VELEUČILIŠTE U POŽEGI

MARICA KEREPČIĆ, 218

PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA IZBOR MEDIJA ZA OGLAŠAVANJE

DIPLOMSKI RAD

Požega, 2015. godine

VELEUČILIŠTE U POŽEGI
DRUŠTVENI ODJEL

SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ
TRGOVINSKO POSLOVANJE

PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA IZBOR MEDIJA ZA OGLAŠAVANJE

DIPLOMSKI RAD

IZ KOLEGIJA: KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

MENTOR: mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

STUDENT: Marica Kerepčić

Matični broj studenta: 218

Požega, 2015. godine

Sažetak

Ovaj rad ukazuje na moguća rješenja nekoliko problemskih zadataka linearnoga programiranja koja se odnose na problem izbora medija za oglašavanje.

Rad je izrađen u nekoliko cjelina. U uvodu su opisana osnovna načela linearnoga programiranja i njihova primjena. Objašnjene su osnovne funkcije i način rada s programom Linear Program Solver.

Navedeni su tipični primjeri linearnoga programiranja u rješavanju problema na izbor medija za oglašavanje, te opisano njihovo detaljno rješavanje pomoću računalnoga programa Linear Program Solver.

U pogodno odabranim primjerima prikazano je rješavanje odabranih problemskih zadataka s objašnjenjem dobivenih rezultata. Izvršena je analiza osjetljivosti rješenja dodavanjem novih početnih uvjeta.

Izabranim zadatcima se pokušava prikazati računanje na primjerima maksimiziranja koristi i minimiziranja troškova uz zadane uvjete.

Na kraju je dan osvrt na diplomski rad u cjelini.

Ključne riječi: linearno programiranje, izbor medija za oglašavanje, računalni program Linear Program Solver.

Summary

This thesis indicates some possible solutions of some problematic tasks of the linear programming, referring to the problem of choosing an advertising media.

The thesis consists of several units. The basic principle of the linear programming and its application are described in the introduction. There are also the basic functions and mode in the Linear Program Solver explained.

Typical examples of the linear programming of solving the problems in choice of an advertising media are listed, and their detailed solving with help of the PC-program Linear Program Solver is described too.

Some suitably chosen examples show the solving of chosen problematic tasks, and the obtained results are explained. The analysis of the sensitivity of the solution is accomplished by adding new starting conditions.

With this chosen tasks the intention was to show the calculation on examples of maximizing the benefits and minimizing the expenses within the given conditions.

At the end there is review of the whole thesis.

Key words: linear programming, advertising media choice problem, software Linear Program Solver.

Sadržaj

1. UVOD

Ovaj rad opisati će osnovna načela linearnoga programiranja u poslovnim procesima. Cilj je prikazati primjenu linearnoga programiranja u rješavanju problema izbora medija za oglašavanje. Opisati će se detaljno rješavanje problemskih zadataka pomoću računalnoga programa *Linear Program Solver*.

Rad se sastoji od četiri poglavlja. Prvo od njih je uvod u kojem se daje kratak pregled tijeka rada.

Drugo poglavlje opisuje nastanak linearnoga programiranja i njegove osnovne primjene. Linearno programiranje koristi se u novije vrijeme i smatra se neklasičnom metodom optimizacije. Namijenjeno je izračunavanju minimalnog ili maksimalnog rezultata pri zadanim uvjetima. Potrebno je postići najbolje rezultate s određenim resursima i uz određene uvjete.

U trećem poglavlju ukratko se opisuje način rada računalnoga programa *Linear Program Solver*.

Četvrto poglavlje prikazuje tipične primjere linearnoga programiranja u rješavanju problema izbora medija za oglašavanje. Opisuje se detaljno rješavanje odabranih problemskih zadataka pomoću računalnoga programa *Linear Program Solver*. Rješavaju se problemi maksimiziranja koristi i minimiziranja troškova uz zadane uvjete. Provodi se analiza osjetljivosti rješenja dodavanjem novih početnih uvjeta.

Na kraju rada iznose se zaključna razmatranja na zadanu temu.

2. OPĆENITO O LINEARNOM PROGRAMIRANJU

„Linearno programiranje promatra probleme u kojima se linearna funkcija cilja mora optimizirati (maksimizirati ili minimizirati) uz uvjete ili ograničenja dana u obliku jednadžbi ili/i nejednadžbi i uz nenegativne varijable odlučivanja.“ (prema Danieli Petkoviček, 2013.)

2.1. Povijest linearnoga programiranja

Prema Danieli Petkoviček (2013.), linearno programiranje je grana matematike koja se bavi problemom optimizacije sustava unutar zadanih ograničenja. Prvi ga je uveo Leonid Kantorovič kasnih 1930-ih godina kao metodu rješavanja problema planiranja proizvodnje. U SAD je linearno programiranje razvijeno tijekom drugoga svjetskog rata prvenstveno za probleme vojne logistike, kao što je optimiziranje prijevoza vojske i opreme konvojima. U tom je smislu važan i doprinos ekonomista Tjallinga Koopmansa (rođen u Nizozemskoj, 1940. preselio u SAD). Kantorovič i Koopmans su 1975. god. podijelili Nobelovu nagradu za ekonomiju za njihov pionirski rad u linearnom programiranju.

Prof. dr. Vlatko Čerić sa Ekonomskog fakulteta u Zagrebu tvrdi da je metodu prvi razvio američki matematičar George Dantzig 1947. godine utemeljivši je na svojemu radu u statističkom odjelu zračnih snaga američke vojske. Tamo su rješavanje metoda planiranja pomoću stolnog kalkulatora zvali “programiranje” (odatle ime metodi). Koristeći simpleks metodu, Dantzig je prvi riješio problem prehrane koji se svodio na minimizaciju troškova uz 77 varijabli odlučivanja i 9 ograničenja. Za provjeru tog rješenja trebalo je 120 dana uz korištenje kalkulatora. Provjeru ispravnosti dobivenoga rješenja obavili su djelatnici američkoga Nacionalnoga ureda za standarde (*The National Bureau of Standards*).

2.2. Osnovna načela linearnoga programiranja

Linearno programiranje je metoda matematičkoga programiranja čija je svrha postizanje najboljeg ishoda (na primjer: maksimalna dobit uz najniži trošak) u matematičkom modelu uz postavljene uvjete. Zbog toga linearno programiranje pripada tzv. metodama

optimizacije, odnosno metodama namijenjenima postizanju ekstremne vrijednosti određene matematičke funkcije uz postavljene uvjete. Ti su uvjeti najčešće jednadžbe i nejednadžbe.

Linearno programiranje je metoda namijenjena optimizaciji linearne funkcije cilja uz linearne uvjete. Općenito, linearne funkcije su funkcije oblika $f(x_1,...,x_n) = c_1 \cdot x_1 + ... + c_n \cdot x_n$, pri čemu su $n \in \mathbb{N}$, $c_1,...,c_n \in \mathbb{R}$ konstante, a $x_1,...,x_n$ varijable odlučivanja čija se ekstremna vrijednost želi odrediti. Analogan oblik imaju i funkcije koje zadaju uvjete.

Linearno programiranje se može primijeniti na različita područja. Koristi se u poslovanju i ekonomiji, ali se također može koristiti za rješavanje nekih problema u tehnici. Industrije koje koriste linearno programiranje modela uključuju prijevoz, energiju, telekomunikacije i proizvodnju. To se pokazalo korisnim u modeliranju različitih vrsta problema u planiranju, usmjeravanju, raspoređivanju zadataka i dizajnu.

Linearno programiranje je značajno područje optimizacije iz više razloga. Mnogi praktični problemi u istraživanjima mogu se riješiti kao rezultat linearnog programiranja.

Takvo programiranje može se koristiti u mikroekonomiji, u upravama tvrtki na primjerima planiranja, proizvodnje, transporta, tehnologije i drugih pitanja. Iako su moderna načela upravljanja umnogome izmijenjena u odnosu na tradicionalna načela upravljanja, većini tvrtki su i dalje zajednička nastojanja za povećanjem dobiti i smanjenjem troškova s ograničenim resursima. Dakle, mnogi se problemi mogu svrstati u probleme linearnoga programiranja.

U ekonomiji, neka ekonomska veličina (varijabla) često zavisi o najmanje dvije druge ekonomske veličine (varijable). Tako npr. količina potražnje x nekoga dobra ne ovisi samo o cijeni toga dobra, nego i o cijeni nekoga drugog dobra. U ekonomiji se često pojavljuju i problemi koje je moguće formulirati u obliku matematičkoga modela s funkcijom cilja. Cilj uglavnom treba maksimizirati ili minimizirati s ograničenjima u obliku jednadžbe. Metodama rješavanja takvih problema bavi se matematičko programiranje (prema Neralić, L., Šego, B. 2009). Tipičan primjer primjene linearnoga programiranja je određivanje optimalne razine proizvodnje za maksimalni profit uz izvjesna (linearna) ograničenja materijala i rada.

3. RAČUNALNI PROGRAM LINEAR PROGRAM SOLVER

Razvoj moderne računalne tehnologije, a pogotovo računalnih programa, ubrzao je implementaciju metoda linearnoga programiranja u različite računalne programe. Tako danas postoje mnogi računalni programi „specijalizirani“ za rješavanje problema matematičkoga programiranja (npr. *Lindo*, *WinQSB* itd.). Znatan dio njih je prilagođen računalnim znanjima i vještinama „običnih“ korisnika, pa se takvi programi svrstaju u tzv. „user-friendly“ računalne programe. U navedenu skupinu programa pripada i računalni program *Linear Program Solver* koji će biti korišten u ovom radu.

