VELEUČILIŠTE U POŽEGI

Tomislav Stojčević

PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNA NA RJEŠAVANJE PROBLEMA INPUT-OUTPUT ANALIZE S VIŠE INDUSTRIJSKIH SEKTORA

DIPLOMSKI RAD

Požega, 2014. godine.

VELEUČILIŠTE U POŽEGI
DRUŠTVENI ODJEL
SPECIJALISTIČKI DIPLOMSKI STRUČNI STUDIJ
TRGOVINSKO POSLOVANJE

PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNA NA RJEŠAVANJE PROBLEMA INPUT-OUTPUT ANALIZE S VIŠE INDUSTRIJSKIH SEKTORA

DIPLOMSKI RAD

PREDMET: KVANTITATIVNE METODE U TRGOVINI

MENTOR: mr.sc. Bojan Kovačić
STUDENT: Tomislav Stojčević
Matični broj studenta: 182

Požega, lipanj 2014. godine.

SADRŽAJ

1. UVOD

U ovom radu obradit će se tema: „Primjena matričnoga računa na rješavanje problema input-output analize s više industrijskih sektora“. Cilj rada je prikazati primjenu matričnoga računa na input-output analizi više industrijskih sektora nekog nacionalnog gospodarstva pomoću računalnog programa Eigenmath.

Matrica input-output analize sažima cjelokupno gospodarstvo jednoga područja na nekoliko tablica iz kojih se može jednostavnije iščitati stanje ponude (output) i potražnje (input), odnosno potrebe za njihovim uravnoteženjem.

U drugom poglavlju biti će opisani osnovni element, oznake i formule input-output analize. Kratko će se opisati povijest te analize i njezinih primjena, a osvrnut će se i na povijest i korištenje u Republici Hrvatskoj, osobito u Državnom zavodu za statistiku Republike Hrvatske.

U trećem poglavlju objasnit će se računalni program Eigenmath koji će pomoći u rješavanju postavljenih zadataka. Detaljnije će se opisati njegove najvažnije funkcije.

U četvrtom će poglavlju biti ilustrirana primjena matričnoga računa u input-output analizi na nekoliko konkretnih primjera. Uz pomoću programa Eigenmath rješavat će se zadatci i stvarati nove input-output tablice. Sama izrada input-output tablica je vrlo zahtjevna jer obuhvaća čitavo nacionalno gospodarstvo, pa je za njegov prikaz potrebno prikupiti brojne podatke. Stoga će se zadatci temeljiti na pojednostavljenim izmišljenim primjerima radi lakšeg razumijevanja.

2. INPUT-OUTPUT TABLICE

Kako bi se bolje razumjeli odnosi elemenata gospodarstva, u današnje vrijeme sve je uobičajenija primjena input-output tablice. Input-output tablice dijele proizvodni sustav privrede jednog nacionalnog gospodarstva na određeni broj industrijskih sektora. Osim nacionalnog gospodarstva, kao najčešće promatranog područja, može se provoditi i na drugim geografskim područjima, kao što su općine, županije, regije, organizacije (EU, OPEC i sl.), kontinenti i drugo. Input-output tablice prikazuju tokove robe za određeno vremensko razdoblje (mjesečno, kvartalno, godišnje ili višegodišnje). U input-output tablicama prikazane su međuovisnosti sektora pa se te tablice često nazivaju i međusektorskim tablicama. Analiza koja se provodi nad njima naziva se međusektorska analiza.

Prvi korak u sastavljanju input-output tablice predstavlja raščlanjivanje proizvodnoga sustava na određeni broj proizvodnih sektora. Budući da je privredu nemoguće raščlaniti na sve čimbenike, raščlanjivanje se praktično radi tako da se srodni proizvođači ili srodne djelatnosti grupiraju u skupine prema nekim zajedničkim obilježjima. Pri pridruživanju proizvodnih jedinica sektorima cilj je da one budu što „sličnije“. U praksi, broj industrijskih sektora može varirati od samo nekoliko do nekoliko stotina tisuća. Optimalni broj sektora je obično između 50 i 100. Prednost svrstavanja u manje grupe je manji opseg podataka koji se trebaju prikupiti, a pruža povećanu preglednost i lakšu analizu međusektorskih tablica. U slučaju potrebe detaljnih analiza svaki sektor se raščlanjuje na proizvodne sektore od kojih je sačinjen i radi se nova zasebna input-output tablica.

