=	0	0	0	0	M
3	C3	0	=	0	0	0	0	M

U prvom stupcu izlazne tablice ispisuju se nazivi nezavisnih varijabli.

U drugom stupcu ispisuju se optimalne vrijednosti nezavisnih varijabli.

U retku *Objective Function* ispisuje se optimalna vrijednost funkcije cilja. .

U stupcu *Constraints* ispisuje se oznaka uvjeta redoslijedom kojim su upisane u tablicu ulaznih podataka.

U stupcu *Left Hand Side* ispisuju se vrijednosti koje se dobiju uvrštavanjem optimalnih vrijednosti nezavisnih varijabli u svaki pojedini uvjet.

U stupcu *Right Hand Side* ispisuje se vrijednost na desnoj strani svakog pojedinog uvjeta.

U stupcu *Slack or Surplus* ispisuju se razlike vrijednosti iz stupca *Left Hand Side* i vrijednosti iz stupca *Riht Hand Side.* Ako je ta razlika jednaka 0, uvjet je zadovoljen tako da vrijedi znak jednakosti. Vrijednost različita od 0 znači da postoji „suvišak“ (ako uvjet sadrži znak >=) ili „manjak“ (ako uvjet sadrži znak <=).

Primjena tih opcija bit će prikazana u idućem poglavlju. [6]

4. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA NA PROBLEME PROMIDŽBE

4.1. Primjer 1.

Kockarnica „Kod veseloga Kockića“ odlučila je promovirati kockarsku zabavu putem lokalnih i regionalnih medija. Menadžeri kockarnice odlučili su za promidžbu potrošiti 8000 n.j.[3] tjedno, i to na četiri tipa promidžbenih poruka: TV spotovi, novinski oglasi i dvije vrste radijskih oglasa. Cilj promidžbe kockarnice jest raznim vrstama oglasa doprijeti do što je više moguće potencijalnih klijenata kockarnice. U sljedećoj je tablici za svaki pojedini tip promidžbene poruke naveden broj potencijalnih klijenata kockarnice do kojih dospijeva ta poruka. U tabeli su također navedeni i jedinični troškovi pojedine poruke i najveći tjedni broj oglasa koji se mogu naručiti.

Tablica 1. Osnovni podaci za Primjer 1.

Tip promidžbene poruke	Broj ljudi do kojih dopire poruka	Jedinični trošak poruke [n.j.]	Najveći tjedni broj oglasa
TV spot (1 min)	5000	800	12
Dnevne novine (oglas-cijela stranica)	8500	925	5
Radio spot (30 sekundi, udarno vrijeme)	2400	290	25
Radio spot (jedna minuta, poslijepodne)	2800	380	20

Ugovorni aranžmani zahtijevaju da se radio spotovi emitiraju najmanje 5 puta tjedno. Menadžment kockarnice inzistira da se za obje vrste radijskih promidžbenih poruka ne može potrošiti više od 1800 n.j. tjedno. Treba napraviti tjedni plan oglašavanja tako da ukupan broj ljudi do kojih će doprijeti sve promidžbene poruke bude maksimalan. Pritom nije nužno platiti poruku svakoga pojedinoga tipa, tj. može postojati barem jedan tip promidžbene poruke koji neće biti iskorišten.

[3] Skraćenica za: novčanih jedinica.

Rješenje:

Neka su:

x_1 = tjedni broj TV-spotova;

x_2 = tjedni broj oglasa u dnevnim novinama;

x_3 = tjedni broj radio-spotova u trajanju od 30 sekundi;

x_4 = tjedni broj radio spotova u trajanju od jedne minute.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_1 *TV-spotova* jednak je $5000 \cdot x_1$, ukupan broj ljudi koje će vidjeti x_2 *oglasa u dnevnim novinama* jednak je $8500 \cdot x_2$, ukupan broj ljudi koji će slušati x_3 *radio spotova u trajanju od* 30 sekundi jednak je $2400 \cdot x_3$, ukupan broj ljudi koje će slušati x_4 *radio spotova u trajanju od jedne minute* jednak je $2800 \cdot x_4$. Stoga ukupan broj ljudi koji će pogledati/slušati sve vrste oglasa iznosi:

$$5000 \cdot x_1 + 8500 \cdot x_2 + 2400 \cdot x_3 + 2800 \cdot x_4.$$

Taj broj ljudi potrebno je maksimizirati.

Iz zahtjeva da se tjedno ne može emitirati više od 12 *TV-spotova* zaključuje se da mora vrijediti nejednakost:

$$x_1 \leq 12.$$

Iz zahtjeva da se *oglasi u novinama* objavljuju najviše 5 puta tjedno zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_2 \leq 5.$$

Iz zahtjeva da se *radio spot od* 30 sekundi emitira najviše 25 puta tjedno zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_3 \leq 25.$$

Iz zahtjeva da se *radio spot od jedne minute* emitira najviše 20 puta tjedno zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_4 \leq 20.$$

Cijena x_1 TV-*spotova* iznosi $800 \cdot x_1$ n.j. Cijena x_2 *oglasa u novinama* iznosi $925 \cdot x_2$ n.j. Cijena x_3 *radio spotova u trajanju od* 30 sekundi iznosi $290 \cdot x_3$ n.j. Cijena x_4 *radio spotova u trajanju od jedne minute* iznosi $380 \cdot x_4$ n.j. Stoga ukupna cijena svih vrsta oglasa iznosi $800 \cdot x_1 + 925 \cdot x_2 + 290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4$ n.j. Budući da je za oglašavanje raspoloživi tjedni budžet od 8000 n.j., dobije se uvjet:

$$800 \cdot x_1 + 925 \cdot x_2 + 290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 8000.$$

Ukupan tjedni broj svih *radio-spotova* jednak je $x_3 + x_4$. Iz zahtjeva da taj broj mora biti barem 5 slijedi:

$$x_3 + x_4 \geq 5.$$

Cijena x_3 *radio spotova u trajanju od* 30 sekundi iznosi $290 \cdot x_3$ n.j. Cijena x_4 *radio spotova u trajanju od jedne minute* iznosi $380 \cdot x_4$ n.j. Stoga ukupna cijena svih *radio-spotova* iznosi $290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4$ n.j. Iz zahtjeva da je za *radio spotove* maksimalni raspoloživi tjedni budžet 1800 n.j. slijedi:

$$290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 1800.$$

Vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi jer broj oglasa ne može biti „pravi“ decimalan broj (npr. nije moguće platiti 1.34 oglasa). Zbog pretpostavke da nije nužno koristiti sve moguće vrste promidžbenih poruka dozvoljava se mogućnost da vrijednost neke od varijabli bude jednaka nuli. Stoga mora vrijediti uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3\ldots\}.$$

Tako se dobiva sljedeći matematički model:

max. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5000 \cdot x_1 + 8500 \cdot x_2 + 2400 \cdot x_3 + 2800 \cdot x_4$
pod uvjetima:

$x_1 \leq 12$

$x_2 \leq 5$

$x_3 \leq 25$

$x_4 \leq 20$

$800 \cdot x_1 + 925 \cdot x_2 + 290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 8000$

$x_3 + x_4 \geq 5$

$290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 1800$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0$

Treba pokrenuti potprogram *Linear and Integer Programming.* Za rješavanje zadatka odabere se opcija *File – New problem*. Upisuju se sljedeći podaci:

- Naziv problema: Primjer 1,
- Broj varijabli: 4,
- Broj uvjeta: 3.

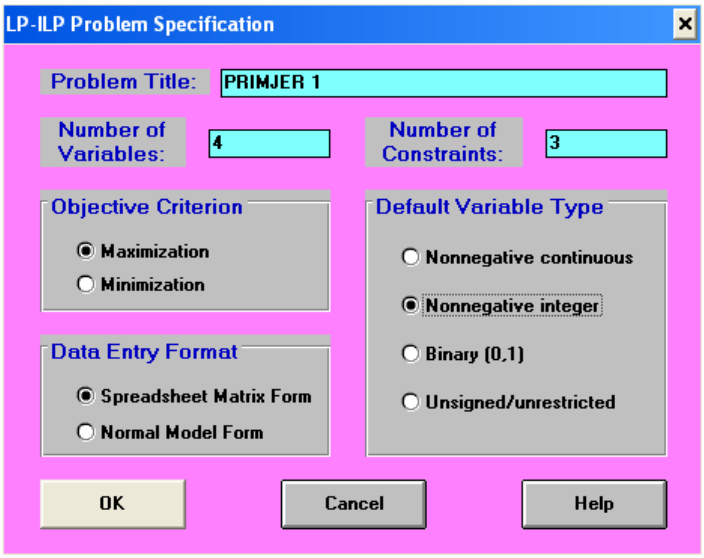
Prva četiri uvjeta iz matematičkoga modela bit će upisana u retku *UpperBound* koji označava najveću dozvoljenu vrijednost svake nezavisne varijable.

Zatim treba odabrati jedno od ponuđenih opcija:

- *Maximization* (u ovom primjeru se radi o maksimizaciji osoba do kojih dopire promidžbena poruka),
- *Nonnegative integer* (radi se o nenegativnim cijelim brojevima),
- *Spreadsheet Matrix Form* (ulazni podaci bit će prikazani u matričnom obliku).

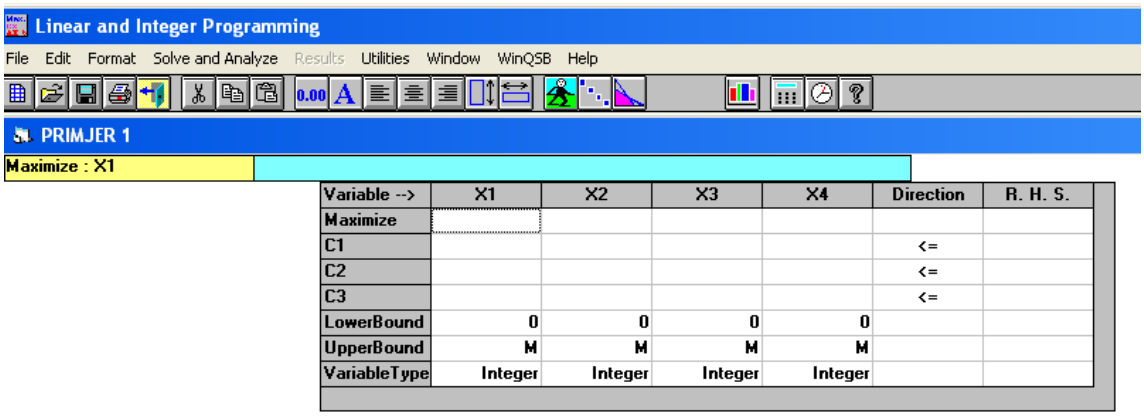
Tako se dobiva tablica prikazana na idućoj slici.

Slika 10. Ulazni podatci za matematički model iz Primjera 1.



Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata uz varijable iz modela. Tablica za unos podataka prikazana je na slici 11 .

Slika 11. Tablica za unos podataka iz Primjera 1.



Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Maximize						
C1					<=	
C2					<=	
C3					<=	
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer		

U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima. U redak *Maximize* unose se koeficijenti iz funkcije cilja. U stupac X1 upisuje se 5000, u stupac X2 8500, u stupac X3 2400, a u stupac X4 2800.

U redak C1 unose se koeficijenti uz varijable x_1, x_2, x_3 i x_4 u petom uvjetu. U stupac X1 upisuje se 800, u stupac X2 925, u stupac X3 290, u stupac X4 380, a u stupac R.H.S. 8000.