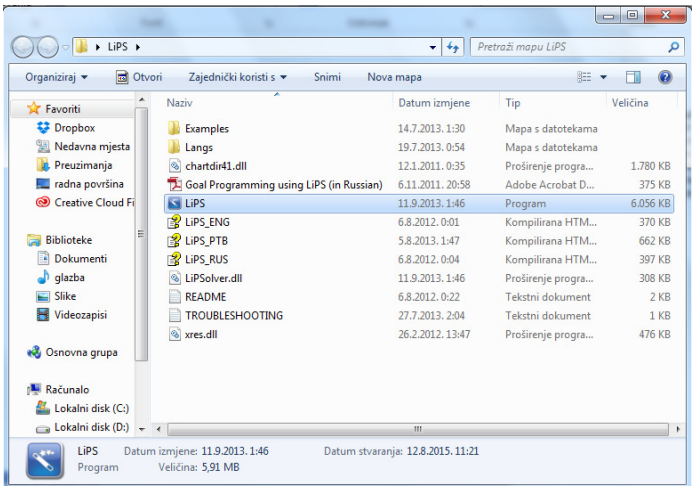
Ovaj računalni program osmislila je i razvila skupina stručnjaka predvođena Michaelom Melnickom na Odjelu za operacijska istraživanja Ekonomskoga fakulteta iz Moskve. Glavne značajke programa su:

- temelji se na učinkovitoj provedbi metoda koje rješavaju probleme s velikim brojem varijabli odlučivanja.
- njime se pruža ne samo jedan odgovor nego detaljan proces rješavanja matematičkoga modela, pa se program može koristiti za proučavanje metoda linearnoga programiranja.
- daje analizu osjetljivosti koja omogućuje proučavanje ponašanja modela kada se promijene parametri. Takve informacije mogu biti izuzetno korisne za praktičnu primjenu
- za razliku od npr. računalnoga programa *WinQSB*, program *Linear Program Solver* je kompatibilan s novijim verzijama operativnoga sustava *Microsoft Windows* (*Windows* 7 i novije verzije), čime se i novim korisnicima olakšava rad s programom.

Program je originalno „zapakiran“ u komprimiranu datoteku, pa ga je prigodom preuzimanja potrebno „raspakirati“. Preporučuje se da se naziv mape u koju će biti smještene „raspakirane“ datoteke podudara s nazivom programa.

Program se pokreće dvostrukim klikom miša na izvršnu datoteku *LiPS.exe* (vidjeti Sliku 1.).

Slika 1. Pokretanje programa *Linear Program Solver*



Izvor: autor

Nakon pokretanja programa pojavljuje se sljedeći okvir (vidjeti Sliku 2.):

Slika 2. Polazni okvir programa *Linear Program Solver*.

Izvor: autor

Program nudi mogućnosti stvaranja novoga modela (*Create New Model*) u tabličnom ili tekstualnom obliku, otvaranje postojećih matematičkih modela pohranjenih u programskoj biblioteci (*Open sample models*), izbornika za rješavanje optimizacijskih problema (*Solve model menu*) i izbornika za ispitivanje analize osjetljivosti (*Use Sensitivity Analysis*).

Posljednji je izbornik besmisleno koristiti prije implementiranja i rješavanja konkretnoga matematičkoga modela linearnoga programiranja. Ovaj okvir moguće je zatvoriti jednostrukim klikom miša na crveni križić u gornjem desnom kutu okvira.

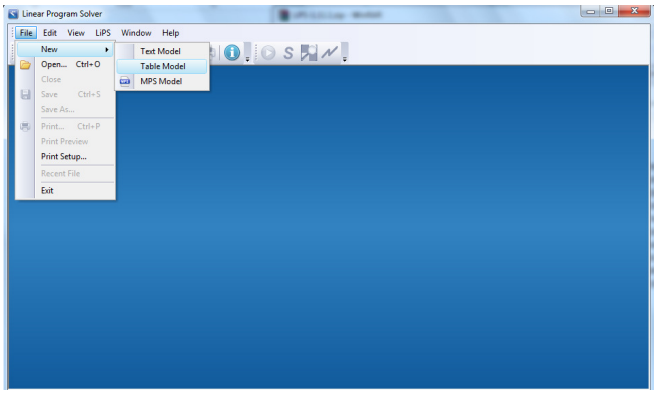
Glavne komponente korisničkog sučelja (vidjeti Sliku 3.) su:

1) izbornik za rad s datotekama (*File*) u kojemu postoji opcija *New* namijenjena izboru oblika modela, a to su:
   - model u običnom tekstu;
   - model u tabličnom obliku;
   - MPS model.

   Uz opciju *New*, u ovom se izborniku nalaze opcija *Open* namijenjena otvaranju datoteke na računalu i opcija *Save* namijenjena spremanju aktivnoga dokumenta.
2) izbornik za uređivanje modela (*Edit*) koji sadrži opciju *Undo* namijenjenu poništavanju posljednje radnje, opciju *Copy* namijenjenu za kopiranje odabira i pohranu u međuspremnik, te opciju *Paste* namijenjenu umetanju sadržaja međuspremnika.
3) izbornik za rješavanje modela (*LiPS*) koji sadrži opciju *Solve Model* namijenjenu rješavanju aktivnoga modela i opciju *Sense Analysis* namijenjenu provedbi analize osjetljivosti.
4) alatna traka koja omogućuje brzi pristup opcijama u spomenutim izbornicima (opcije stvaranja novoga modela, otvaranja ranije pohranjenih modela, pohranjivanja zapisanih modela itd.)

U rješavanju problema najjednostavniji i najpraktičniji je tablični način unosa podataka (vidjeti Sliku 3.) jer je analogan npr. unosu podataka u tabličnom kalkulatoru MS *Excelu*. Tablični način unosa podataka bira se jednostrukim klikom miša na *File*, potom na opciju *New* i nakon toga na podopciju *Table Model*.

Slika 3. Biranje tabličnog načina zadavanja matematičkoga modela.



Izvor: autor

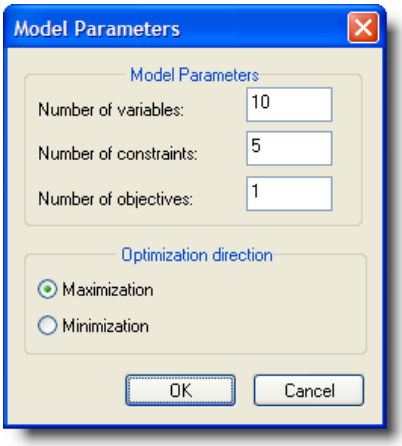
U dobivenom prozoru trebaju se navesti parametri problema:

- broj varijabli (*Number od variables*),
- broj uvjeta (*Number of constraints*),
- broj funkcija cilja (*Number of objectives*),
- tip optimizacijskoga problema (tj. je li riječ o problemu maksimizacije ili minimizacije) (*Optimization direction*).

Jedan primjer zadavanja parametara matematičkoga modela prikazan je na Slici 4.

Slika 4. Primjer zadavanja parametara matematičkoga modela

u programu *Linear Program Solver*.



Izvor: autor

4. PRIMJENA LINEARNOG PROGRAMIRANJA NA ODABRANE PRIMJERE IZBORA MEDIJA ZA OGLAŠAVANJE

4.1. Primjer 1.

Stranka *Svijetla budućnost* natječe se na parlamentarnim izborima. Radi pridobivanja glasača, glavni odbor stranke odobrio je ukupno 300 000 kn tjedno za intenzivnu predizbornu kampanju. Ta se sredstva žele alocirati na ukupno 4 vrste oglasa:

- TV spot;
- oglas u dnevnom tisku;
- radio-spot u trajanju od 30 sekundi u poslijepodnevnom programu lokalnih radiopostaja;
- radio-spot u trajanju od 60 sekundi u udarnim terminima lokalnih radio-postaja.

Stranački odjel za marketing odlučio je da se na radiju emitira najmanje 8 spotova tjedno, te da se za promidžbene poruke na TV-u i u dnevnom tisku izdvoji najviše 80 000 kn tjedno.

Cilj stranke je maksimizirati broj potencijalnih gledatelja/čitatelja/slušatelja. Pritom je moguće ne uplatiti neku vrstu oglasa, odnosno može postojati barem jedan tip oglasa koji neće biti iskorišten.

Potrebno je formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga. Potom treba utvrditi predviđa li optimalan plan iskorištenje svih raspoloživih financijskih sredstava.

Tablica 1. Osnovni podaci za Primjer 1.

Vrsta promidžbene poruke	Broj mogućih gledatelja/čitatelja/slušatelja (000)	Cijena promidžbene poruke (000 kn)	Najveći mogući broj poruka tjedno
TV spot	10	13	8
Dnevni tisak	10	10	9
Radio spot (30 s)	5	8	12
Radio spot (60 s)	8	12	15

Izvor: [7].

Rješenje:

Neka su:

x_1 = broj TV spotova

x_2 = broj oglasa u dnevnom tisku

x_3 = broj radio spotova (u trajanju od 30 s)

x_4 = broj radio spotova (u trajanju od 60 s)

Ukupan broj korisnika koji će pogledati x_1 TV spotova jednak je: $10 \cdot x_1 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će pročitati x_2 oglasa u dnevnom tisku jednak je: $10 \cdot x_2 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će poslušati x_3 radio spotova u trajanju od 30 s jednak je: $5 \cdot x_3 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će poslušati x_4 radio spotova u trajanju od 60 s jednak je: $8 \cdot x_4 \cdot 1000$.