Drugi korak je praćenje i bilježenje tokova robe i usluga, odnosno utjecaja međusektorskih odnosa koji se prikazuju u obliku matrice. Svaka matrica sastoji se od redaka i stupaca. U stupcima su prikazane nabavne vrijednosti sektora, a reci pokazuju raspodjelu vrijednosti proizvodnje. Mjerna jedinica u kojoj se iskazuje vrijednost je novčana jedinica promatranog područja. Vrijednost se može svesti na jednu valutu pomoću tečajne liste.

Prvi stupac predstavlja ukupni output. Svaki od sljedećih stupaca, osim posljednjega, predstavlja količinu međusektorske razmjene proizvoda. Broj tih stupaca ovisi o broju industrijskih sektora u nekom nacionalnom gospodarstvu. Svaki sektor ima svoj zasebni stupac. Posljednji stupac predstavlja finalnu potražnju nacionalnog gospodarstva.

U matrice se upisuju vrijednosti svakog pojedinog sektora. Vrijednosti se formiraju na temelju međusektorske povezanosti, odnosno količini proizvoda koje svaki sektor isporučuje

svakom od ostalih sektoru. Te su vrijednosti zapravo vrijednosti sirovina, materijala i proizvoda u kojoj sektor isporučitelj sudjeluje u stvaranju vrijednosti potrebnih za proizvodnju sektoru primatelju. Svi su proizvodni sektori ujedno i isporučitelji i primatelji. Npr. sektor vodoprivrede za isporuku svojih proizvoda iziskuje postojanje električne energije, a za proizvodnju električne energije u hidroelektranama potreban je voda koja se dobiva kao proizvod sektora vodoprivrede. U slučaju finalne potražnje postoje samo primatelji koji iskorištavaju proizvod i on prestaje biti predmet razmjene.

2.1. POVIJESNI RAZVOJ INPUT-OUTPUT ANALIZE

Input-output tablicu ili, kako su je u prošlosti nazivali, tablicu ekonomije (točnije preteča multi-sektorske input-output analize) prvi put spominje François Quesnay[1].

Quesnay je bio francuski liječnik i ekonomist koji je vrhunac svoje profesionalne karijere doživio sredinom 18. stoljeća u vremenu kada je Francuskoj prijetio stečaj. U ekonomsku politiku ušao je uspoređujući cirkulaciju krvi sa gospodarstvom. Smatrao je da je značenje poljoprivrede za gospodarske cikluse ekvivalentno značenju srca za funkcioniranje tijela. Pokušao je dati prikaz međusobnih transakcija između tri sektora: poljoprivrede, industrije i potrošnje vlastele. U prva dva sektora proizvod se stvara, a u trećem se raspoređuje. Ovim pojednostavljenim primjerom nastojao je prikazati privrednu strukturu tablice koje su otvorile mogućnost da se ekonomski odnosi matematički analiziraju. U svojemu radu nastojao je dosljedno prikupljati statističke podatke kako bi mogao što točnije procijeniti vrijednosti godišnje proizvodnje i usporediti je sa potražnjom. Zaključio je da završetak svih tokova uzrokuje postizanje „prirodnoga stanja“ ekonomije. U modernoj se ekonomskoj teoriji „prirodno stanje“ definira kao opća ravnoteža ponude i potražnje.

Tablicu je doradio Karl Marx[2] koji je sva poduzeća grupirao u privredne grane i uveo razliku između proizvodnih poduzeća i finalne potrošnje.