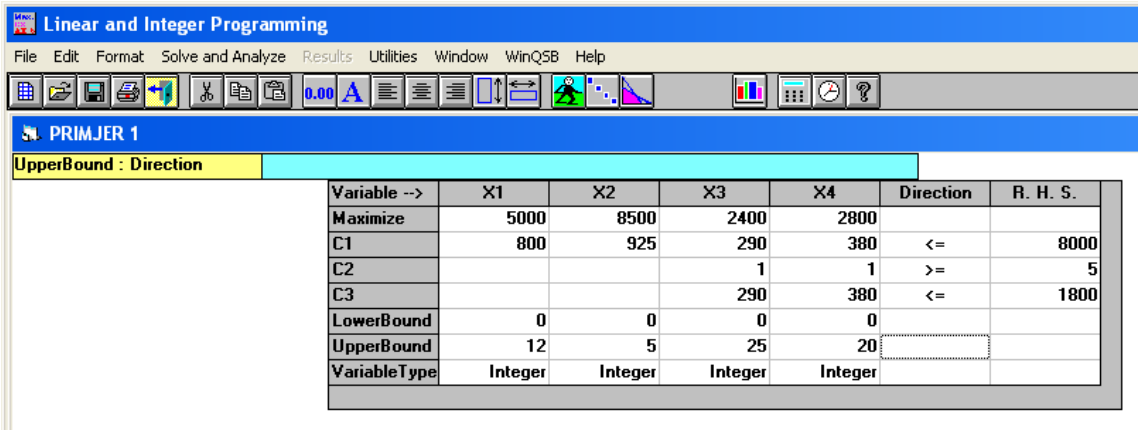
U redak C2 unosi se šesti uvjet. U stupce X3 i X4 upisuje se 1, a u stupac R.H.S. upisuje se 5. Ostala polja u tom retku treba ostaviti prazna. Dvostrukim klikom miša na znak <= u stupcu *Direction* treba promijeniti taj znak u >=.

U redak C3 unosi se sedmi uvjet. U stupac X3 upisuje se 290, u stupac X4 380, a u stupac R.H.S. upisuje se 1800. Ostala polja u tom retku treba ostaviti prazna.

U redak *UpperBound* upisuju se najveće dozvoljene vrijednosti nezavisnih varijabli. Te vrijednosti definirane su prvim četirima uvjetima iz matematičkoga modela. U stupac X1 upisuje se 12, u stupac X2 5, u stupac X3 25, a u stupac X4 20.

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 12.

Slika 12. Tablica s upisanim podatcima za matematički model iz Primjera 1.



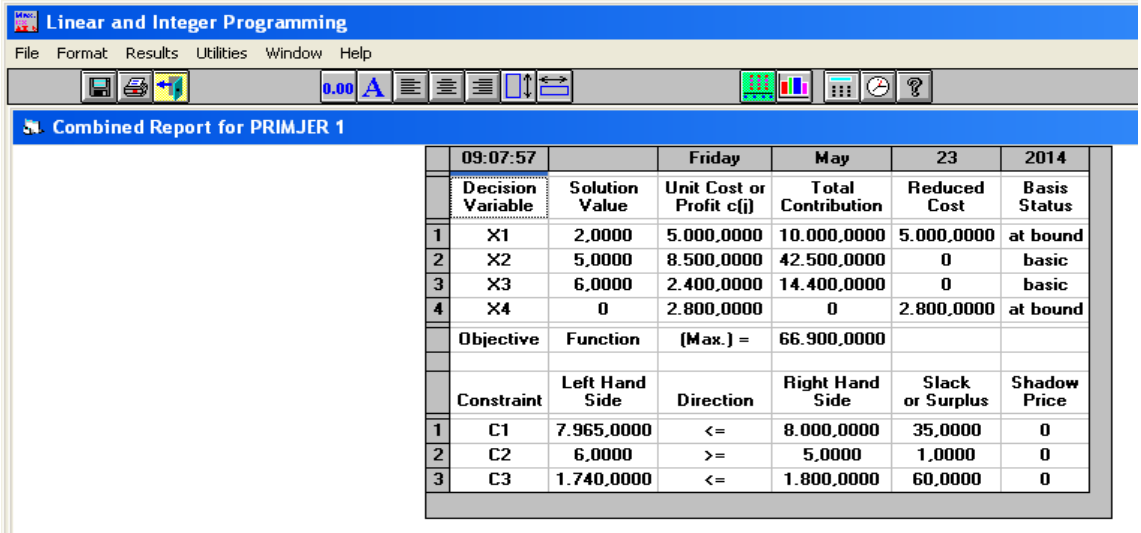
Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Maximize	5000	8500	2400	2800		
C1	800	925	290	380	<=	8000
C2			1	1	>=	5
C3			290	380	<=	1800
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	12	5	25	20		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer		

Radi rješavanja Primjera 2 pohrani se dobiveni model pod nazivom Primjer 1. Treba odabrati *File name* i upisati Primjer 1. Klikne se na OK.

Klikom na ikonicu „čovječuljka“ neposredno ispod natpisa *WinQSB* dobiva se tablica sa rješenjima prikazana na Slici 13. Iz nje treba očitati optimalno rješenje ovog problema, te optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Optimalne vrijednosti varijabli x_1, x_2, x_3, x_4 očitavaju se iza stupca *Solution Value*, a optimalnu vrijednost funkcije cilja iz retka *Objective Function (Max.)=.*

Slika 13. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 1.



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for PRIMJER 1

	09:07:57		Friday	May	23	2014
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	2,0000	5.000,0000	10.000,0000	5.000,0000	at bound
2	X2	5,0000	8.500,0000	42.500,0000	0	basic
3	X3	6,0000	2.400,0000	14.400,0000	0	basic
4	X4	0	2.800,0000	0	2.800,0000	at bound
	Objective	Function	(Max.) =	66.900,0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	7.965,0000	<=	8.000,0000	35,0000	0
2	C2	6,0000	>=	5,0000	1,0000	0
3	C3	1.740,0000	<=	1.800,0000	60,0000	0

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (2, 5, 6, 0), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 66900. Zaključuje se da je optimalan tjedni plan oglašavanja sljedeći: platiti 2 TV spota, 5 oglasa u dnevnim novinama i 6 radio spotova u trajanju od 30 sekundi. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 66900.

Vrijednost 7 965 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će se za tjedno oglašavanje potrošiti 7965 od 8000 raspoloživih n.j. Vrijednost 6 znači da će tjedno biti emitirano 6 radio spotova. Vrijednost 1740 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će se za tjedno emitiranje *radio spotova* potrošiti 1740 n.j. od 1800 raspoloživih n.j.

4.2. Primjer 2.

Treba riješiti prethodni primjer uz dodatni uvjet da se mora uplatiti barem jedan oglas svake pojedine vrste. Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja, odnosno optimalnih vrijednosti nezavisnih varijabli.

Rješenje:

Zbog dodatnoga uvjeta da se mora uplatiti barem jedan oglas svake pojedine vrste, vrijednost nijedne varijable odlučivanja ne može biti jednaka nuli. Stoga umjesto posljednjega uvjeta iz matematičkoga modela u Primjeru 1. mora vrijediti nejednakost

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3., \ldots\}.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 1. ostaju nepromijenjene. Tako dobivamo matematički model:

max. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 5000 \cdot x_1 + 8500 \cdot x_2 + 2400 \cdot x_3 + 2800 \cdot x_4$

pod uvjetima:

$x_1 \leq 12$

$x_2 \leq 5$

$x_3 \leq 25$

$x_4 \leq 20$

$800 \cdot x_1 + 925 \cdot x_2 + 290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 8000$

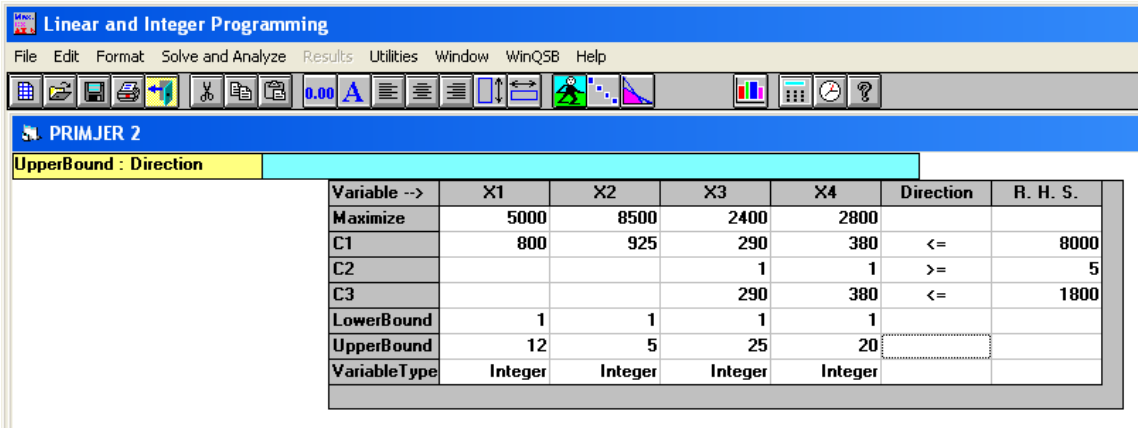
$x_3 + x_4 \geq 5$

$290 \cdot x_3 + 380 \cdot x_4 \leq 1800$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}$

Primjer 1. je pohranjen u memoriji, pa ga treba ponovo otvoriti s naredbom *Load problem* koji se nalazi u izborniku *File.* Retci C1, C2, C3 ostaju nepromijenjeni. Treba promijeniti podatke u retku *LowerBound*. U tom retku umjesto nula u stupcima X1, X2, X3 i X4 upisuju se jedinice. Dobiva se tablica prikazana na Slici 14.

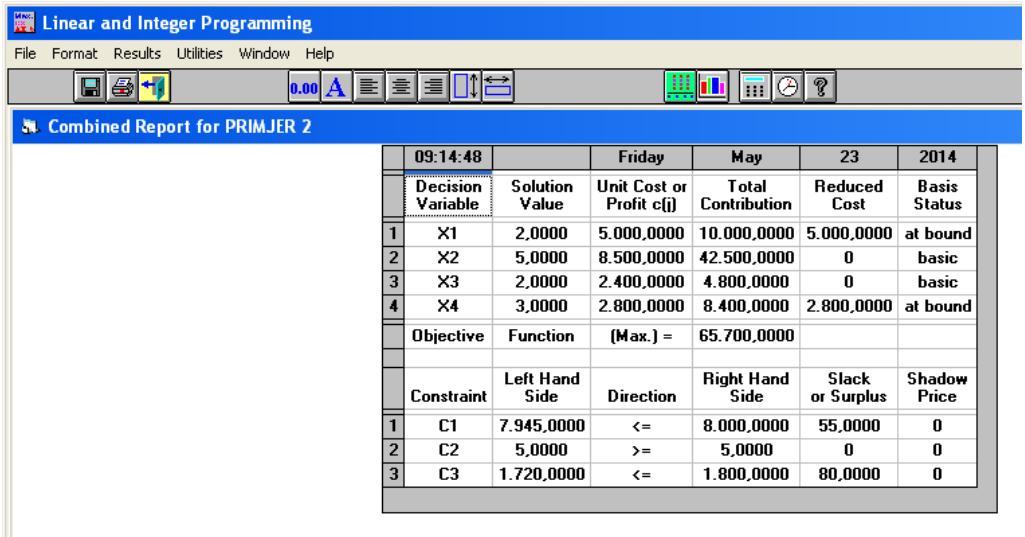
Slika 14. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 2.



Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Maximize	5000	8500	2400	2800		
C1	800	925	290	380	<=	8000
C2			1	1	>=	5
C3			290	380	<=	1800
LowerBound	1	1	1	1		
UpperBound	12	5	25	20		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer		

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. Dobiva se tablica prikazana na Slici 15.