Ukupan broj ljudi koji će pogledati/pročitati/poslušati sve vrste oglasa jednak je: $10 \cdot x_1 \cdot 1000 + 10 \cdot x_2 \cdot 1000 + 5 \cdot x_3 \cdot 1000 + 8 \cdot x_4 \cdot 1000 = (10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4) \cdot 1000$.

Treba maksimizirati ovaj izraz. To će se učiniti tako da se maksimizira izraz u zagradi, pa se dobivena optimalna vrijednost pomnoži s 1000.

Cijena x_1 TV spotova jednaka je $13 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_2 oglasa u dnevnom tisku jednaka je $10 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_3 radio spotova u trajanju od 30 s jednaka je $8 \cdot x_3 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_4 radio spotova u trajanju od 60 s jednaka je $12 \cdot x_4 \cdot 1000$ kn.

Ukupna cijena svih plaćenih oglasa iznosi:

$$13 \cdot x_1 \cdot 1000 + 10 \cdot x_2 \cdot 1000 + 8 \cdot x_3 \cdot 1000 + 12 \cdot x_4 \cdot 1000 = (13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4) \cdot 1000 \text{ kn.}$$

Budući da je za oglašavanje raspoloživi tjedni budžet od 300 000 kn, dobiva se uvjet

$$(13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4) \cdot 1000 \leq 300\ 000,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 \leq 300.$$

Cijena x_1 TV spotova jednaka je: $13 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_2 oglasa u dnevnom tisku jednaka je: $10 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn.

Ukupna cijena plaćenih TV spotova i oglasa u dnevnom tisku jednaka je: $13 \cdot x_1 \cdot 1000 + 10 \cdot x_2 \cdot 1000 = (13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2) \cdot 1000$ kn.

Iz zahtjeva da se za TV spotove i oglase u dnevnom tisku može izdvojiti najviše 80 000 kn tjedno može se zaključiti da mora vrijediti nejednakost

$$(13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2) \cdot 1000 \leq 80\ 000,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 80.$$

Ukupan tjedni broj svih radio-spotova jednak je $x_3 + x_4$. Iz zahtjeva da taj broj mora biti barem 8 slijedi

$$x_3 + x_4 \geq 8.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 8 TV spotova zaključuje se da vrijedi nejednakost

$$x_1 \leq 8.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može objaviti najviše 9 oglasa u dnevnom tisku zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_2 \leq 9.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 12 radio spotova u trajanju od 30 sekundi zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_3 \leq 12.$$

Iz zahtjeva da se tjedno može emitirati najviše 15 radio spotova u trajanju od 60 sekundi zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_4 \leq 15.$$

Vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. (Nije moguće uplatiti polovicu TV-spota, četvrtinu oglasa u novinama itd.) Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0 := \{0,\ 1,\ 2, ...\}.$$

Tako se dobije sljedeći matematički model:

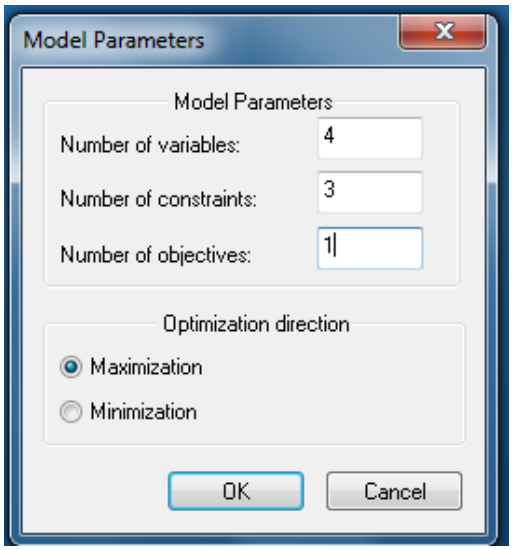
$$\begin{aligned}
&\max . f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 \leq 300, \\
&13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 80, \\
&x_3 + x_4 \geq 8, \\
&x_1 \leq 8, \\
&x_2 \leq 9, \\
&x_3 \leq 12, \\
&x_4 \leq 15, \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$

Ovaj matematički problem rješava se pomoću programa *Linear Program Solver*. Kako je ranije opisano, treba otvoriti novu datoteku programa *Linear Program Solver* korištenjem izbornika *File* i opcije *New*, pa *Table Model* (vidjeti Sliku 3.).

U dobiveni prozor se upisuju sljedeći podatci (vidjeti Sliku 5.):

- broj varijabli: 4
- broj uvjeta: 3
- broj funkcija cilja: 1
- vrsta optimizacije: *Maximization*

Slika 5. Unos parametara za Primjer 1.



Izvor: autor

Dobiva se tablica prikazana na Slici 6.

Slika 6. Tablica za unos funkcije cilja i uvjeta iz Primjera 1.

	X1	X2	X3	X4		RHS
Objective					->	MAX
Row1					<=	
Row2					<=	
Row3					<=	
Lower Bound	0	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF	INF		
Type	CONT	CONT	CONT	CONT		

Izvor: autor

Posljednja četiri uvjeta iz matematičkoga modela bit će upisana u retku *Upper Bound* koji označava najveću dozvoljenu vrijednost svake nezavisne varijable.

Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu. U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

U redak *Objective* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. Na kraju reda upisana je oznaka *Max* koja označava maksimizaciju. U stupac X1 upisuje se 10, u stupac X2 10, u stupac X3 5, a u stupac X4 8.

U redak *Row*1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X3 i stupac X4 upisuje se 1, a u stupac R.H.S. upisuje se 8. Ostali stupci ostavljaju se praznima. Dvostrukim klikom miša na oznaku <= u šestom stupcu treba promijeniti tu oznaku u >=.

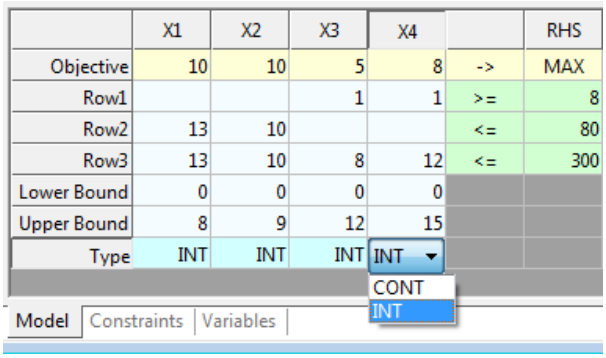
U redak *Row*2 upisuje se drugi uvjet. U stupac X1 upisuje se 13, u stupac X2 10, a u stupac R.H.S. 80. Ostale stupce treba ostaviti praznima.

U redak *Row*3 upisuje se treći uvjet. U stupac X1 upisuje se 13, u stupac X2 10, u stupac X3 8, u stupac X4 12, a u stupac R.H.S. 300.

U redak *UpperBound* upisuju se gornje granice za vrijednosti nezavisnih varijabli. U stupac X1 upisuje se 8, u stupac X2 9, u stupac X3 12, a u stupac X4 15.

Pod *Type* izabire se *INT* jer je riječ o nenegativnim cjelobrojnim varijablama. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 7.

Slika 7. Tablično zadan matematički model iz Primjera 1.



	X1	X2	X3	X4		RHS
Objective	10	10	5	8	->	MAX
Row1			1	1	>=	8
Row2	13	10			<=	80
Row3	13	10	8	12	<=	300
Lower Bound	0	0	0	0		
Upper Bound	8	9	12	15		
Type	INT	INT	INT	INT		

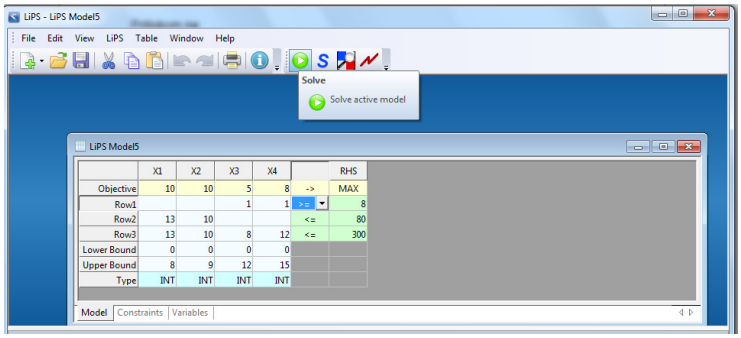
CONT
INT

Model | Constraints | Variables

Izvor: autor

Klikom miša na zelenu strelicu, a potom na natpis *Solve active model* (vidjeti Sliku 8.) dobiva se tablica s optimalnim rješenjem (vidjeti Sliku 9.).

Slika 8. Pokretanje rješavača upisanoga modela.



Izvor: autor

Slika 9. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 1.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 225
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	0	10	YES
X2	8	10	YES
X3	5	5	YES
X4	15	8	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (0, 8, 5, 15), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 225$.

Zaključuje se da je optimalni tjedni plan reklamiranja kampanje sljedeći: platiti 8 oglasa u dnevnim novinama, 5 radio spotova u trajanju od 30 s i 15 radio spotova u trajanju od 60 s. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 225 000.