Suvremenim utemeljiteljem input-output analize smatra se američki ekonomist Vasilij Leontijev[3]. Gotovo dva stoljeća nakon prvog pojavljivanja tablice definirao je ekonomsko-tehničke sektore jednog zatvorenog sustava u cilju stvaranja opće ekonomske ravnoteže. Zaslužan je za razvitak input-output analize zbog čega je 1973. dobio Nobelovu nagradu za

[1] Francois Quesnay (1694. – 1774.), francuski ekonomist.
[2] Karl Marx (1818. – 1883.), njemački filozof i politički ekonomist.
[3] Vasilij Leontijev (1906. – 1999.), američki ekonomist ruskoga podrijetla.

ekonomiju. U svojoj knjizi „*The Structure of American Economy* 1919-1929.“ izradio je prve input-output tablice američke privrede za godine 1919. i 1929. u svrhu definiranja razvoja američke ekonomije. U knjizi je promatrao 41 gospodarski sektor. Objavljivanje knjige 1941. godine smatra se početkom suvremene input-output analize, odnosno međusektorske analize.

Input-output tablica je tijekom godina doživljavala svoje uspone i padove. Najveći pad primjene takvog načina planiranja je zabilježen nakon Drugoga svjetskoga rata jer su mnogi političari državno planiranje smatrali svojstvenim samo komunističkim zemljama. No, planiranje zapravo nije loš instrument usmjeravanja i poticanja gospodarstva u željenom smjeru.

U suvremeno se doba input-output analiza počela naglo razvijati i primjenjivati u mnogim zemljama. Stoga se razvila i računalna potpora za njezinu primjenu koja je dodatno olakšala i ubrzala njezin razvitak, te proširila područje djelovanja.

Prva input-output analiza na prostorima Republike Hrvatske izrađena je 1955. godine. No, tada je sva istraživanja provodio Savezni zavod za statistiku u Beogradu, pa je prva input-output analize hrvatske privrede izrađena tek 1978. godine. Značajno je napomenuti da je prvu knjigu o input-output analizi na hrvatskom jeziku 1962. godine napisao Branko Horvat pod nazivom „*Međusektorska analiza*“. To je ujedno i prvo cjelovito djelo o input-output analizi koje je zaslužno za njezin daljnji razvitak i napredovanje. U prvom dijelu knjige pod naslovom „*Konstrukcija i osobine tablice međusektorskih odnosa*“ opisuje se sama konstrukcija i osobine tablica međusektorskih odnosa, matrice i sustavi jednadžbi. U tom dijelu opisani su i osnovni elementi za provođenje ekonomskih analiza navedenih u drugom dijelu knjige. U drugom dijelu knjige pod nazivom „*Ekonomska analiza*“ govori se o primjeni međusektorskih modela u analizi utjecaja finalne potrošnje na proizvodnju, analizi cijena i analizi vanjskotrgovinskih efekata, a završava se međuregionalnom input-output analizom.

2.2. MODELI INPUT-OUTPUT ANALIZE

Input-output tablice imaju dvostruku namjenu: statističku i analitičku. One daju informacije o tokovima dobara i usluga dobivenih iz različitih statističkih izvora: statistika pojedinih djelatnosti, ankete o izdacima kućanstva, statistike ulaganja, vanjskotrgovinske statistike i slično. One ujedno daju okvir za usklađivanje ravnoteže ekonomske statistike i pogodne su za izračunavanje brojnih ekonomskih pokazatelja nacionalnog računa. Kao

analitičko sredstvo, podaci iz tablica pogodni su makroekonomske analize veze između finalne potražnje i razine proizvodnje po sektorima.

Input-output analiza primjenjuje se u brojnim područjima ekonomske aktivnosti [1]:

- *Multiplikatorska analiza* prati promjene u finalnoj potrošnji preko matrice i prenosi ju na proizvodnju svakog pojedinog sektora. Uz pomoć ove analize može se pratiti utjecaj ukupne finalne potrošnje ili njenih komponenti na: vrijednost proizvodnje pojedinog sektora, potražnju za inputima pojedinih sektora, amortizaciju, dodatnu vrijednost, investicije i slično.
- *Analiza zaposlenosti* analizira kako multiplikativni efekti na proizvodnju prenose svoj utjecaj na potražnju za radom i kapitalom, te promjene zaposlenosti.
- *Analiza vanjske trgovine* analizira utjecaj vanjske trgovine na domaću proizvodnju. Najzaslužniji je element za procjenu vanjskotrgovinske politike i efektivne carinske zaštite ne ekonomski položaj pojedinih sektora.
- *Dekompozicija faktora ekonomskog rasta* promatra povećanje ukupne proizvodnje i njezinih promjena po sektorima kako bi se pokazale promjene i njihova povezanost s ukupnim rastom.
- *Struktura proizvodnih sustava* pokazuje ukupne proizvodne međuovisnosti među sektorima. Analizom se utvrđuje intenzitet proizvodnih veza među sektorima.
- *Analiza eksternih efekata* vezana je uz razvitak računalnih sustava koji omogućuje izradu input-output tablica sa sve više podataka o svakom sektoru. Prikazuje se kako pozitivna ili negativna kretanja ovise o dodatnim proizvodima, te procjenjuju njihov utjecaj na ostale sektore, kao i na susjedne privrede.

Kao jedna od slikovitih ilustracija mikro i makroanalize input-output tablica može poslužiti i sljedeći Leontijev opis: „Jedan od velikih problema u ekonomici jest kako opisati cijelu šumu, uz istodoban opis pojedinačnog drveća i međusobnih odnosa toga drveća, tj, kako obuhvatiti cjelinu, ali da se pritom sačuvaju jasno izražene sve pojedinosti“ [2].

2.3. OSNOVE ZA IZRADU INPUT-OUTPUT ANALIZE S VIŠE INDUSTRIJSKIH SEKTORA

Kao što je već istaknuto, input-output analiza proučava ekonomiju neke zemlje koju čini više industrijskih sektora. Cilj je uspostaviti relacije (koje se izražavaju vrijednosno ili količinski) između sektora kako bi se proces proizvodnje odvijao neometano.

U modelu je važno raspoznavati:

- ulaz inputa (sredstva za proizvodnju, kapital i rad), tj. količinu koja ulazi u industrijski sektor i
- izlaz outputa (proizvoda i usluga), tj. količinu koja izlazi iz industrijskog sektora.

Svaki sustav je sačinjen od dvaju ili više industrijskih sektora koji se promatraju kroz analizu. Osnovni problem je uspostaviti ravnotežu kako bi se odredila razina proizvodnje koja će zadovoljiti potražnju za određenim proizvodom. Svaki sektor se obično sastoji od više zasebnih sektora koji su povezani određenim obilježjima.

2.3.1. OSNOVNE OZNAKE I FORMULE

U stvaranju input-output koriste se općenito različite oznake. One nisu standardizirane, nego su prilagođene prema različitim kriterijima označavanja (npr. jezičnom kriteriju).

2.3.1.1. RAVNOTEŽNI SUSTAV INPUT-OUTPUT TABLICE

Oznake koje će se primjenjivati u radu su sljedeće:

n – ukupan broj industrijskih sektora

i – broj (oznaka) industrijskoga sektora

Q_i – označava ukupnu količinu proizvoda proizvedenih u sektoru i, odnosno output sektora i,

Q_{ij} – označava količinu proizvoda proizvedenih u sektoru i koja prelazi u sektor j radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje u tom sektoru,

q_i – označava ukupnu količinu proizvoda proizvedenih u sektoru i nužne za gospodarske potrebe sektora i, odnosno finalnu potražnju sektora i.

Slika 2.1. *Input-output tablica* [3]

Q_i	Q_{ij}				q_i
Q_1	Q_{11}	Q_{12}	...	Q_{1n}	q_1
Q_2	Q_{21}	Q_{22}	...	Q_{2n}	q_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
Q_n	Q_{n1}	Q_{n2}	...	Q_{nn}	q_n

Ravnotežni sustav usklađuje ponudu i potražnju. Ponudu je najčešće potrebno kreirati na osnovi potražnje. Prvi stupac tablice prikazuje ukupne outpute sektora. Središnji stupci prikazuju međusektorsku razmjenu. Posljednji stupac predstavlja finalne potražnje sektora.

Osnovne jednadžbe ravnotežnoga sustava zapisane u skraćenom obliku su:

$$Q_j = \sum_{i=1}^{n} Q_{ij} + q_j \text{, za svaki } j = 1, 2, ..., n.$$

One izriču da je ukupni output svakoga sektora jednak zbroju svih međusektorskih razmjena i ukupne potražnje toga sektora.