Slika 15. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 2.



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for PRIMJER 2

	09:14:48		Friday	May	23	2014
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	2,0000	5.000,0000	10.000,0000	5.000,0000	at bound
2	X2	5,0000	8.500,0000	42.500,0000	0	basic
3	X3	2,0000	2.400,0000	4.800,0000	0	basic
4	X4	3,0000	2.800,0000	8.400,0000	2.800,0000	at bound
	Objective	Function	(Max.) =	65.700,0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	7.945,0000	<=	8.000,0000	55,0000	0
2	C2	5,0000	>=	5,0000	0	0
3	C3	1.720,0000	<=	1.800,0000	80,0000	0

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (2, 5, 2, 3), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi 65700. Dobiveni optimalan tjedni plan promidžbenih poruka je: platiti 2 TV spota, 5 oglasa u dnevnim novinama, 2 radio spota u trajanju od 30 sekundi, te 3 radio spota u trajanju od jedne minute. Optimalan broj mogućih klijenata iznosi 65700.

Primjećuje se da su optimalne vrijednosti varijabli x_1 i x_2 ostale nepromijenjene. Optimalna vrijednost varijable x_3 smanjila se za 4, odnosno za $\frac{4}{6} \cdot 100 \approx$ 66.67%. Optimalna vrijednost varijable x_4 povećala se za 2 (relativna promjena nije definirana jer je početna optimalna vrijednost te varijable bila 0). Optimalna vrijednost funkcije cilja smanjila se za 1200, odnosno za $\frac{1200}{66900} \cdot 100 \approx 1.79\,\%$.

Vrijednost 7945 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će se za tjedno oglašavanje potrošiti 7945 od 8000 raspoloživih n.j. Vrijednost 5 znači da će tjedno biti emitirano 5 *radio spotova*. Vrijednost 1720 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će se za tjedno emitiranje *radio spotova* potrošiti 1720 n.j. od 1800 raspoloživih n.j.

Može se primijetiti da će se za oglašavanje potrošiti 20 n.j. manje, odnosno za $\frac{20}{1965} \cdot 100 \approx 1.02\,\%$ manje nego u Primjeru 1. Emitirat će se 1 *radio spot* manje,

odnosno za $\frac{1}{6} \cdot 100 \approx 16.67\ \%$ manje nego u Primjeru 1. Za emitiranje *radio spotova* će se potrošiti 20 n.j. manje, odnosno za $\frac{20}{1740} \cdot 100 \approx 1.15\ \%$ manje nego u Primjeru 1.

4.3. Primjer 3.

Agencija „Istraživalić plus d.o.o.“ iz Frkljevaca je agencija za marketinško i računalno istraživanje koja, između ostalog, provodi istraživanje potrošača za svoje klijente. Jedan od klijenata je izdavačka kuća „Njuškalić d.o.o.“ iz Babine Grede koja periodično provodi političke ankete o pitanjima od općeg društvenoga značaja. U namjeri da se dobiju statistički pouzdani rezultati o stavu prema prijedlogu novoga zakona o poreznim opterećenjima, definirano je da pripadna anketa mora zadovoljavati sljedeće zahtjeve:

1. Treba ispitati ukupno barem 2300 domaćinstava.

2. Potrebno je ispitati barem 1000 domaćinstava u kojima "glava obitelji" ima najviše 30 godina.

3. Potrebno je ispitati barem 600 domaćinstava u kojima "glava obitelji" ima između 31 i 50 godina.

4. Potrebno je osigurati da barem 15% svih ispitanih domaćinstava bude u pograničnim područjima.

5. Potrebno je osigurati da u skupu svih domaćinstava čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu ne bude više od 20% domaćinstava iz pograničnih područja.

6. Anketa se provodi isključivo osobno, tj. nije moguće odgovaranje u nečije ime, umjesto odsutnoga člana obitelji itd.

Tablica 2. Osnovni podaci za Primjer 3.

	Troškovi po domaćinstvu [n.j.]		
Područje	Dob „glave obitelji“ najviše 30 godina	Dob „glave obitelji“ između 31 i 50 godina	Dob „glave obitelji“ barem 51 godinu
Pogranično	7.5	6.8	5.5

Ostalo (negranično)	6.9	7.25	6.1

Cilj agencije je odrediti broj domaćinstava u svakoj kategoriji (dob i regija) tako da svi postavljeni zahtjevi budu zadovoljeni, a ukupni troškovi anketiranja budu minimalni.

Rješenje:

Neka su:

x_1 = broj domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina;
x_2 = broj domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina;
x_3 = broj domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu;
x_4 = broj domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina;
x_5 = broj domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina;
x_6 = broj domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu.

Troškovi anketiranja *domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina* iznose $7.5 \cdot x_1$ n.j. Troškovi anketiranja *domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina* iznose $6.8 \cdot x_2$ n.j. Troškovi anketiranja *domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu* iznose $5.5 \cdot x_3$ n.j. Troškovi anketiranja *domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina* iznose $6.9 \cdot x_4$ n.j. Troškovi anketiranja *domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina* iznose $7.25 \cdot x_5$ n.j. Troškovi anketiranja *domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu* iznose $6.1 \cdot x_6$ n.j. Stoga ukupni troškovi anketiranja svih domaćinstava iznose:

$$7.50 \cdot x_1 + 6.80 \cdot x_2 + 5.50 \cdot x_3 + 6.90 \cdot x_4 + 7.25 \cdot x_5 + 6.10 \cdot x_6 \text{ n.j.}$$

Te troškove je potrebno minimizirati.

Iz zahtjeva da se mora anketirati najmanje 2300 domaćinstava slijedi da mora vrijediti nejednakost:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2300.$$

Iz zahtjeva da je potrebno ispitati barem *1000 domaćinstava u kojima "glava obitelji" ima najviše 30 godina* slijedi da mora vrijediti nejednakost:

$$x_1 + x_4 \geq 1000.$$

Iz zahtjeva da je potrebno ispitati barem *600 domaćinstava u kojima "glava obitelji" ima između 31 i 50 godina* slijedi da mora vrijediti nejednakost:

$$x_2 + x_5 \geq 600.$$

Iz zahtjeva da je potrebno osigurati da barem *15% svih ispitanih domaćinstava bude u pograničnim područjima* slijedi da mora vrijediti nejednakost:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 0.15\ (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6).$$

Sređivanjem te nejednakosti dobiva se:

$$0.85 \cdot x_1 + 0.85 \cdot x_2 + 0.85 \cdot x_3 - 0.15 \cdot x_4 - 0.15 \cdot x_5 - 0.15 \cdot x_6 \geq 0.$$

Iz zahtjeva da je potrebno osigurati da u *skupu svih domaćinstava čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu ne bude više od 20% domaćinstava iz pograničnih područja* slijedi da mora vrijediti nejednakost:

$$x_3 \leq 0.20\ (x_3 + x_6)$$

Sređivanjem te nejednakosti dobiva se:

$$0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_6 \leq 0.$$

Analogno kao u prethodnim primjerima, vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3\ldots\}.$$

Dobiveni matematički model glasi:

min. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 7.50 \cdot x_1 + 6.80 \cdot x_2 + 5.50 \cdot x_3 + 6.90 \cdot x_4 + 7.25 \cdot x_5 + 6.10 \cdot x_6$

pod uvjetima:

$x_1 + x_4 \geq 1000$

$x_2 + x_5 \geq 600$

$0.85 \cdot x_1 + 0.85 \cdot x_2 + 0.85 \cdot x_3 - 0.15 \cdot x_4 - 0.15 \cdot x_5 - 0.15 \cdot x_6 \geq 0$

$0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_6 \leq 0$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2300$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N}_0$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear and Integer Programming.* korištenjem izbornika *File* i opcije *New Problem*. Upisuju se sljedeći podaci:

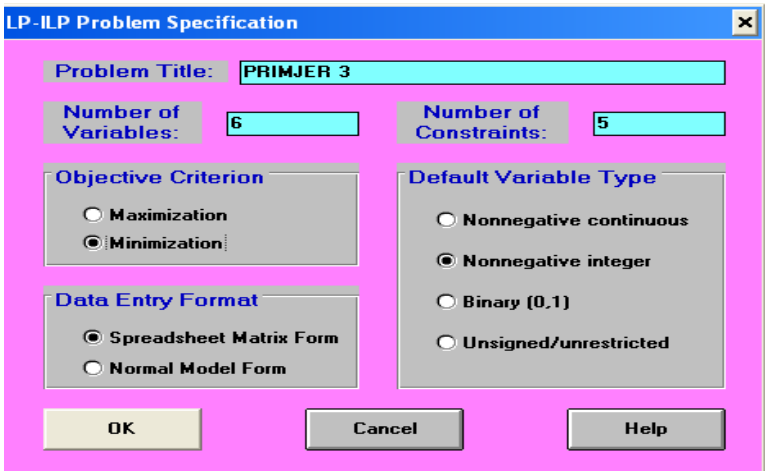
- Naziv problema: Primjer 3
- Broj varijabli: 6
- Broj uvjeta: 5

Potom treba odabrati sljedeće opcije:

- *Minimization* (u ovom primjeru se radi o minimizaciji troškova provođenja ankete),
- *Nonnegative integer* (radi se o nenegativnim cijelim brojevima),
- *Spreadsheet Matrix Form* (ulazni podaci bit će prikazani u matričnom obliku).

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 16.

Slika 16. Ulazni podatci za matematički model iz Primjera 3.



Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu (sličnu onoj sa Slike 2.) U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

U redak *Minimize* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. U stupac X1 upisuje se 7.5, u stupac X2 6.8, u stupac X3 5.5, u stupac X4 6.9, u stupac X5 7.25, a u stupac X6 6.1.

U redak C1 upisuje se prvi uvjet. U stupce X1 i X4 upisuje se 1, a u stupac R.H.S. upisuje se 1000.

U redak C2 upisuje se drugi uvjet. U stupce X2 i X5 upisuje se 1, a u stupac R.H.S upisuje se 600.

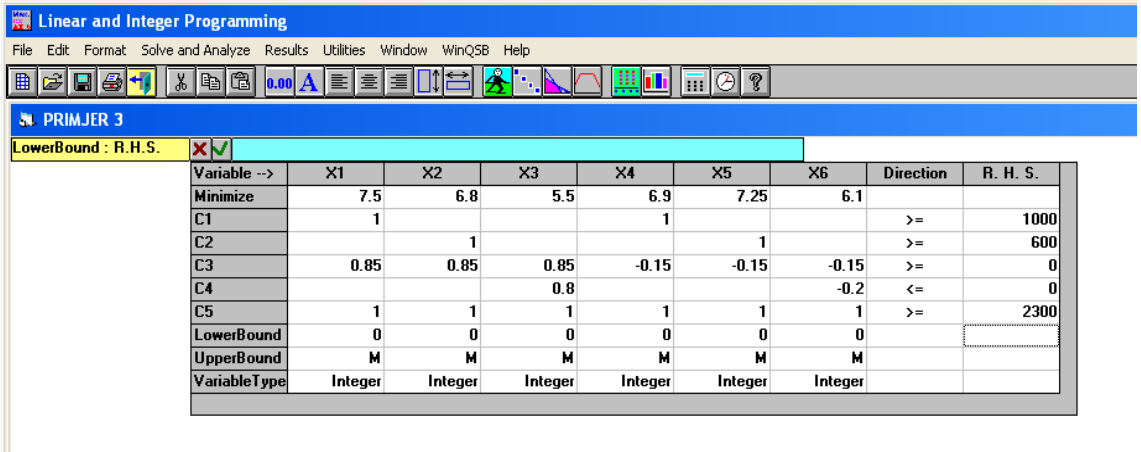
U redak C3 upisuje se treći uvjet. U stupce X1, …, X6 upisuje se redom 0.85, 0.85, 0.85, -0.15, -0.15 i -0.15. U stupac R.H.S. upisuje se 0.