Ukupan iznos koji će se potrošiti na ostvarenje ovoga plana jednak je:

$$(13 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 8 \cdot 5 + 12 \cdot 15) \cdot 1000 = 300\ 000,$$

pa se zaključuje da će se ostvarenjem plana potrošiti sva raspoloživa financijska sredstva.

4.2. Primjer 2.

Treba riješiti prethodni primjer ako se postavi dodatni uvjet da treba platiti najmanje jedan oglas svake pojedine vrste.

Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalnih vrijednosti svih varijabli odlučivanja i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Rješenje:

Iz zahtjeva da se mora platiti najmanje jedan oglas svake vrste zaključuje se da mora vrijediti relacija:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N} := \{1,\ 2,\ 3, ...\}.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 1. ostaju nepromijenjene.

Dobiveni matematički model glasi:

$$\begin{aligned}
&\max . f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 10 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 + 8 \cdot x_4 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 + 12 \cdot x_4 \leq 300, \\
&13 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2 \leq 80, \\
&x_3 + x_4 \geq 8, \\
&x_1 \leq 8, \\
&x_2 \leq 9, \\
&x_3 \leq 12, \\
&x_4 \leq 15, \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Klikom miša na crveni križić u gornjem desnom kutu okvira zatvori se tablica s optimalnim vrijednostima varijabli odlučivanja iz Primjera 1. Dobiva se tablica prikazana na Slici 7. U toj se tablici preinači redak *Lower Bound* tako da se umjesto svake od četiriju nula upiše 1. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 10.

Slika 10. Tablica s ulaznim podacima za Primjer 2.

	X1	X2	X3	X4		RHS
Objective	10	10	5	8	->	MAX
Row1	13	10	8	12	<=	300
Row2	13	10			<=	80
Row3			1	1	>=	8
Lower Bound	1	1	1	1		
Upper Bound	8	9	12	15		
Type	INT	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 1. dobiva se sljedeća tablica s optimalnim rješenjem gornjega matematičkoga modela (vidjeti Sliku 11.).

Slika 11. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 2.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 217
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	2	10	YES
X2	5	10	YES
X3	7	5	YES
X4	14	8	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right)$ = (2, 5, 7, 14), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 217$.

Zaključuje se da će novi optimalni tjedni plan reklamiranja kampanje biti sljedeći: platiti 2 TV spota, 5 oglasa u dnevnim novinama, 7 radio spotova u trajanju od 30 s i 14 radio spotova u trajanju od 60 s. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 217 000.

Analiziraju se apsolutna i relativna promjena optimalne vrijednosti svake pojedine varijable odlučivanja, kao i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_1 jednaka je 0, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 2. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_1 povećala za 2.

Relativna promjena u ovom slučaju nije definirana jer je prvotna optimalna vrijednost jednaka 0.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_2 jednaka je 8, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 5. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_2 smanjila za 3, odnosno za $\frac{8-5}{8} \cdot 100 = 37.5\%$.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_3 jednaka je 5, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 7. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_3 povećala za 2, odnosno za $\frac{7-5}{5} \cdot 100 = 40\%$.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_4 jednaka je 15, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 14. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_4 smanjila za 1, odnosno za $\frac{15-14}{15} \cdot 100 \approx 6.67\%$.

Prvotna optimalna vrijednost funkcije cilja jednaka je 225, a nova optimalna vrijednost te funkcije jednaka je 217. Zaključuje se da se optimalna vrijednost funkcije cilja smanjila za 8, odnosno za $\frac{225-217}{225} \cdot 100 \approx 3.56\%$.

U ovom je slučaju ukupan iznos koji će se potrošiti jednak je

$$(13 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 14) \cdot 1000 = 300\ 000,$$

pa se zaključuje da će se ostvarenjem plana potrošiti sva raspoloživa financijska sredstva.

4.3. Primjer 3.

Tvrtka „*Slatkiš* d.d.“ iz Frkljevaca vrši promotivnu kampanju za novu vrstu čokolade *Superčoksa*. Izabrana su tri najučinkovitija načina za oglašavanje u medijima:

- televizijska reklama u dječjim emisijama.
- oglasi u časopisima sa hranom i obiteljski orijentiranim časopisima.
- oglasi u nedjeljnim izdanjima dnevnih novina.

Najmanji željeni ukupan broj čitatelja/gledatelja/slušatelja iznosi 300 000.

Za oglase u novinama i časopisima dozvoljeno je potrošiti najviše 400 000 kn.

Cilj tvrtke je minimizirati ukupne troškove oglašavanja. Pritom je moguće ne uplatiti neku vrstu oglasa, odnosno može postojati barem jedan tip oglasa koji neće biti iskorišten.

Potrebno je formirati matematički model promatranoga problema i riješiti ga. Potom treba utvrditi hoće li se na plaćanje oglasa u novinama i časopisima potrošiti sva dozvoljena financijska sredstva, kao i ukupan očekivani broj ljudi koji će vidjeti sve uplaćene oglase.

Tablica 2. Osnovni podaci za Primjer 3.

Vrsta promidžbene poruke	Broj mogućih gledatelja/čitatelja (000)	Cijena promidžbene poruke (000 kn)	Najveći mogući broj poruka
TV reklama	5	12	50
oglas u časopisima	3	5	100
oglas u nedjeljnim izdanjima novina	2	7	12

Izvor: [9]

Rješenje:

Neka su:

x_1 = broj TV reklama

x_2 = broj oglasa u časopisima

x_3 = broj oglasa u nedjeljnim izdanjima novina

Ukupan broj korisnika koji će pogledati x_1 TV reklama jednak je: $5 \cdot x_1 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će pročitati x_2 oglasa u časopisima jednak je: $3 \cdot x_2 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će pročitati x_3 oglasa u novinama je: $2 \cdot x_3 \cdot 1000$.

Ukupan broj ljudi koji će pogledati/pročitati sve vrste oglasa jednak je

$$5 \cdot x_1 \cdot 1000 + 3 \cdot x_2 \cdot 1000 + 2 \cdot x_3 \cdot 1000 = (5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3) \cdot 1000.$$

Taj izraz treba biti jednak ili veći od 300 000, pa se dobiva uvjet:

$$(5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3) \cdot 1000 \geq 300\ 000,$$

odnosno nakon dijeljenja s 1000,

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 300.$$

Cijena x_1 TV oglasa iznosi $12 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_2 oglasa u časopisima iznosi $5 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_3 oglasa u novinama iznosi $7 \cdot x_3 \cdot 1000$ kn.

Ukupna cijena svih triju vrsta oglasa iznosi:

$$12 \cdot x_1 \cdot 1000 + 5 \cdot x_2 \cdot 1000 + 7 \cdot x_3 \cdot 1000 = (12 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3) \cdot 1000 \text{ kn.}$$

Taj iznos treba minimizirati. To će se učiniti tako da se minimizira vrijednost izraza u zagradi, pa dobiveni rezultat pomnoži s 1000.

Ukupna cijena svih oglasa u novinama i časopisima iznosi:

$$5 \cdot x_2 \cdot 1000 + 7 \cdot x_3 \cdot 1000 = (5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3) \cdot 1000 \text{ kn.}$$

Iz zahtjeva da se za oglase u novinama može izdvojiti najviše 400 000 kn može se zaključiti da mora vrijediti nejednakost

$$(5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3) \cdot 1000 \leq 400\ 000,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 400.$$

Iz zahtjeva da se može emitirati najviše 50 TV reklama, zaključuje se da vrijedi nejednakost

$$x_1 \leq 50.$$

Iz zahtjeva da se može objaviti najviše 100 oglasa u časopisima zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_2 \leq 100.$$

Iz zahtjeva da se može objaviti najviše 12 oglasa u novinama zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_3 \leq 12.$$

Vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0.$$

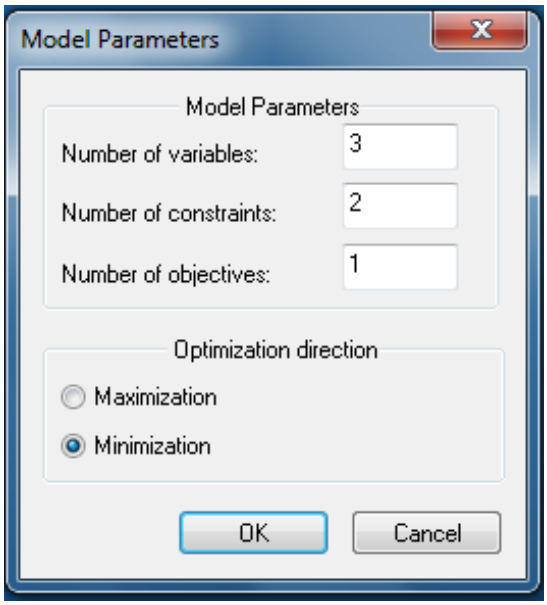
Tako se dobije sljedeći matematički model:

$$\min . f(x_1, x_2, x_3) = 12 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3$$
pod uvjetima
$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 300,$$
$$5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 400,$$
$$x_1 \leq 50,$$
$$x_2 \leq 100,$$
$$x_3 \leq 12,$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0.$$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear Program Solver* korištenjem izbornika *File,* opcije *New* i podopcije *Table Model* (vidjeti Sliku 3.) Upisuju se podatci (vidjeti Sliku 12.):

- broj varijabli: 3
- broj uvjeta: 2
- broj funkcija cilja: 1
- vrsta optimizacije: *Minimization*

Slika 12. Unos parametara za Primjer 3.