2.3.1.2. MATRICA NORMATIVA

Matrica normativa ili matrica tehničkih koeficijenata predstavlja dio proizvoda sektora i koji koristi sektor j za proizvodnju jedne jedinice svoga proizvoda. Ta se matrica označava sa A. Ona je reda n. Njezini se elementi računaju pomoću formule:

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j} \text{ , za svaki } i = 1, ..., n \text{ i svaki } j = 1, ..., n.$$

iz koje slijedi:

$$Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_i \text{, za svaki } i = 1, ..., n \text{ i svaki } j = 1, ..., n.$$

Iz definicije matrice normativa slijedi važno svojstvo njezinih elemenata:

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{, za svaki } i = 1, ..., n \text{ i svaki } j = 1, ..., n.$$

Svi ukupni outputi obično se zapisuju u obliku jednostupčane matrice Q. Ta je matrica tipa (n, 1). Analogna tvrdnja vrijedi i za ukupne finalne potražnje koje se zapisuju u obliku

jednostupčane matrice q. Da bi se elementi tih matrica mogli međusobno razlikovati, elementi matrice Q se označavaju velikim tiskanim slovima (Q_{11}, Q_{21}, ..., Q_{n1}), a elementi matrice q malim tiskanim slovima (q_{11}, q_{21}, ..., q_{n1}) (vidjeti Sliku 2.2.).

Slika 2.2. *Matrice ukupnih outputa, normativa i finalne potražnje* [4]

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix},$$

Elementi tih matrica se obično zapisuju kao razlomci ili decimalni brojevi.

2.3.1.3. JEDINIČNA MATRICA

Jedinična matrica je kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a na svim ostalim mjestima nule. Označava se sa oznakom E. Uz njega može stajati i indeks koji označava red matrice.

Slika 2.3. *Primjeri jediničnih matrica* [5]

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots, \; E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3.1.4. MATRICA TEHNOLOGIJE

Matrica tehnologije je matrica koja se dobiva iz matrice normativa pomoću formule:

$$T = E - A,$$

Njezino osnovno svojstvo je da na dijagonali ima strogo pozitivne realne brojeve ili nulu, dok na svim ostalim mjestima ima strogo negativne brojeve ili nulu. Vrijednosti njezinih elemenata ovise o vrijednostima matrice normativa A.

U skladu s ranije navedenim, ravnotežni sustav zapisan u matričnom obliku glasi:

$$q = T \cdot Q,$$

iz koje invertiranjem slijedi:

$$Q = T^{-1} \cdot q$$

2.4. INPUT-OUTPUT TABLICA U HRVATSKOJ

Republika Hrvatska također primjenjuje međusektorske analize. Najviše takvih tablica može se naći u Državnom zavodu za statistiku, točnije u njegovu Sektoru ekonomskih statistika.

Odjel za Tablice ponude i uporabe te input/output tablice obavlja sljedeće stručne poslove: izrada metode robnih tokova temeljenih na sustavu strukturnih poslovnih statistika (prema čistim djelatnostima i institucionalnim sektorima) prema određenim razinama Klasifikacije proizvoda po djelatnostima (KPD) i Nacionalnoj klasifikaciji djelatnosti (NKD), te podacima svih odjela unutar Sektora i unutar Zavoda. Odjel izrađuje metodološku podlogu za izračun Tablica ponude i uporabe. U tom se izračunu koristi metoda robnih tokova koji predstavljaju okvir za izradu nacionalnih računa (npr. godišnjega BDP-a, tromjesečnoga BDP-a, regionalnog BDP-a) Na temelju gotovih Tablica ponude i uporabe izrađuju se simetrične Input-Output tablice. Odjel obavlja izračun Prosječne ponderirane stope za određivanje vlastitih sredstava iz PDV-a u okviru Izvješća o PDV-u Republike Hrvatske. [6]