U redak C4 upisuje se četvrti uvjet. U stupac X3 upisuje se 0.8, u stupac X6 –0.2, a u stupac R.H.S. upisuje se 0. Dvostrukim klikom miša na oznaku >= u stupcu *Direction* treba promijenit tu oznaku u <=.

U redak C5 upisuje se peti uvjet. U svaki od stupaca X1, …, X6 upisuje se jedinica, a u stupac R.H.S. upisuje se 2300.

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 17.

Slika 17. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 3.



Linear and Integer Programming

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

PRIMJER 3

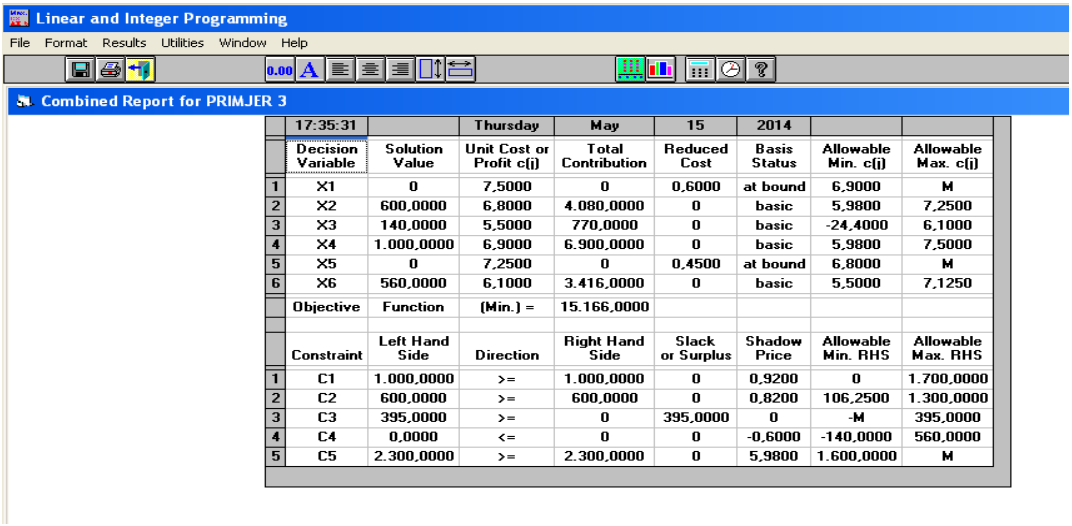
LowerBound : R.H.S.

Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Direction	R. H. S.
Minimize	7.5	6.8	5.5	6.9	7.25	6.1		
C1	1			1			>=	1000
C2		1			1		>=	600
C3	0.85	0.85	0.85	-0.15	-0.15	-0.15	>=	0
C4			0.8			-0.2	<=	0
C5	1	1	1	1	1	1	>=	2300
LowerBound	0	0	0	0	0	0		
UpperBound	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

Radi rješavanja Primjera 4 treba pohraniti dobiveni model pod nazivom Primjer 3. Odabere se *File name,* pa upiše Primjer 3. Klikne se na OK. Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 18. Iz nje treba očitati optimalno rješenje ovog problema, te optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Optimalne vrijednosti varijabli x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 očitavamo iza stupca *Solution Value*, a optimalnu vrijednost funkcije cilja iz retka *Objective Function (Min.)=.*

Slika 18. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 3.



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for PRIMJER 3

	17:35:31		Thursday	May	15	2014		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	0	7,5000	0	0,6000	at bound	6,9000	M
2	X2	600,0000	6,8000	4.080,0000	0	basic	5,9800	7,2500
3	X3	140,0000	5,5000	770,0000	0	basic	-24,4000	6,1000
4	X4	1.000,0000	6,9000	6.900,0000	0	basic	5,9800	7,5000
5	X5	0	7,2500	0	0,4500	at bound	6,8000	M
6	X6	560,0000	6,1000	3.416,0000	0	basic	5,5000	7,1250
	Objective	Function	(Min.) =	15.166,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	1.000,0000	>=	1.000,0000	0	0,9200	0	1.700,0000
2	C2	600,0000	>=	600,0000	0	0,8200	106,2500	1.300,0000
3	C3	395,0000	>=	0	395,0000	0	-M	395,0000
4	C4	0,0000	<=	0	0	-0,6000	-140,0000	560,0000
5	C5	2.300,0000	>=	2.300,0000	0	5,9800	1.600,0000	M

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right)$ = (0, 600, 140, 1000, 0, 560), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 15166. Stoga optimalan plan anketiranja iznosi: anketirati 600 domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina, 140 domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu, 1000 domaćinstava iz ostalih područja čija

„glava obitelji“ ima najviše 30 godina i 560 domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu. Pripadni optimalni troškovi anketiranja iznose 15166 n.j.

Vrijednost 1000 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će biti anketirano točno 1000 domaćinstava u kojima "glava obitelji“ ima najviše 30 godina. Vrijednost 600 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će biti anketirano točno 600 domaćinstava u kojima „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina. Vrijednost 395 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će biti ispitano više od 15 % domaćinstava u pograničnom području, tj. 395 domaćinstava. Vrijednost 0 iz retka C4, stupca *Left Hand Side* znači da će u skupu svih domaćinstava čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu biti točno 20% domaćinstava iz pograničnih područja. Vrijednost 2300 iz retka C5, stupca *Left Hand Side* znači da će biti ispitano točno 2300 domaćinstava.

4.4. Primjer 4.

Treba riješiti prethodni primjer uz dodatni uvjet da se mora anketirati barem 100 domaćinstava iz svake pojedine kategorije. Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja, odnosno optimalnih vrijednosti nezavisnih varijabli.

Rješenje:

Zbog dodatnoga uvjeta da se mora ispitati barem sto domaćinstava iz svake kategorije, vrijednost nijedne varijable odlučivanja ne može biti jednaka nuli. Stoga umjesto posljednjega uvjeta iz matematičkoga modela u Primjeru 3. mora vrijediti nejednakost

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N_{100}} := \{100, 101, 102, 103., \ldots\}.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 1. ostaju nepromijenjene. Tako se dobiva matematički model:

min. $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 7.50 \cdot x_1 + 6.80 \cdot x_2 + 5.50 \cdot x_3 + 6.90 \cdot x_4 + 7.25 \cdot x_5 + 6.10 \cdot x_6$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 2300$

$x_1 + x_4 \geq 1000$

$x_2 + x_5 \geq 600$

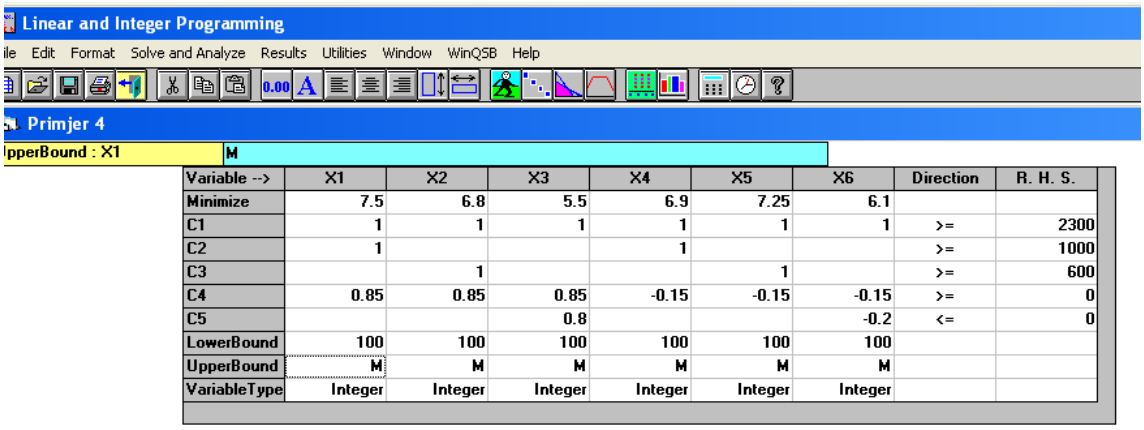
$0.85 \cdot x_1 + 0.85 \cdot x_2 + 0.85 \cdot x_3 - 0.15 \cdot x_4 - 0.15 \cdot x_5 - 0.15 \cdot x_6 \geq 0$

$0.8 \cdot x_3 - 0.2 \cdot x_6 \leq 0$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \in \mathbf{N_{100}} = \{100, 101, 102, 103., \ldots\}$.

Primjer 1. je pohranjen u memoriji, pa ga treba ponovo otvoriti s naredbom *Load problem* koji se nalazi u izborniku *File.* Retci C1, C2, …, C5 ostaju nepromijenjeni. Mijenjaju se podaci u retku *LowerBound*. U tom retku umjesto svake nule u stupcima X1, X2, X3, X4, X5, X6 upisuje se sto. Dobiva se tablica prikazana na Slici 19.

Slika 19. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 4.



Variable -->	X1	X2	X3	X4	X5	X6	Direction	R. H. S.
Minimize	7.5	6.8	5.5	6.9	7.25	6.1		
C1	1	1	1	1	1	1	>=	2300
C2	1			1			>=	1000
C3		1			1		>=	600
C4	0.85	0.85	0.85	-0.15	-0.15	-0.15	>=	0
C5			0.8			-0.2	<=	0
LowerBound	100	100	100	100	100	100		
UpperBound	M	M	M	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer	Integer		

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 20.

Slika 20. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 4.

Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for Primjer 4

	20:11:06		Monday	May	19	2014		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	100,0000	7,5000	750,0000	0,6000	at bound	6,9000	M
2	X2	500,0000	6,8000	3.400,0000	0	basic	5,9800	7,2500
3	X3	140,0000	5,5000	770,0000	0	basic	-24,4000	6,1000
4	X4	900,0000	6,9000	6.210,0000	0	basic	5,9800	7,5000
5	X5	100,0000	7,2500	725,0000	0,4500	at bound	6,8000	M
6	X6	560,0000	6,1000	3.416,0000	0	basic	5,5000	7,1250
	Objective	Function	(Min.) =	15.271,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	2.300,0000	>=	2.300,0000	0	5,9800	2.100,0000	M
2	C2	1.000,0000	>=	1.000,0000	0	0,9200	200,0000	1.200,0000
3	C3	600,0000	>=	600,0000	0	0,8200	200,0000	800,0000
4	C4	395,0000	>=	0	395,0000	0	-M	395,0000
5	C5	0,0000	<=	0	0	-0,6000	-40,0000	460,0000

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*, x_6^*\right)$ = (100, 500, 140, 900, 100, 560), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 15271. Stoga je optimalan plan anketiranja sljedeći: anketirati 100 domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina, 500 domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina, 140 domaćinstava iz pograničnoga područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu, 900 domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima najviše 30 godina, 100 domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina, 560 domaćinstava iz ostalih područja čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu.

Može se primijetiti da su se optimalne vrijednosti varijabli x_1 i x_5 povećale za 100 (relativne promjene nisu definirane jer su početne optimalne vrijednosti tih varijabli bile jednake 0). Optimalne vrijednosti varijabli x_2 i x_4 smanjile su se za 100, odnosno redom za $\frac{100}{600} \cdot 100 \approx 16.67\,\%$ i za $\frac{100}{1000} \cdot 100 = 10\,\%$. Optimalne vrijednosti varijabli x_3 i x_6 ostale su nepromijenjene.