Izvor: autor

Posljednja tri uvjeta iz matematičkoga modela bit će upisana u retku *UpperBound* koji označava najveću dozvoljenu vrijednost svake nezavisne varijable.

Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu. U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

U redak *Objective* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. Na kraju reda upisana je oznaka *Min* koja označava minimizaciju. U stupac X1 upisuje se 12, u stupac X2 5, u stupac X3 7.

U redak *Row*1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X1 upisuje se 5, u stupac X2 upisuje se 3, u stupac X3 2, a u stupac R.H.S. 300. Dvostrukim klikom miša na oznaku <= u šestom stupcu treba promijeniti tu oznaku u >=.

U redak *Row*2 upisuje se drugi uvjet. U stupac X2 upisuje se 5, u stupac X3 7, a u stupac R.H.S. 400. Stupac X1 treba ostaviti praznim.

U redak *UpperBound* upisuju se gornje granice za vrijednosti nezavisnih varijabli. U stupac X1 upisuje se 50, u stupac X2 100, u stupac X3 12.

Pod *Type* izabire se *INT* jer je riječ o nenegativnim cjelobrojnim varijablama. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 13.

Slika 13. Unos ulaznih podataka za Primjer 3.

LiPS Model1

	X1	X2	X3		RHS
Objective	12	5	7	->	MIN
Row1	5	3	2	>=	300
Row2		5	7	<=	400
Lower Bound	0	0	0		
Upper Bound	50	100	12		
Type	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom miša na zelenu strelicu, a potom na natpis *Solve active model* dobivamo tablicu s optimalnim rješenjem (vidjeti sliku 14.).

Slika 14. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 3.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Minimum = 544
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	12	12	YES
X2	80	5	YES
X3	0	7	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (12, 80, 0), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi f^* = 544.

Zaključuje se da je optimalni mjesečni plan reklamiranja proizvoda sljedeći: platiti 12 TV reklama i 80 oglasa u časopisima. Minimalni ukupni troškovi oglašavanja iznose 544 000 kn.

Budući da vrijede jednakosti:

$$(5 \cdot 12 + 3 \cdot 80 + 2 \cdot 0) \cdot 1000 = 300\ 000,$$
$$(5 \cdot 80 + 7 \cdot 0) \cdot 1000 = 400\ 000,$$

zaključuje se:

- Sve uplaćene oglase vidjet će očekivano 300 000 ljudi.
- Za plaćanje oglasa u novinama i časopisima potrošit će se sva dozvoljena financijska sredstva (400 000 kn).

4.4. Primjer 4.

Treba riješiti prethodni primjer uz dodatni uvjet da treba platiti najmanje jedan oglas svake pojedine vrste.

Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalnih vrijednosti svih varijabli odlučivanja i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Rješenje:

Iz zahtjeva da se mora platiti najmanje jedan oglas svake pojedine vrste zaključuje se da mora vrijediti relacija:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.$$

Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 3. ostaju nepromijenjene.

Dobiveni matematički model glasi:

$$\begin{aligned}
&\min . f(x_1, x_2, x_3) = 12 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 \geq 300, \\
&5 \cdot x_2 + 7 \cdot x_3 \leq 400, \\
&x_1 \leq 50, \\
&x_2 \leq 100, \\
&x_3 \leq 12, \\
&x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Klikom miša na crveni križić u gornjem desnom kutu okvira zatvori se tablica s optimalnim vrijednostima varijabli odlučivanja iz Primjera 3. Dobiva se tablica prikazana na Slici 13. U toj se tablici preinači redak *Lower Bound* tako da se umjesto svake od triju nula upiše 1. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 15.

Slika 15. Tablica s ulaznim podacima za Primjer 4.

LiPS Model2

	X1	X2	X3		RHS
Row1	5	3	2	>=	300
Row2		5	7	<=	400
Lower Bound	1	1	1		
Upper Bound	50	100	12		
Type	INT	INT	INT		

Model | Constraints | Variables

Izvor: autor

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 3. dobiva se sljedeća tablica s optimalnim rješenjem gornjega matematičkoga modela (vidjeti Sliku 16).