Pripadni optimalni troškovi anketiranja iznose 15271 n.j. Oni su za 105 n.j., odnosno $\frac{105}{15166} \cdot 100 \approx 0.69\,\%$ veći u odnosu na optimalne troškove iz Primjera 3.

Vrijednost 2300 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će biti ispitano točno 2300 domaćinstava. Vrijednost 1000 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će biti anketirano točno 1000 domaćinstava u kojima "glava obitelji“ ima najviše 30

godina. Vrijednost 600 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će biti anketirano točno 600 domaćinstava u kojima „glava obitelji“ ima između 31 i 50 godina. Vrijednost 395 iz retka C4, stupca *Left Hand Side* znači da će biti ispitano više od 15 % domaćinstava u pograničnom području, tj. 395 domaćinstava. Vrijednost 0 iz retka C5, stupca *Left Hand Side* znači da će u skupu svih domaćinstava čija „glava obitelji“ ima barem 51 godinu biti točno 20% domaćinstava iz pograničnih područja. Vrijednosti su ostale iste s obzirom na vrijednosti iz Primjera 3.

4.5. Primjer 5.

Stranka *Dobar život* natječe se na parlamentarnim izborima. Radi pridobivanja glasača, glavni odbor stranke odobrio je ukupno 150000 kn tjedno za intenzivnu predizbornu kampanju. Ta se sredstva žele alocirati na ukupno 4 medija:

• TV spot u trajanju od 30 sekundi;

• Oglas u dnevnom tisku;

• Radio-spot u trajanju od 30 sekundi u poslijepodnevnom programu lokalnih radiopostaja;

• Radio-spot u trajanju od 60 sekundi u udarnim terminima lokalnih radio-postaja.

Glavni odbor stranke odlučio je da se na radiju emitira najmanje 6 spotova tjedno, te da se za promidžbene poruke na TV-u i u dnevnom tisku izdvoji najviše 40000 kn tjedno.

Treba formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga ako je cilj stranke što veći broj potencijalnih gledatelja/čitatelja/slušatelja. Pritom nije nužno platiti poruku svakoga pojedinoga tipa, tj. može postojati barem jedan tip promidžbene poruke koji neće biti iskorišten.

Tablica 3. Osnovni podaci za Primjer 5.

Vrsta promidžbene poruke	Broj mogućih gledatelja/čitatelja/slušatelja (000)	Cijena promidžbene poruke (000 kn)	Najveći mogući broj poruka tjedno
TV spot (30 sek)	8	12	8
Dnevni tisak (1stranica)	10	6.8	9
Radio spot (30 sekundi)	5	2.5	12
Radio spot (60 sekundi)	6.2	4	15

Rješenje:

Neka su:

x_1 = broj TV spotova (30 sek)
x_2 = broj oglasa u dnevnom tisku (1 stranica)
x_3 = broj radio spotova (30 sek)
x_4 = broj radio spotova (60 sek)

Ukupan broj gledatelja koji će pogledati x_1 *TV spotova* jednak je $8 \cdot x_1 \cdot 1000$. Ukupan broj čitatelja koji će pročitati x_2 *oglasa u dnevnom tisku* jednak je $10 \cdot x_2 \cdot 1000$. Ukupan broj slušatelja koji će poslušati x_3 *radio spotova u trajanju od 30 sekundi* jednak je $5 \cdot x_3 \cdot 1000$. Ukupan broj slušatelja koji će poslušati x_4 *radio spotova u trajanju od 60 sekundi* jednak je $6.2 \cdot x_4 \cdot 1000$. Ukupan broj ljudi koji će pogledati/pročitati/poslušati sve vrste oglasa jednak je

$$(8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6.2 \cdot x_4) \cdot 1000$$

Treba maksimizirati ovaj izraz. To će se učiniti tako da se maksimizira izraz u zagradi, pa se dobivena optimalna vrijednost pomnoži s 1000.

Cijena *TV spota* jednaka je $12 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn. Cijena oglašavanja putem *dnevnog tiska* jednaka je $6.8 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn. Cijena *radio spotova u trajanju od 30 sekundi* jednaka je $2.5 \cdot x_3 \cdot 1000$ kn. Cijena *radio spotova u trajanju od 60 sekundi* jednaka je $4 \cdot x_4 \cdot 1000$ kn. Budući da je za oglašavanje raspoloživi tjedni budžet od 150000 kn, dobiva se uvjet

$$(12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4) \cdot 1000 \leq 150000,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 150.$$

Cijena *TV spota* jednaka je $12 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn. Cijena oglašavanja putem *dnevnog tiska* jednaka je $6.8 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn. Iz zahtjeva da se za *TV spotove* i *oglase u dnevnom tisku* mora izdvojiti najviše 40000 kn tjedno može se zaključiti da mora vrijediti nejednakost

$$(12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2) \cdot 1000 \leq 40000,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 \leq 40.$$

Ukupan tjedni broj svih *radio-spotova* jednak je $x_3 + x_4$. Iz zahtjeva da taj broj mora biti barem 6 slijedi

$$x_3 + x_4 \geq 6.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 8 *TV spotova*, zaključuje se da vrijedi nejednakost

$$x_1 \leq 8.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može dati najviše 9 oglasa u *dnevnom tisku* zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_2 \leq 9.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 12 *radio spotova u trajanju od 30 sekundi* zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_3 \leq 12.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 15 *radio spotova u trajanju od 60 sekundi* zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_4 \leq 15.$$

Analogno kao u prethodnim primjerima, vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3\ldots\}.$$

Tako se dobije sljedeći matematički model:

max. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6.2 \cdot x_4$

pod uvjetima:

$x_3 + x_4 \geq 6$

$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 \leq 40$

$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 \leq 150$

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 9$

$x_3 \leq 12$

$x_4 \leq 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}_0$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear and Integer Programming.* korištenjem izbornika *File* i opcije *New Problem*. Upisuju se sljedeći podaci:

- Naziv problema: Primjer 5,
- Broj varijabli: 4,
- Broj uvjeta: 3.

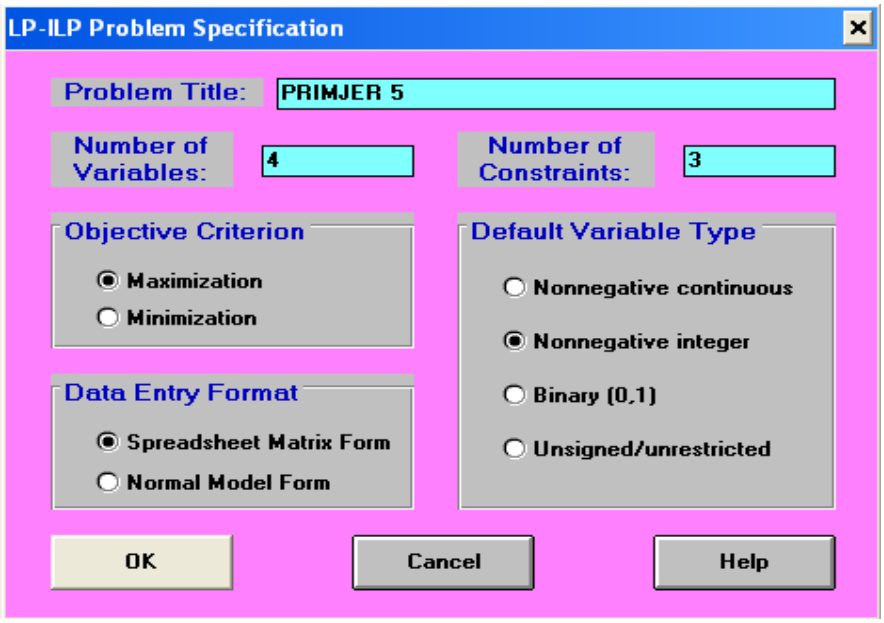
Posljednja četiri uvjeta iz matematičkoga modela bit će upisana u retku *UpperBound* koji označava najveću dozvoljenu vrijednost svake nezavisne varijable.

Potom se odaberu sljedeće opcije:

- *Maximization* (u ovom primjeru se radi o maksimizaciji osoba koji će pogledati/pročitati/poslušati reklame),
- *Nonnegative integer* (radi se o nenegativnim cijelim brojevima),
- *Spreadsheet Matrix Form* (ulazni podaci bit će prikazani u matričnom obliku).

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 21 .

Slika 21. Ulazni podatci za matematički model iz Primjera 5.



Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu (sličnu onoj sa Slike 2.). U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

U redak *Maximize* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. U stupac X1 upisujese 8, u stupac X2 10, u stupac X3 5, a u stupac X4 6.2.

U redak C1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X3 i stupac X4 upisuje se 1, a u stupac R.H.S. upisuje se 6. Ostale stupce ostavimo praznima. Dvostrukim klikom miša na oznaku <= u stupcu *Direction* treba promijeniti tu oznaku u >=.

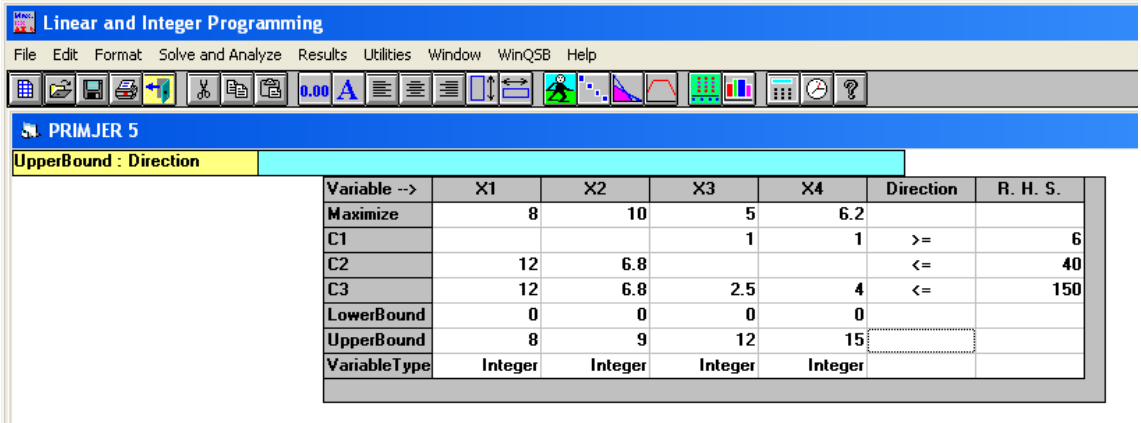
U redak C2 upisuje se drugi uvjet. U stupac X1 upisuje se 12, u stupac X2 6.8, a u stupac R.H.S. 40. Ostale stupce treba ostaviti praznima

U redak C3 upisuje se treći uvjet. U stupac X1 upisuje se 12, u stupac X2 6.8, u stupac X3 2.5, u stupac X4 4, a u stupac R.H.S. 150.

U redak *UpperBound* upisuju se gornje granice za vrijednosti nezavisnih varijabli. U stupac X1 upisuje se 8, u stupac X2 9, u stupac X3 12, a u stupac X4 15.

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 22.

Slika 22. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 5.

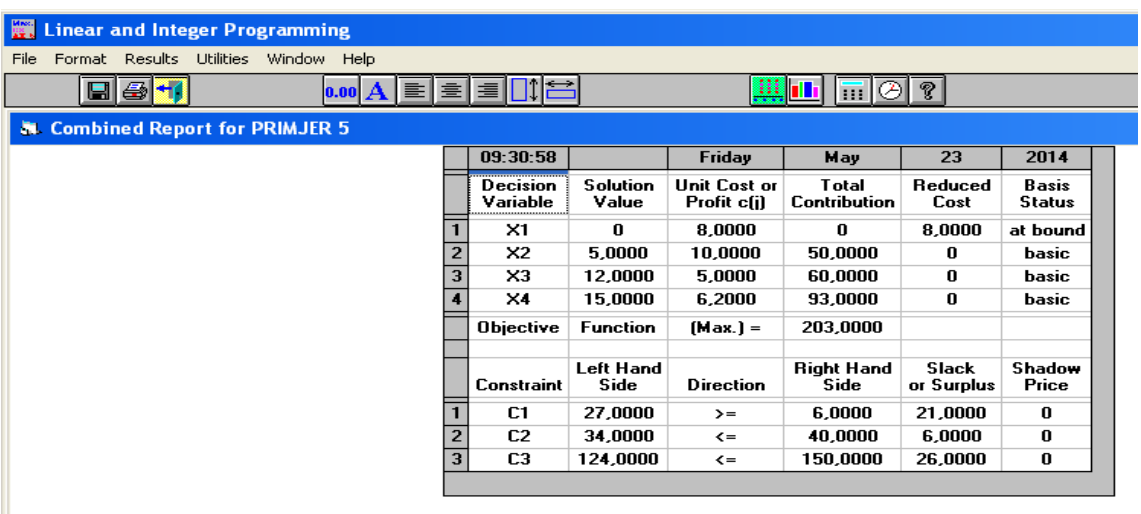


Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Maximize	8	10	5	6.2		
C1			1	1	>=	6
C2	12	6.8			<=	40
C3	12	6.8	2.5	4	<=	150
LowerBound	0	0	0	0		
UpperBound	8	9	12	15		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer		

Radi rješavanja Primjera 6 treba pohraniti dobiveni model pod nazivom Primjer 5. Odabere se *File name,* pa upiše Primjer 5. Klikne se na OK. Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 23. Iz nje treba očitati optimalno rješenje ovog problema, te optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Optimalne vrijednosti varijabli x_1, x_2, x_3, x_4, očitavamo iza stupca *Solution Value*, a optimalnu vrijednost funkcije cilja iz retka *Objective Function (Max.)=.*

Slika 23. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 5.



	09:30:58		Friday	May	23	2014
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	0	8.0000	0	8.0000	at bound
2	X2	5.0000	10.0000	50.0000	0	basic
3	X3	12.0000	5.0000	60.0000	0	basic
4	X4	15.0000	6.2000	93.0000	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	203.0000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	27.0000	>=	6.0000	21.0000	0
2	C2	34.0000	<=	40.0000	6.0000	0
3	C3	124.0000	<=	150.0000	26.0000	0

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (0, 5, 12, 15), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 203. Zaključuje se da je optimalni tjedni plan reklamiranja kampanje sljedeći: platiti 5 *oglasa u dnevnim novinama*, 12 *radio spotova u trajanju od 30 sekundi i* 15 *radio spotova u trajanju od jedne minute*. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 203000.

Vrijednost 27 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će biti emitirano 27 radio spotova. Vrijednost 34 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će troškovi emitiranja *TV spotova* i *oglasa u novinama* biti 34000 n.j. Vrijednost 124 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će ukupno za oglašavanje biti potrošeno 124000 n.j.

4.6. Primjer 6.

Treba riješiti prethodni primjer uz sljedeće dodatne uvjete:

- platiti najmanje 1 oglas iz svake pojedine kategorije;
- sve oglase treba vidjeti najmanje 100000 gledatelja/čitatelja/ slušatelja.
- minimizirati troškove oglašavanja.

Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalnih vrijednosti nezavisnih varijabli. (Analiza promjena optimalne vrijednosti funkcije cilja se ne provodi zbog izmjene funkcije cilja.)

Rješenje:

Iz zahtjeva da ukupan broj svih gledatelja/čitatelja/slušatelja treba biti jednak najmanje 100000 zaključuje se da mora vrijediti nejednakost:

$$(8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6.2 \cdot x_4) \cdot 1000 \geq 100000,$$

odnosno nakon dijeljenja s 1000

$$8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6.2 \cdot x_4 \geq 100.$$

Iz zahtjeva da se mora platiti najmanje 1 oglas iz svake kategorije zaključuje se da mora vrijediti

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3., \ldots\}.$$

Treba odrediti minimalne troškove oglašavanja, dakle minimizirati izraz

$$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 5. ostaju nepromijenjene.

Dobiveni matematički model glasi:

min. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 + 2.5 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4$

pod uvjetima:

$x_3 + x_4 \geq 6$

$12 \cdot x_1 + 6.8 \cdot x_2 \leq 40$

$8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 6.2 \cdot x_4 \geq 100$

$x_1 \leq 8$

$x_2 \leq 9$

$x_3 \leq 12$

$x_4 \leq 15$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbf{N}$

Primjer 5. je pohranjen u memoriji, pa ga treba ponovo otvoriti s naredbom *Load problem* koji se nalazi u izborniku *File.*

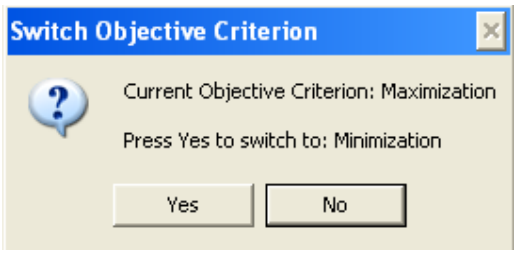
Opciju *Maximization* treba zamijeniti s *Minimization* tako da se klikne na izbornik *Edit*, odabere se opcija *Objective Function Criterion* i nakon što se pojavi natpis

Current Objective Criterion: *Maximization*

Press Yes to switch to: Minimization

Klikom na natpis *Yes* potvrđuje se promjena opcije.

Slika 24. Promjena funkcije cilja



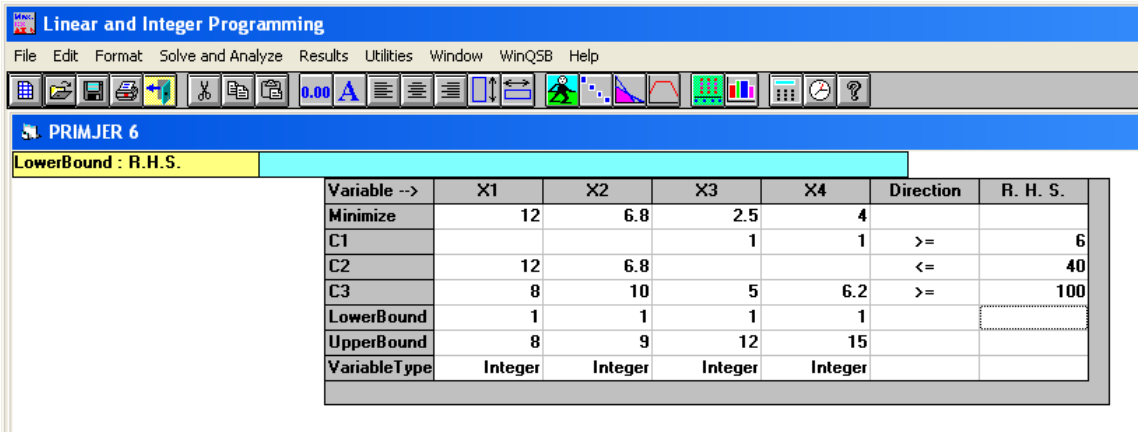
U redak *Minimize* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. U stupac X1 upisuje se 12, u stupac X2 6.8, u stupac X3 2.5, a u stupac X4 4.

Retci C1 i C2 ostaju nepromijenjeni. Redak C3 se mijenja tako da se u stupac X1 upiše 8, u stupac X2 10, u stupac X3 5, u stupac X4 6.2, a u stupac R.H.S. 100. Dvostrukim klikom miša na oznaku <= u stupcu *Direction* treba promijeniti tu oznaku u >=.

Mijenjaju se podaci u retku *LowerBound*. U tom retku umjesto nula u stupcima X1, X2, X3 i X4 upisuju se jedinice. Dobiva se tablica prikazana na Slici 25.

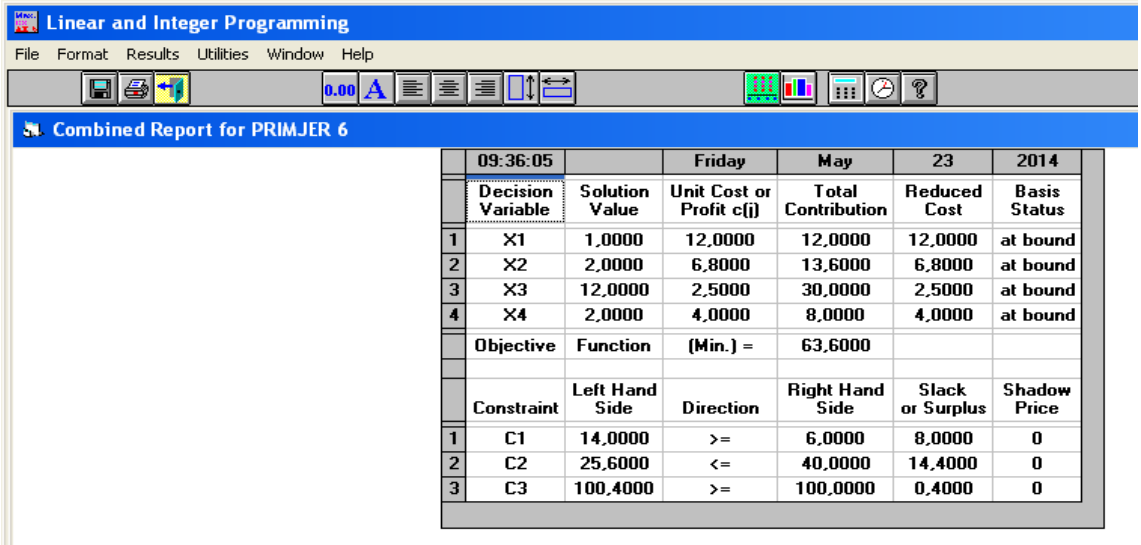
Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 26.

Slika 25. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 6.



Variable -->	X1	X2	X3	X4	Direction	R. H. S.
Minimize	12	6.8	2.5	4		
C1			1	1	>=	6
C2	12	6.8			<=	40
C3	8	10	5	6.2	>=	100
LowerBound	1	1	1	1		
UpperBound	8	9	12	15		
VariableType	Integer	Integer	Integer	Integer		

Slika 26. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 6.



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for PRIMJER 6

	09:36:05		Friday	May	23	2014
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	X1	1,0000	12,0000	12,0000	12,0000	at bound
2	X2	2,0000	6,8000	13,6000	6,8000	at bound
3	X3	12,0000	2,5000	30,0000	2,5000	at bound
4	X4	2,0000	4,0000	8,0000	4,0000	at bound
	Objective	Function	(Min.) =	63,6000		
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	14,0000	>=	6,0000	8,0000	0
2	C2	25,6000	<=	40,0000	14,4000	0
3	C3	100,4000	>=	100,0000	0,4000	0

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (1, 2, 12, 2), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 63600. Zaključuje se da je optimalni tjedni plan reklamiranja kampanje sljedeći: platiti 1 *TV spot*, 2 *oglasa u dnevnim novinama*, 12 *radio spotova u trajanju od 30 sekundi i* 2 *radio spota u trajanju od jedne minute*. Pripadni optimalni troškovi reklamiranja su 63600 kn.

Može se primijetiti da se optimalna vrijednost varijable x_1 povećala za 1 (relativna promjena nije definirana jer je početna optimalna vrijednost te varijable bila 0), optimalna vrijednost varijable x_2 se smanjila za 3, odnosno za $\frac{3}{5} \cdot 100 \approx 60\ \%$. Optimalna vrijednost varijable x_3 je ostala ista, dok se optimalna vrijednost varijable x_4 povećala za 13, odnosno za $\frac{13}{15} \cdot 100 \approx 86.67\ \%$.