Slika 16. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 4.

```
-> Optimal solution FOUND
-> Minimum = 553
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	13	12	YES
X2	78	5	YES
X3	1	7	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right)$ = (13, 78, 1), a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 553$.

Zaključuje se da će novi optimalni mjesečni plan reklamiranja proizvoda biti sljedeći: platiti 13 TV oglasa, 78 oglasa u časopisima i 1 oglas u novinama. Pripadni optimalni troškovi reklamiranja iznose 553 000 kn.

Analiziraju se apsolutna i relativna promjena optimalne vrijednosti svake pojedine varijable odlučivanja, kao i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_1 jednaka je 12, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 13. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_1 povećala za 1, odnosno za $\frac{13-12}{12} \cdot 100 \approx 8.33\%$.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_2 jednaka je 80, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 78. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_2 smanjila za 2, odnosno za $\frac{80-78}{80} \cdot 100 = 2.5\%$.

Prvotna optimalna vrijednost varijable x_3 jednaka je 0, a nova optimalna vrijednost te varijable jednaka je 1. Zaključuje se da se optimalna vrijednost varijable x_3 povećala za 1. Relativna promjena vrijednosti te varijable nije definirana jer je prvotna optimalna vrijednost jednaka 0.

Prvotna optimalna vrijednost funkcije cilja jednaka je 544, a nova optimalna vrijednost te funkcije jednaka je 553. Zaključuje se da se optimalna vrijednost funkcije cilja povećala za 9, odnosno za $\frac{553-544}{544} \cdot 100 \approx 1.65\%$.

Budući da vrijede jednakosti:

$$(5 \cdot 13 + 3 \cdot 78 + 2 \cdot 1) \cdot 1000 = 301\ 000,$$
$$(5 \cdot 78 + 7 \cdot 1) \cdot 1000 = 397\ 000 < 400\ 000,$$

zaključuje se:

- Sve uplaćene oglase vidjet će očekivano 301 000 ljudi (za 1000, odnosno za $\frac{1000}{300\ 000} \cdot 100 \approx 0.33$ % više nego u rješenju Primjera 3.)

- Za plaćanje oglasa u novinama i časopisima potrošit će se 397 000 kn, pa će preostati ukupno 400 000 – 397 000 = 3 000 kn namijenjenih za tu svrhu. Stoga će se iznos planiran za plaćanje tih oglasa smanjiti za $\frac{3000}{400\ 000} \cdot 100 = 0.75\%$ u odnosu na analogne troškove iz Primjera 3.

4.5. Primjer 5.

Tvrtka „*Mućkarević* d.o.o.“ iz Bekteža planira promidžbenu kampanju kako bi privukla nove kupce. U tu svrhu u četirima različitima dnevnim novinama namjeravaju plasirati ukupno najviše 12 promidžbenih oglasa.

Svaki oglas u listu *Bekteška kronika* košta 300 kn i pročitat će ga 3000 ljudi.

Svaki oglas u listu *Glas Bekteža* košta 200 kn i pročitat će ga 2000 ljudi.

Svaki oglas u listu *Slavonski glas* košta 150 kn i pročitat će ga 1500 ljudi.

Svaki oglas u listu *Slavonske novosti* košta 100 kn i pročitat će ga 1000 ljudi.

Tvrtka bi željela da sve plaćene oglase pročita najmanje 30 000 ljudi.

Treba izraditi optimalnu strategiju oglašavanja tako da ukupni troškovi promidžbe budu minimalni, pa odrediti te ukupne troškove i očekivani broj ljudi koji će pročitati sve uplaćene oglase. Pritom nije nužno platiti poruku svakoga pojedinoga tipa, što znači da može postojati barem jedan tip oglasa koji neće biti iskorišten.

Rješenje:

Neka su:

x_1 = broj oglasa u listu *Bekteška kronika*

x_2 = broj oglasa u listu *Glas Bekteža*

x_3 = broj oglasa u listu *Slavonski glas*

x_4 = broj oglasa u listu *Slavonske novosti*.

Cijena x_1 oglasa u *Bekteškoj kronici* iznosi $300 \cdot x_1$ kn.

Cijena x_2 oglasa u *Glasu Bekteža* iznosi $200 \cdot x_2$ kn.

Cijena x_3 oglasa u *Slavonskom glasu* iznosi $150 \cdot x_3$ kn.

Cijena x_4 oglasa u *Slavonskim novostima* iznosi $100 \cdot x_4$ kn.

Ukupna cijena svih objavljenih oglasa u svim listovima iznosi:

$$300 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 100 \cdot x_4 \text{ kn.}$$

Taj izraz treba minimizirati.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_1 oglasa u *Bekteškoj kronici* jednak je $3000 \cdot x_1$.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_2 oglasa u *Glasu Bekteža* jednak je $2000 \cdot x_2$.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_3 oglasa u *Slavonskom glasu* jednak je $1500 \cdot x_3$.

Ukupan broj ljudi koji će vidjeti x_4 oglasa u *Slavonskim novostima* jednak je $1000 \cdot x_4$.

Ukupan broj svih ljudi koji će vidjeti sve plaćene oglase iznosi:

$$3000 \cdot x_1 + 2000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 + 1000 \cdot x_4$$

Prema zahtjevu tvrtke, taj broj mora biti jednak najmanje 30 000, pa se zaključuje da mora vrijediti nejednakost

$$3000 \cdot x_1 + 2000 \cdot x_2 + 1500 \cdot x_3 + 1000 \cdot x_4 \geq 30\ 000,$$

odnosno nakon dijeljenja sa 500,

$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \geq 60$$

Ukupan broj svih plaćenih oglasa jednak je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$. Iz zahtjeva da tvrtka želi platiti ukupno najviše 12 oglasa zaključuje se da vrijedi nejednakost:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12.$$

Vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0 .$$

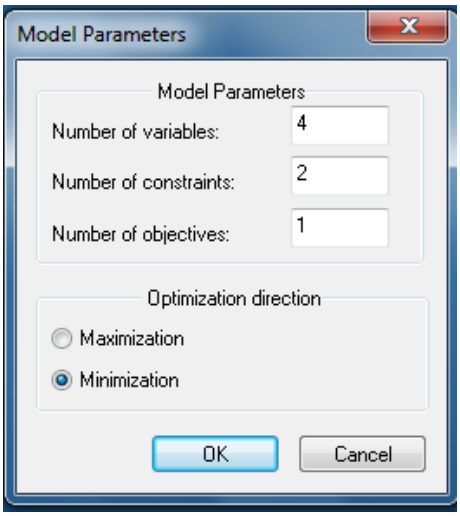
Dobiveni matematički model glasi:

$$\begin{aligned}
&\min . f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 300 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 100 \cdot x_4 \\
&\text{pod uvjetima} \\
&6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \geq 60, \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12, \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}_0
\end{aligned}$$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear Program Solver* korištenjem izbornika *File* i opcije *New Problem*. Upisuju se sljedeći podatci (vidjeti Sliku 17):

- broj varijabli: 4
- broj uvjeta: 2
- broj funkcija cilja: 1
- vrsta optimizacije: *Minimization*

Slika 17. Unos parametara za Primjer 5.



Izvor: autor

Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu. U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

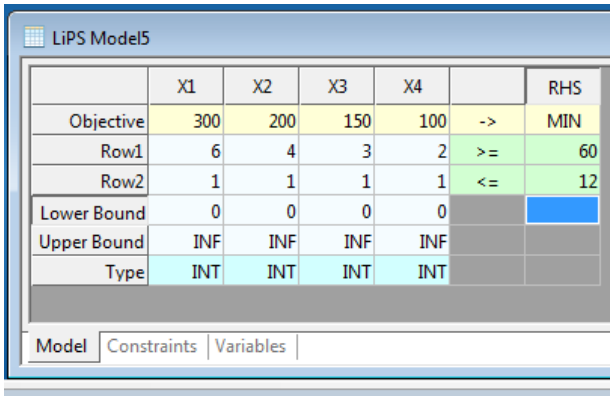
U redak *Objective* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. Na kraju reda upisana je oznaka *Min* koja označava minimizaciju. U stupac X1 upisuje se 300, u stupac X2 200, u stupac X3 150, a u stupac X4 100.

U redak *Row*1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X1 upisuje se 6, u stupac X2 4, u stupac X3 3, u stupac X4 2, a u stupac R.H.S. 60.

U redak *Row*2 upisuje se drugi uvjet. U stupce X1, X2, X3 i X4 upisuju se jedinice, a u stupac R.H.S. upisuje se 12. Klikom miša na oznaku >= otvara se padajući izbornik i treba promijeniti tu oznaku u <=.

Pod *Type* izabire se *INT* jer je riječ o nenegativnim cjelobrojnim varijablama. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 18 .

Slika 18. Tablica s ulaznim podatcima za Primjer 5.



	X1	X2	X3	X4		RHS
Objective	300	200	150	100	->	MIN
Row1	6	4	3	2	>=	60
Row2	1	1	1	1	<=	12
Lower Bound	0	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT	INT		

Izvor: autor

Klikom miša na zelenu strelicu, a potom na natpis *Solve active model* dobivamo tablicu s optimalnim rješenjem (vidjeti Sliku 19.).

Slika 19. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 5.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Minimum = 3000
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	10	300	YES
X2	0	200	YES
X3	0	150	YES
X4	0	100	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right) = (10,\ 0,\ 0,\ 0)$, a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 3000$. Zaključuje se da je optimalni plan oglašavanja: platiti 10 oglasa u listu *Bekteška kronika*. Pripadajući optimalni troškovi promidžbe iznose 3000 kn.

Budući da vrijedi jednakost

$$3000 \cdot 10 + 2000 \cdot 0 + 1500 \cdot 0 + 1000 \cdot 0 = 30\ 000,$$

zaključuje se da će sve plaćene oglase vidjeti očekivano 30 000 ljudi.

4.6. Primjer 6.

Treba riješiti prethodni primjer uz dodatni uvjet da treba platiti najmanje jedan oglas svake pojedine vrste.

Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalnih vrijednosti svih varijabli odlučivanja i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Rješenje:

Iz dodatnog uvjeta da najmanje jedan oglas mora biti objavljen u svakim novinama zaključuje se da mora vrijediti

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}.$$

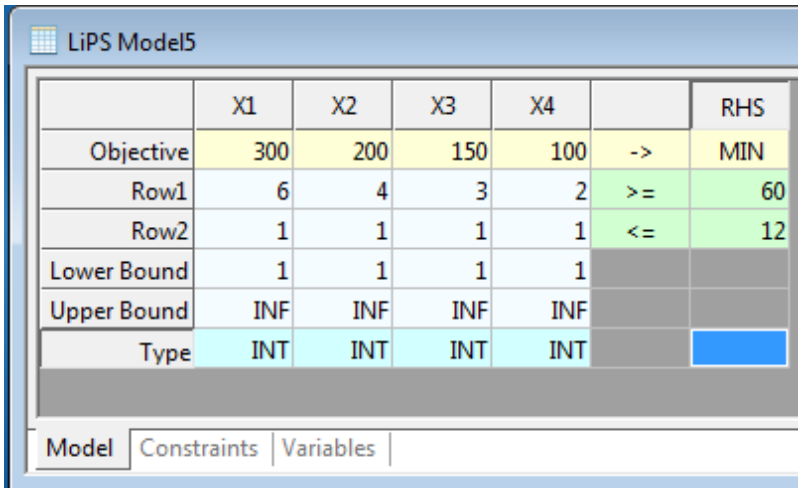
Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 5. ostaju nepromijenjene.

Dobiveni matematički model glasi:

$$\min . f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 300 \cdot x_1 + 200 \cdot x_2 + 150 \cdot x_3 + 100 \cdot x_4$$
pod uvjetima
$$6 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + 2 \cdot x_4 \geq 60,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 12,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}.$$

Klikom miša na crveni križić u gornjem desnom kutu okvira zatvori se tablica s optimalnim vrijednostima varijabli odlučivanja iz Primjera 5. Dobiva se tablica prikazana na Slici 18. U toj se tablici preinači redak *Lower Bound* tako da se umjesto svake od četiriju nula upiše 1. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 20.

Slika 20. Tablica s ulaznim podacima za Primjer 6.


LiPS Model5

	X1	X2	X3	X4		RHS
Objective	300	200	150	100	->	MIN
Row1	6	4	3	2	>=	60
Row2	1	1	1	1	<=	12
Lower Bound	1	1	1	1		
Upper Bound	INF	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT	INT		

Model | Constraints | Variables

Izvor: autor

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 5. dobiva se sljedeća tablica s optimalnim rješenjem gornjega matematičkoga modela (vidjeti Sliku 21.).

Slika 21. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 6.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Minimum = 3000
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	8	300	YES
X2	1	200	YES
X3	2	150	YES
X4	1	100	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje ovog problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*\right) = (8,\ 1,\ 2,\ 1)$, a optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 3000$.