Vrijednost 14 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će biti emitirano 14 *radio spotova*. Vrijednost 25,6 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će se troškovi emitiranja *TV spotova* i *oglasa u novinama* biti 25600 n.j. Vrijednost 100,4 iz retka C3, stupca *Left Hand Side* znači da će biti ukupno 100400 potencijalnih kupaca.

Može se primijetiti da će biti emitirano 13 *radio spotova* manje, odnosno za $\frac{13}{27} \cdot 100 \approx 48.15$. manje nego u Primjeru 5. Troškovi za emitiranje *TV spotova* i *oglasa u dnevnim novinama* će se smanjiti za 8400 n.j., odnosno za $\frac{8400}{34000} \cdot 100 \approx 24.71\ \%$ u odnosu na iste troškove iz Primjera 5.

4.7. Primjer 7.

Tvrtka „Muljažić d.o.o.“ iz Stražemana planira promidžbenu kampanju kako bi privukla nove kupce i želi u troje dnevne novine plasirati ukupno najviše 10 promidžbenih oglasa. Svaki oglas u listu *Podnevnik* košta 200 n.j. i pročitat će ga 2000 ljudi. Svaki oglas u listu *Glas Požeštine* košta 150 n.j. i pročitat će ga 1000 ljudi. Svaki oglas u listu *Požeški trač* košta 100 n.j. i pročitat će ga 1500 ljudi. Tvrtka želi da sve plaćene oglase pročita najmanje 16000 ljudi. Treba izraditi optimalnu strategiju oglašavanja tako da ukupni troškovi promidžbe budu minimalni, pa odrediti te ukupne troškove. Pritom nije nužno platiti poruku svakoga pojedinoga tipa, tj. može postojati barem jedan tip oglasa koji neće biti iskorišten.

Rješenje:

Neka su:

x_1= broj oglasa u listu *Podnevnik*
x_2= broj oglasa u listu *Glas Požeštine*
x_3= broj oglasa u listu *Požeški trač*

Cijena x_1 oglasa u listu *Podnevnik* jednak je $200 \cdot x_1$ n.j.. Cijena x_2 oglasa u listu *Glas Požeštine* jednak je $150 \cdot x_2$ n.j. Cijena x_3 oglasa u listu *Požeški trač* jednaka je $100 \cdot x_3$ n.j. Ukupna cijena svih objavljenih oglasa u svim listovima jednaka je

$$200 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3 \text{ n.j.}$$

Taj izraz treba minimizirati.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_1 oglas u listu *Podnevnik* jednak je $2000 \cdot x_1$. Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_2 oglasa u listu *Glas Požeštine* jednak je $1000 \cdot x_2$. Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_3 oglasa u listu *Požeški trač* jednak je $1500 \cdot x_3$. Ukupan broj svih ljudi koji će vidjeti plaćene oglase iznosi:

$$2000 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3.$$

Prema zahtjevu tvrtke, taj broj mora biti jednak najmanje 16 000, pa se zaključuje da mora vrijediti nejednakost

$$2000 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 \geq 16000.$$

Ukupan broj svih plaćenih oglasa jednak je $x_1 + x_2 + x_3$. Iz zahtjeva da tvrtka želi platiti ukupno najviše 10 oglasa zaključuje se da vrijedi nejednakost:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10.$$

Analogno kao u prethodnim primjerima, vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3\ldots\}.$$

Dobiveni matematički model glasi:

min. $f(x_1, x_2, x_3) = 200 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3$

pod uvjetima:

$2000 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 \geq 16000$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{N}_0$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear and Integer Programming.* korištenjem izbornika *File* i opcije *New Problem*. Upisuju se sljedeći podaci:

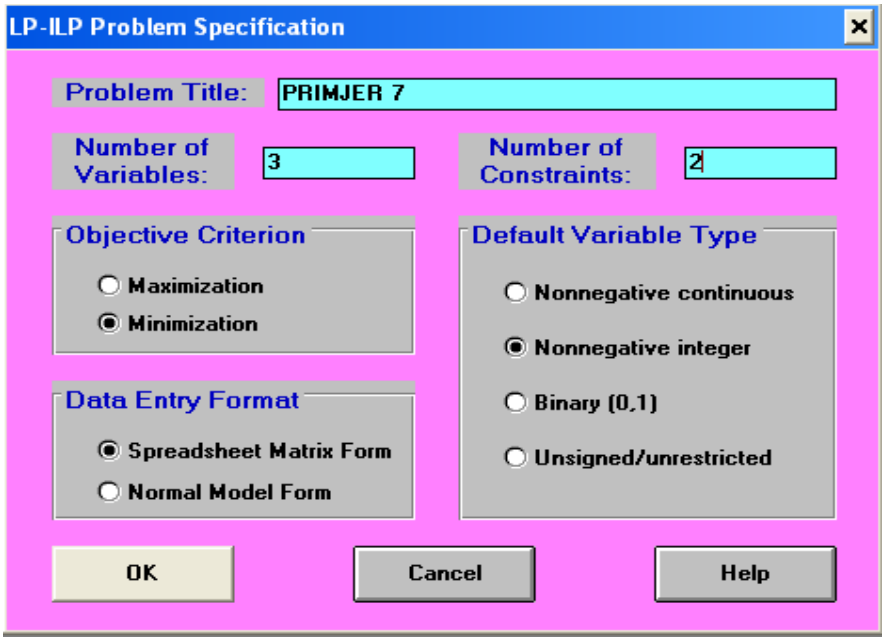
- Naziv problema: Primjer 7,
- Broj varijabli: 3,
- Broj uvjeta: 2.

Zatim treba odabrati jedno od ponuđenih opcija:

- *Minimization* (u ovom primjeru se radi o minimizaciji troškova promidžbe),
- *Nonnegative integer* (radi se o nenegativnim cijelim brojevima),
- *Spreadsheet Matrix Form* (ulazni podaci bit će prikazani u matričnom obliku).

Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 27.

Slika 27. Ulazni podatci za matematički model iz Primjera 7.



Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu (sličnu onoj sa Slike 2.) U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

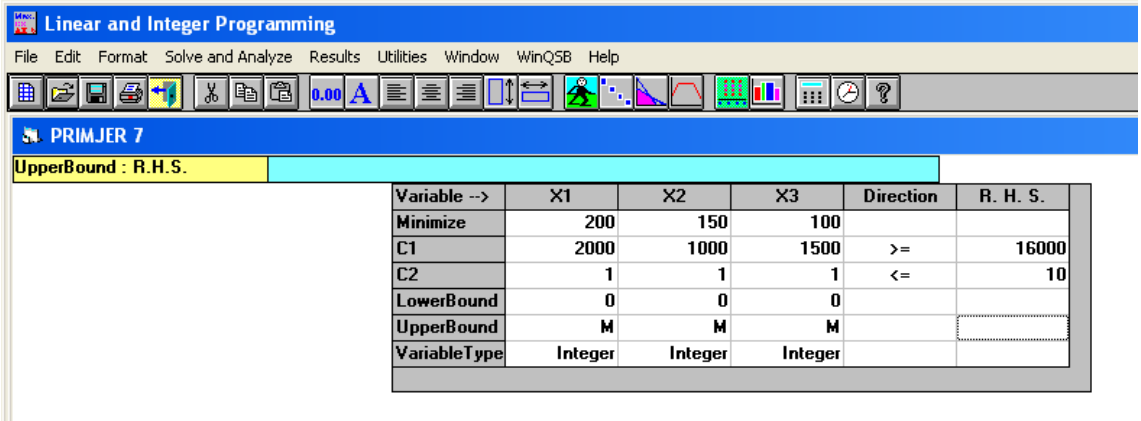
U redak *Minimize* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. U stupac X1 upisuje se 200, u stupac X2 150, a u stupac X3 100.

U redak C1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X1 upisuje se 2000, u stupac X2 1000, u stupac X3 1500, a u stupac R.H.S. 16000.

U redak C2 upisuje se drugi uvjet. U stupce X1, X2 i X3 upisuju se jedinice, a u stupac R.H.S. upisuje se 10. Dvostrukim klikom miša na oznaku >= u stupcu *Direction* treba promijeniti tu oznaku u <=.

Tako se dobiva tablica prikazana na slici 28.

Slika 28. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 7.



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	200	150	100		
C1	2000	1000	1500	>=	16000
C2	1	1	1	<=	10
LowerBound	0	0	0		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer		

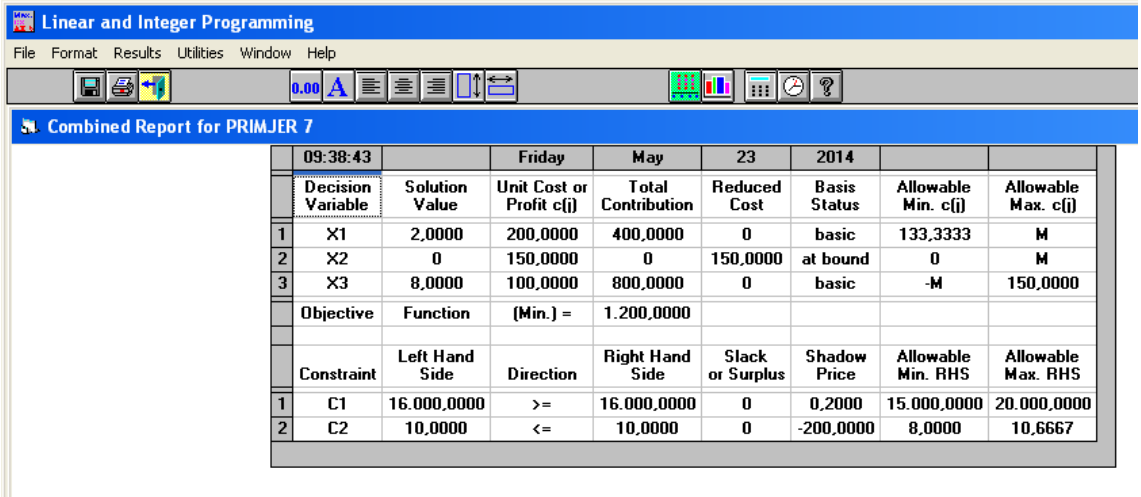
Radi rješavanja Primjera 8 treba pohraniti dobiveni model pod nazivom Primjer 7. Odabere se *File name,* pa upiše Primjer 7. Klikne se na OK. Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 29. Iz nje treba očitati optimalno rješenje ovog problema, te optimalnu vrijednost funkcije cilja.

Optimalne vrijednosti varijabli x_1, x_2, x_3 očitavamo iza stupca *Solution Value*, a optimalnu vrijednost funkcije cilja iz retka *Objective Function (Min.)=.*

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ = (2, 0, 8), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi iznosi f^* = 1200. Zaključuje se da je optimalni plan oglašavanja sljedeći: platiti 2 oglasa u listu *Podnevnik* i 8 oglasa u listu *Požeški trač*. Pripadni optimalni troškovi promidžbe iznose 1200 n.j.

Vrijednost 16000 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će točno 16000 ljudi pogledati plaćene oglase. Vrijednost 10 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će tvrtka platiti točno 10 oglasa.

Slika 29. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 7.