Zaključuje se da je optimalan plan oglašavanja: platiti 8 oglasa u listu *Bekteška kronika*, 1 oglas u listu *Glas Bekteža*, 2 oglasa u listu *Slavonski glas* i 1 oglas u listu *Slavonske novosti*. Ukupni minimalni troškovi iznose 3000 kn.

Budući da je

$$3000 \cdot 8 + 2000 \cdot 1 + 1500 \cdot 2 + 1000 \cdot 1 = 30\ 000,$$

zaključuje se da će sve oglase ukupno vidjeti očekivano 30 000 ljudi.

Može se primijetiti da se optimalna vrijednost svake od varijabli x_2 i x_4 povećala za 1, dok se optimalna vrijednost varijable x_3 povećala za 2. (Pripadne relativne promjene nisu definirane jer je početna optimalna vrijednost svake od tih varijabli bila 0.) Optimalna vrijednost varijable x_1 se smanjila za 2, odnosno za $\frac{2}{10} \cdot 100 = 20\%$.

Pripadajući optimalni troškovi promidžbe iznose 3000 kn. Oni su jednaki optimalnim troškovima iz Primjera 5., što znači da dodavanje novoga uvjeta nije utjecalo na optimalnu vrijednost funkcije cilja.

4.7. Primjer 7.

Tvornica bezalkoholnih napitaka „*Drpnjaković* d.d.“ iz Djedine Rijeke želi reklamirati svoj najnoviji proizvod *Grapesoda* u trima medijima: programu lokalne televizijske postaje *DRITVA*, programu lokalnoga radija *Radio Djedinjak* i lokalnim novinama *Djedinjska kronika*. Osnovni podatci su dani u sljedećoj tablici.

Tablica 3. Osnovni podatci za Primjer 7.

medij	televizija	novine	radio
jedinična cijena oglasa [000 kn]	2	0.6	0.3
broj mogućih korisnika [000]	1	0.4	0.18

Izvor: [8].

Djedinjska kronika tjedno objavljuje najviše 10 oglasa svakoga od oglašivača. Radi uspostavljanja ravnoteže između oglašavanja u medijima, broj radijskih oglasa mora biti najviše jednak polovici ukupnoga broja svih plaćenih oglasa, a barem 10% svih oglasa mora biti emitirano na televiziji.

Na sve tri vrste oglasa tjedno smije utrošiti najviše 18 200 kn. Cilj tvrtke je maksimizirati ukupan broj mogućih korisnika.

Formirati odgovarajući matematički model i riješiti ga. Potom utvrditi hoće li se za plaćanje svih oglasa iskoristiti sva tjedna raspoloživa sredstva i koji postotci u odnosu na ukupan broj svih oglasa otpadaju na oglase emitirane na radiju, odnosno na televiziji.

Rješenje:

Neka su:

x_1 – ukupan broj televizijskih oglasa,

x_2 – ukupan broj novinskih oglasa,

x_3 – ukupan broj radijskih oglasa.

Ukupan broj korisnika koji će pogledati x_1 televizijskih oglasa jednak je: $1 \cdot x_1 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će pročitati x_2 novinskih oglasa jednak je: $0.4 \cdot x_2 \cdot 1000$.

Ukupan broj korisnika koji će poslušati x_3 radio oglasa jednak je: $0.18 \cdot x_3 \cdot 1000$.

Ukupan broj ljudi koji će pogledati/pročitati/poslušati sve vrste oglasa jednak je: $1 \cdot x_1 \cdot 1000 + 0.4 \cdot x_2 \cdot 1000 + 0.18 \cdot x_3 \cdot 1000 = (1 \cdot x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.18 \cdot x_3) \cdot 1000$.

Treba maksimizirati ovaj izraz. To će se učiniti tako da se maksimizira izraz u zagradi, pa dobivena optimalna vrijednost pomnoži s 1000.

Cijena x_1 televizijskih oglasa jednaka je $2 \cdot x_1 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_2 oglasa u novinama jednaka je $0.6 \cdot x_2 \cdot 1000$ kn.

Cijena x_3 radijskih oglasa jednaka je $0.3 \cdot x_3 \cdot 1000$ kn.

Ukupna cijena svih plaćenih oglasa iznosi:

$$2 \cdot x_1 \cdot 1000 + 0.6 \cdot x_2 \cdot 1000 + 0.3 \cdot x_3 \cdot 1000 = (2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3) \cdot 1000 \text{ kn.}$$

Budući da se na sve tri vrste oglasa tjedno smije utrošiti najviše 18 200 kn, dobiva se uvjet

$$(2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3) \cdot 1000 \leq 18\ 200,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 1000,

$$2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 \leq 18.2.$$

Iz zahtjeva da tjedni broj oglasa u novinama može biti najviše jednak 10 zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_2 \leq 10.$$

Iz zahtjeva da broj radijskih oglasa mora biti najviše jednak polovici ukupnoga broja svih plaćenih oglasa zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_3 \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3).$$

Iz zahtjeva da barem 10% svih oglasa mora biti emitirano na televiziji zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$x_1 \geq \frac{1}{10} \cdot (x_1 + x_2 + x_3).$$

Vrijednosti svih varijabli moraju biti nenegativni cijeli brojevi. (Nije moguće uplatiti polovicu televizijskog oglasa, četvrtinu oglasa u novinama itd.) Stoga vrijedi uvjet:

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0 := \{0,\ 1,\ 2, \ldots\}.$$

Matematički model glasi:

$$\max . f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.18 \cdot x_3$$
pod uvjetima
$$2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 \leq 18.2,$$
$$x_2 \leq 10,$$
$$x_3 \leq \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 + x_3),$$
$$x_1 \geq \frac{1}{10} \cdot (x_1 + x_2 + x_3),$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$$

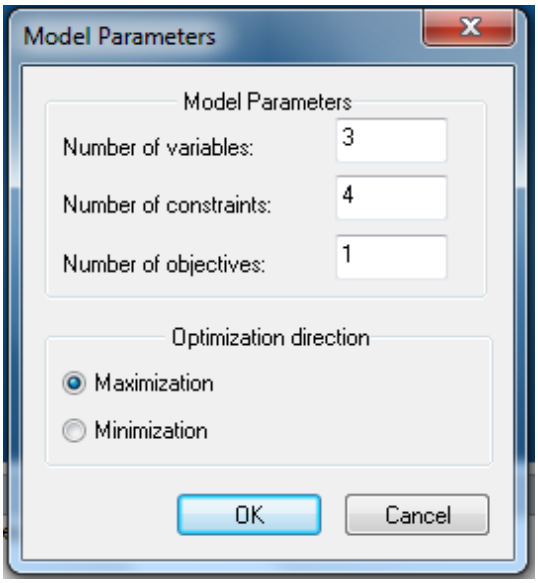
Taj se model može zapisati u obliku:

$$\max . f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.18 \cdot x_3$$
pod uvjetima
$$2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 \leq 18.2,$$
$$x_2 \leq 10,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,$$
$$9 \cdot x_1 - x_2 - x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$$

Treba otvoriti novu datoteku programa *Linear Program Solver*, korištenjem izbornika *File* i opcije *New Problem*. Upisuju se sljedeći podatci (vidjeti Sliku 22.):

- broj varijabli: 3
- broj uvjeta: 4
- broj funkcija cilja: 1
- vrsta optimizacije: *Maximization*

Slika 22. Unos parametara za Primjer 7.



Izvor: autor

Klikom na OK dobiva se tablica za unos koeficijenata u matematičkom modelu. U tablicu je potrebno unijeti koeficijente uz varijable u funkciji cilja i uvjetima.

U redak *Objective* unose se koeficijenti uz varijable u funkciji cilja. Na kraju reda upisana je oznaka *Max* koja označava maximizaciju. U stupac X1 upisuje se 1, u stupac X2 0.4 i u stupac X3 0.18.

U redak *Row*1 upisuje se prvi uvjet. U stupac X1 upisuje se 2, u stupac X2 0.6, u stupac X3 0.3, a u stupac R.H.S. 18.2.

U redak *Row*2 upisuje se drugi uvjet. U stupac X2 upisuje se jedinica, a ostala polja ostaju prazna, u stupac R.H.S. upisuje se 10.

U redak *Row*3 upisuje se treći uvjet. U stupac X1 upisuje se 1, u stupac X2 upisuje se 1, u stupac X3 upisuje se -1, a u R.H.S. upisuje se 0. Klikom miša na oznaku <= otvara se padajući izbornik i treba promijeniti tu oznaku u >=.

U redak *Row*4 upisuje se četvrti uvjet. U stupac X1 upisuje se 9, u stupac X2 upisuje se -1, u stupac X3 upisuje se -1, a u R.H.S. upisuje se 0. Klikom miša na oznaku <= otvara se padajući izbornik i treba promijeniti tu oznaku u >=.

Pod *Type* izabire se *INT* jer je riječ o nenegativnim cjelobrojnim varijablama. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 23 .

Slika 23. Tablica s ulaznim podatcima za Primjer 7.

LiPS Model3

	X1	X2	X3		RHS
Objective	1	0.4	0.18	->	MAX
Row1	2	0.6	0.3	<=	18.2
Row2		1		<=	10
Row3	1	1	-1	>=	0
Row4	9	-1	-1	>=	0
Lower Bound	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT		

Model | Constraints | Variables

Izvor: autor

Klikom miša na zelenu strelicu, a potom na natpis *Solve active model* dobivamo tablicu s optimalnim rješenjem (vidjeti Sliku 24.).

Slika 24. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 7.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 10.52
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	4	1	YES
X2	10	0.4	YES
X3	14	0.18	YES

Izvor: autor

Optimalno rješenje promatranoga problema je $\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (4,\ 10,\ 14)$. Optimalna vrijednost funkcije cilja iznosi $f^* = 10.52$.

Zaključuje se da je optimalni tjedni plan reklamiranja proizvoda sljedeći: platiti 4 televizijska oglasa, 10 oglasa u novinama i 14 radijskih oglasa. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 10 520.

Budući da je

$$(2\cdot 4+0.6\cdot 10+0.3\cdot 14)\cdot 1000=18\ 200,$$

zaključuje se da će biti iskorištena sva raspoloživa sredstva.

Nadalje, ukupan broj svih oglasa jednak je $4+10+14=28$, pa na radijske oglase otpada ukupno $\frac{14}{28}\cdot 100=50\%$ svih oglasa, a na televizijske oglase ukupno $\frac{4}{28}\cdot 100\approx 14.29\%$ svih oglasa.

4.8. Primjer 8.

Treba riješiti prethodni primjer ako se zbog dobre prodaje ukupna tjedna raspoloživa financijska sredstva povećaju za 10%.

Analizirati apsolutnu i relativnu promjenu optimalnih vrijednosti svih varijabli odlučivanja i optimalne vrijednosti funkcije cilja.

Rješenje:

Neka su:

x_1 – ukupan broj televizijskih oglasa,

x_2 – ukupan broj novinskih oglasa,

x_3 – ukupan broj radijskih oglasa.

Početna ukupna tjedna rasploživa financijska sredstva iznose 18 200 kn. Njihovim povećanjem za 10% dobije se:

$$18\ 200+\frac{10}{100}\cdot 18\ 200=18\ 200+1\ 820=20\ 020.$$

Analogno kao u Primjeru 7. zaključuje se da mora vrijediti nejednakost

$$2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 \leq 20.02.$$

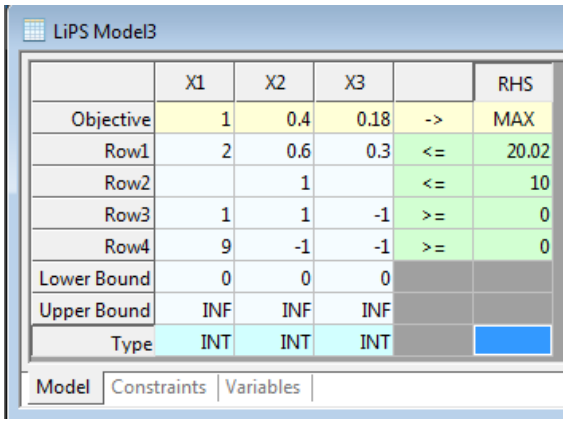
Ostale relacije u matematičkom modelu iz Primjera 7. ostaju nepromijenjene.

Novi matematički model glasi:

$$\max . f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 0.4 \cdot x_2 + 0.18 \cdot x_3$$
pod uvjetima
$$2 \cdot x_1 + 0.6 \cdot x_2 + 0.3 \cdot x_3 \leq 20.02,$$
$$x_2 \leq 10,$$
$$x_1 + x_2 - x_3 \geq 0,$$
$$9 \cdot x_1 - x_2 - x_3 \geq 0,$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}_0$$

Klikom miša na crveni križić u gornjem desnom kutu okvira zatvori se tablica s optimalnim vrijednostima varijabli odlučivanja iz Primjera 7. Dobiva se tablica prikazana na Slici 23. U toj se tablici preinači redak *Row*1 u R.H.S. se upisuje 20.02. Tako se dobiva tablica prikazana na Slici 25.

Slika 25. Tablica s ulaznim podacima za Primjer 8.



LiPS Model3

	X1	X2	X3		RHS
Objective	1	0.4	0.18	->	MAX
Row1	2	0.6	0.3	<=	20.02
Row2		1		<=	10
Row3	1	1	-1	>=	0
Row4	9	-1	-1	>=	0
Lower Bound	0	0	0		
Upper Bound	INF	INF	INF		
Type	INT	INT	INT		

Model | Constraints | Variables

Izvor: autor

Postupkom opisanim u rješenju Primjera 7. dobiva se sljedeća tablica s optimalnim rješenjem gornjega matematičkoga modela (vidjeti Sliku 26.).

Slika 26. Tablica s optimalnim rješenjem Primjera 8.

```
>> Optimal solution FOUND
>> Maximum = 11.34
```

*** RESULTS - VARIABLES ***

Variable	Value	Obj. Cost	Integer
X1	5	1	YES
X2	10	0.4	YES
X3	13	0.18	YES

Izvor: autor

Rješavanjem pomoću programa *Linear Program Solver* dobijemo:

$\left(x_1^*, x_2^*, x_3^*\right) = (5,\ 10,\ 13)$ i $f^* = 11.34$.

Zaključuje se da je optimalni tjedni plan reklamiranja proizvoda sljedeći: platiti 5 televizijska oglasa, 10 oglasa u novinama i 13 radijskih oglasa. Optimalni broj mogućih klijenata iznosi 11 340.

Budući da je

$$(2 \cdot 5 + 0.6 \cdot 10 + 0.3 \cdot 13) \cdot 1000 = 19\ 900,$$

zaključuje se da će preostati ukupno $20\ 020 - 19\ 900 = 120$ kn, odnosno $\frac{120}{20\ 020} \cdot 100 \approx 0.6\%$ ukupno raspoloživoga iznosa.

Nadalje, ukupan broj svih oglasa jednak je $5 + 10 + 13 = 28$, pa na radijske oglase otpada ukupno $\frac{13}{28} \cdot 100 \approx 46.43\%$ svih oglasa, a na televizijske oglase ukupno $\frac{5}{28} \cdot 100 \approx 17.86\%$ svih oglasa.

Optimalna vrijednost varijable x_1 se povećala za 1, odnosno za $\frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$.

Optimalna vrijednost varijable x_2 je ostala nepromijenjena.

Optimalna vrijednost varijable x_3 se smanjila za 1, odnosno za $\frac{1}{14} \cdot 100 \approx 7.14\%$.

Optimalna vrijednost funkcije cilja se povećala za $11\ 340 - 10\ 520 = 820$, odnosno za $\frac{820}{10\ 520} \cdot 100 \approx 7.79\%$.

5. ZAKLJUČAK

Ovaj rad objašnjava kako se linearno programiranje može koristiti u ekonomskim problemima poput izbora medija za oglašavanje. Ova relativno mlada metoda pokazala se efikasnom u optimizaciji poslovnih procesa u tvrtkama.

Velika je konkurencija na tržištu i sva poduzeća žele biti dugoročno održiva. Svima je uglavnom zajedničko postići maksimizaciju dobiti i minimizaciju troškova. Svako poduzeće ima neka svoja posebna svojstva i zahtjeve, no cilj je u većini slučajeva isti. Bitno je uz određene uvjete izvući što veću korist.

U radu je na pogodno odabranim primjerima prikazano kako se pomoću računalnoga programa *Linear Program Solver* rješavaju problemi kod izbora medija za oglašavanje. Ovaj program je izabran jer je jednostavan za korištenje i svima lako dostupan, te se uz kratke upute za rad može lako koristiti u rješavanju zadataka.

Treba posebno naglasiti da, unatoč napretku računalne tehnologije, prvu fazu optimizacije – matematičko modeliranje optimizacijskoga problema – i dalje nužno mora provoditi čovjek. Njegova je uloga u tom procesu nezamjenjiva. Pri postavljanju matematičkoga modela treba znati interpretirati svaku pojedinu njegovu komponentu, tj. funkciju cilja i svaki od postavljenih uvjeta. U ovom je radu primijenjen upravo takav koncept, tj. svaka komponenta korištenih matematičkoga modela je detaljno objašnjena.

Vrlo bitan dio ovih zadataka je provedba analize osjetljivosti. Njome se utvrđuje kako relativno male izmjene početnih uvjeta utječu na osjetljivost optimalnoga rješenja. Promjena barem jednoga početnoga uvjeta uglavnom povlači promjenu barem jedne komponente optimalnoga rješenja. Ta se tvrdnja odnosi i na optimalnu vrijednost funkcije cilja, ali postoje slučajevi (vidjeti Primjer 6.) u kojima dodavanje novoga uvjeta ne utječe na tu vrijednost. Takve analize je zbog toga vrlo podesno raditi rabeći računalne programe jer se time bitno skraćuje vrijeme njihove efektivne provedbe.

Zaključno se može istaknuti da se i ovim radom nastojala potvrditi teza da – uz kvalitetne, ali ne odveć komplicirane računalne programe, tj. programe koji se u vrlo kratkom vremenu mogu naučiti uspješno koristiti – proces donošenja optimalne odluke može istodobno trajati bitno kraće od „klasičnih“ procesa donošenja odluke, a dati barem jednako

dobre, a u većini slučajeva i bolje rezultate, ponajprije one vezane uz analizu osjetljivosti optimalnoga rješenja. Zbog toga ubuduće treba očekivati što veću primjenu toga koncepta u našoj poslovnoj praksi.

6. LITERATURA

Knjige:

1. Chiang, C. A.; 1996, Osnovne metode matematičke ekonomije, Zagreb, Mate, str. 651-665.
2. Neralić, L., Šego, B. (2009) Matematika, Zagreb, Element , str. 127. – 130., 277. – 314.

Internet izvori:

3. Daniela Petkoviček (2013.) URL: http://matematika.fkit.hr/staro/izborna/referati/Daniela%20Petkovicek%20-%20Linearno%20programiranje.pdf 29. 06. 2015.
4. URL: http://web.efzg.hr/dok/INF/Ceric/spo/%282a%29_linearno_programiranje.pdf 29. 06. 2015.
5. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming 29. 06. 2015.
6. URL: http://www.purplemath.com/modules/linprog.htm 29. 06. 2015.
7. Osobna internetska stranica mr.sc. Bojana Kovačića, URL: http://bkovacic.weebly.com/zavrscaronni-i-diplomski-radovi.html, 29.06.2015.
8. URL: http://college.cengage.com/mathematics/larson/elementary_linear/4e/shared/downloads/c09s3.pdf, 29.06.2015.
9. URL: http://www.muhlenberg.edu/depts/abe/business/miller/mscipp/lpformulation.ppt, 29.06.2015.
10. URL: https://www.youtube.com/watch?v=aN5cqEqHhQ8, 29.06.2015.
11. URL: http://faculty.pepperdine.edu/jburke2/ba452/PowerP1/QA_8.pptx, 29.06.2015.

7. POPIS TABLICA I SLIKA

POPIS TABLICA

POPIS SLIKA

IZJAVA O AUTORSTVU RADA

Ja, **Marica Kerepčić**, pod punom moralnom, materijalnom i kaznenom odgovornošću, izjavljujem da sam isključivi autor diplomskog rada pod naslovom **PRIMJENA LINEARNOGA PROGRAMIRANJA NA IZBOR MEDIJA ZA OGLAŠAVANJE,** te da u navedenom radu nisu na nedozvoljen način korišteni dijelovi tuđih radova.

U Požegi, 18.9.2015.

Marica Kerepčić