Linear and Integer Programming

File Format Results Utilities Window Help

Combined Report for PRIMJER 7

	09:38:43		Friday	May	23	2014		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	2,0000	200,0000	400,0000	0	basic	133,3333	M
2	X2	0	150,0000	0	150,0000	at bound	0	M
3	X3	8,0000	100,0000	800,0000	0	basic	-M	150,0000
	Objective	Function	(Min.) =	1.200,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	16.000,0000	>=	16.000,0000	0	0,2000	15.000,0000	20.000,0000
2	C2	10,0000	<=	10,0000	0	-200,0000	8,0000	10,6667

4.8. Primjer 8.

Treba riješiti prethodni primjer uz dodatni uvjet da se mora uplatiti barem jedan oglas svake pojedine vrste. Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalne vrijednosti funkcije cilja, odnosno optimalnih vrijednosti nezavisnih varijabli.

Rješenje:

Iz dodatnog uvjeta da najmanje jedan oglas mora biti objavljen u svakim novinama zaključuje se da mora vrijediti

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbf{N} = \{1, 2, 3., \ldots\}.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 7. ostaju nepromijenjene.

Dobiveni matematički model glasi:

min. $f(x_1, x_2, x_3) = 200 \cdot x_1 + 150 \cdot x_2 + 100 \cdot x_3$

pod uvjetima:

$2000 \cdot x_1 + 1000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 \geq 16000$

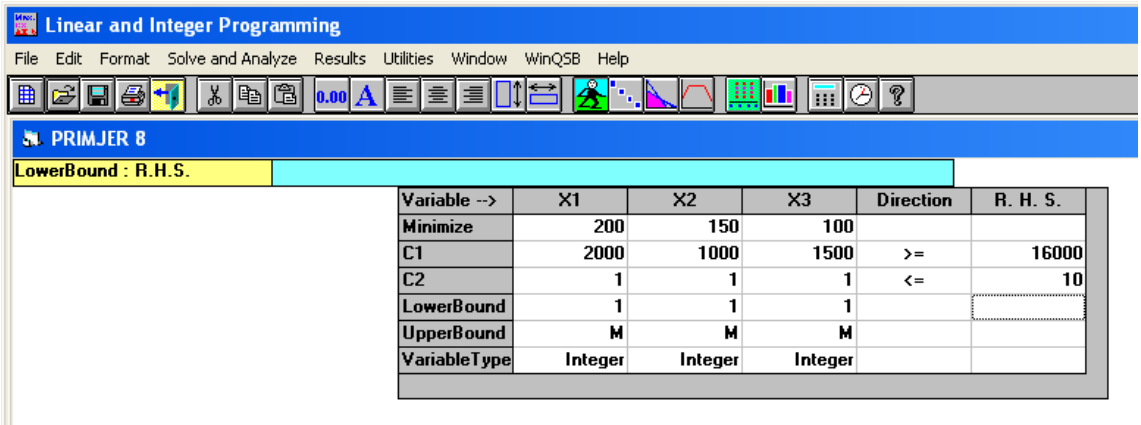
$x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$

$x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbf{N}$

Primjer 7. je pohranjen u memoriji, te ga treba ponovo otvoriti s naredbom *Load problem* koji se nalazi u izborniku *File.*

Mijenjaju se podaci u retku *LowerBound*. U tom retku umjesto nula u stupcima X1, X2 i X3 upisuju se jedinice. Dobiva se tablica prikazana na Slici 30.

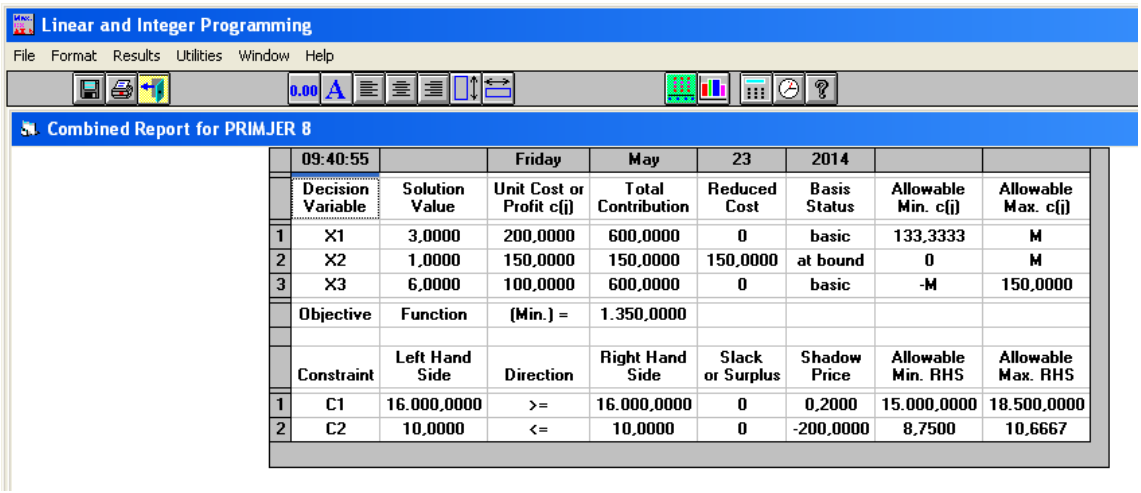
Slika 30. Tablica s podatcima za matematički model iz Primjera 8.



Variable -->	X1	X2	X3	Direction	R. H. S.
Minimize	200	150	100		
C1	2000	1000	1500	>=	16000
C2	1	1	1	<=	10
LowerBound	1	1	1		
UpperBound	M	M	M		
VariableType	Integer	Integer	Integer		

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se tablica prikazana na Slici 31.

Slika 31. Tablica s optimalnim rješenjima Primjera 8.



	09:40:55		Friday	May	23	2014		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	X1	3,0000	200,0000	600,0000	0	basic	133,3333	M
2	X2	1,0000	150,0000	150,0000	150,0000	at bound	0	M
3	X3	6,0000	100,0000	600,0000	0	basic	-M	150,0000
	Objective	Function	(Min.) =	1.350,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	16.000,0000	>=	16.000,0000	0	0,2000	15.000,0000	18.500,0000
2	C2	10,0000	<=	10,0000	0	-200,0000	8,7500	10,6667

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ = (3, 1, 6), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 1350. Zaključuje se da je optimalan plan oglašavanja sljedeći: platiti 3 oglasa u listu *Podnevnik*, 1 oglas u listu *Oglas Požeštine* i 6 oglasa u listu *Požeški trač*.

Može se primijetiti da se optimalna vrijednost varijable x_1 povećala za 1, odnosno za $\frac{1}{2} \cdot 100 = 50\ \%$. Optimalna vrijednost varijable x_2 povećala se za 2 (relativna promjena nije definirana jer je početna optimalna vrijednost te varijable bila 0). Optimalna vrijednost varijable x_3 se smanjila za 2, odnosno za $\frac{2}{8} \cdot 100 = 25\ \%$.

Pripadni optimalni troškovi promidžbe iznose 1350 n.j. Oni su za 150 n.j., odnosno za $\frac{150}{1200} \cdot 100 = 12.5\ \%$ veći u odnosu na optimalne troškove iz Primjera 7.

Vrijednost 16000 iz retka C1, stupca *Left Hand Side* znači da će točno 16000 ljudi pogledati plaćene oglase. Vrijednost 10 iz retka C2, stupca *Left Hand Side* znači da će tvrtka platiti točno 10 oglasa. Sve vrijednosti su ostale iste s obzirom na Primjer 7.

5. ZAKLJUČAK

Linearno programiranje je relativno mlada grana matematike. Pojavila se tijekom drugog svjetskog rata.

Razvojem se ustanovilo da može pomoći u mnogim ekonomskim problemima. Ova metoda se pokazala odličnom za poduzeća koja to mogu iskoristiti za mnoge uštede, efikasnije trošenje sirovina, učinkovitiju organizaciju rada, kao i maksimizaciju dobiti. Ostvarenjem ovih ciljeva poduzeće napreduje na tržištu i ima prednost pred konkurencijom. Bitno je znati se služiti programima i metodama koji menadžmentu olakšavaju donošenje odluka.

U radu su prikazani primjeri problema promidžbe koji su riješeni pomoću računalnog programa WinQSB. Taj je program odabran za korištenje zbog svoje jednostavnosti. Korisnik koji nije upoznat s radom u ovom programu može relativno brzo i jednostavno savladati osnove rada. Također, program se može svrstati u kategoriju *user-friendly* programa (programa prilagođenih krajnjim korisnicima) jer na relativno jednostavan način omogućuje korisnicima unos podataka, kao i interpretaciju krajnjih rezultata.

Odabranim primjerima nastojalo se istodobno ukazati na važnost formiranja ispravnoga matematičkoga modela, ispravnoga unos podataka iz modela u računalni program, te interpretacije dobivenih rezultata. Posebna je pozornost posvećena analizi osjetljivosti dobivenih rezultata. Tu je analizu analitički („klasično“) vrlo teško provesti, no, računalni program omogućuje njezinu brzu i jednostavnu provedbu. Analiza osjetljivosti dobivenih rezultata bitan je faktor prigodom donošenja konačne odluke jer ukazuje na „jakost“ promjene optimalnoga rješenja uz relativno „slabe“ promjene početnih uvjeta.

Napokon, radom se nastojala potkrijepiti teza da, unatoč razvoju sve boljih i bržih računalnih programa, čovjeka kao donositelja odluke ipak nije moguće zamijeniti. Drugim riječima, čovjek (stručnjaci, menadžment itd.) ne može prepustiti donošenje odluke stroju (računalu), ali može unaprijediti postojeća pomagala i razviti nova pomagala u svrhu jednostavnijega i bržega donošenja kvalitetnih poslovnih odluka.

6. POPIS KRATICA I AKRONIMA

i sl. = i slično

itd. = i tako dalje

n.j. = novčanih jedinica

tj. = to jest

7. POPIS LITERATURE

Knjige

[1] Barnett, R.A., Ziegler, M.R., Byleen, K.E.; 2006, Primijenjena matematika za poslovanje, ekonomiju, znanosti o živom svijetu i humanističke znanosti, Zagreb, Mate, str. 280-287.

[2] Chiang, C.A.; 1996, Osnovne metode matematičke ekonomije, Zagreb, Mate, str. 651-665.

Stručni članci

[3] Crnjac Milić, D.; (2012) Povijesni pregled implementacije matematike i statistike u ekonomiju (file:///F:/Moji%20Dokumenti/Preuzimanja/Pages_from_ekonomski_vjesnik_2012_2_9%20(1).pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[4] Erdelez, A., Margeta, J., Knezić, S.; (2006) Integralni pristup upravljanju sustavom prikupljanja komunalnog otpada (file:///F:/Moji%20Dokumenti/Preuzimanja/3%20(1).pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[5] Jelić, S. (2009) Aproksimacijski algoritmi za optimalno osvjetljenje scene (http://www.mathos.unios.hr/~sjelic/papers/Slobodan%20Jelic%20-%20Aproksimacijski%20algoritmi%20za%20optimalno%20osvjetljenje%20scene%20(diplomski%20rad).pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[6] Knežević, M.; (2013) Primjena linearnog programiranja u planiranju proizvodnje - diplomski rad, Veleučilište u Požegi, Požega, 2013. (http://bkovacic.weebly.com/uploads/7/4/0/7/7407552/diplomski_rad_-_monika_knezevic.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[7] Panjkota, A.; (2006.) Uvod u linearno programiranje (http://www.vus.hr/Nastavni%20materijali/PIF/informacijski_sustavi_2_dio.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[8] Petković, M.D., (2006) Modifikacije metoda matematičkog programiranja i primjene (http://tesla.pmf.ni.ac.rs/people/dexter/theses/Diplfinalpng.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

[9] Radić, J.; (2012) Linearno programiranje i višekriterijalno odlučivanje u proizvodnji – tvornica stočne hrane (http://e-lib.efst.hr/2012/2092638.pdf) (javno dostupno 26.05.2014.)

8. POPIS PRILOGA

Popis slika

Popis tablica