Državni zavod za statistiku izrađuje input-output tablice prema metodologiji Europskog sustava nacionalnih i regionalnih računa koje je Republika Hrvatska prihvatila ulaskom u Europsku uniju. Metodologija se sastoji od tri tipa tablica: „tablice ponude i uporabe, tablica koja povezuje tablice ponude i uporabe sa sektorskim računima i simetrične input-output tablice.“ [7]

Najveći problem za Republiku Hrvatsku je ukidanje ključnih statističkih istraživanja namijenjenih za izradu input-output tablica. Dodatan problem je što se mnoga poduzeća bave raznolikim djelatnostima, a podaci mjerodavnih institucija (npr. FINA-e) ne pružaju dovoljan uvid u pojedine stavke, čime se ostvaruje nemogućnost provođenja načela „čiste djelatnosti“. To načelo u istu grupu svrstava sve organizacije koje proizvode isti proizvod. Izrada input-output tablica zahtjeva upravo grupiranje po načelu „čiste djelatnosti“ za izradu nacionalnih računa.

3. OSNOVNO O RAČUNALNOM PROGRAMU EIGENMATH

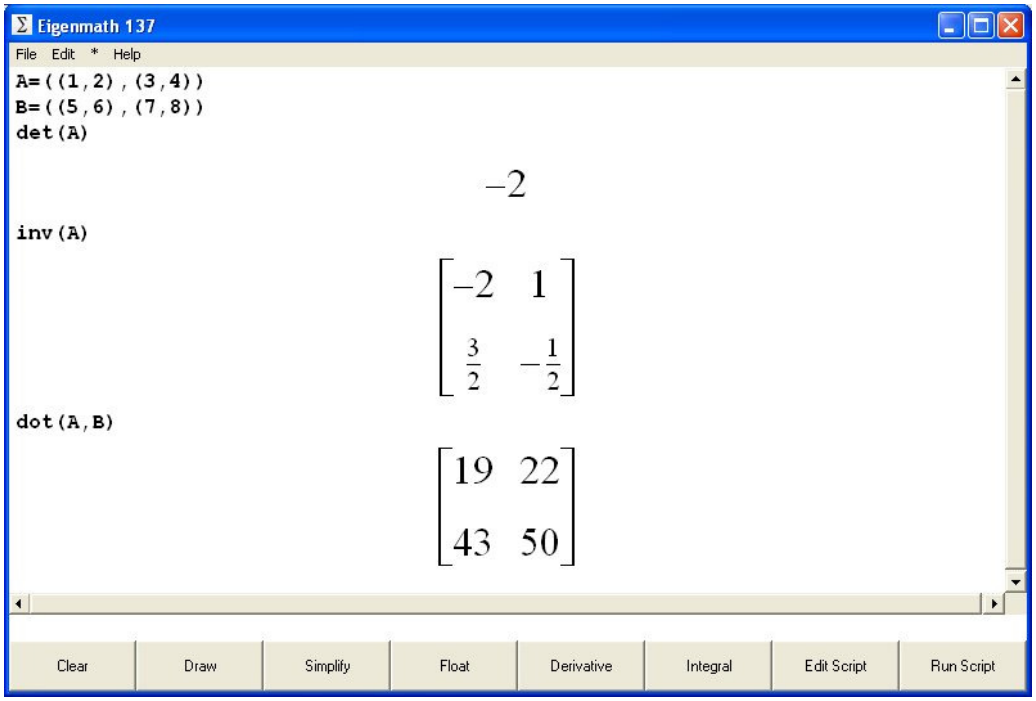
Eigenmath 137 je besplatan *open-source* matematički program s različitim područjima moguće primjene. Zasniva se na radu sa simboličkim objektima. Sadrži niz matematičkih funkcija, odnosno alata koji olakšavaju rješavanje različitih matematičkih problema.

Program je napisan u programskom jeziku C, a ne zahtijeva instalaciju. Jednostavan je za korištenje, što znači da ga lako mogu koristiti i osobe bez iskustva u softverskim programima.

Može se primjenjivati na računalima, tabletima i mobitelima. Moguće ga je pohraniti na vanjske uređaje pa se lako dijeli u mreži računala. Eigenmath ne zahtijeva dodatne programe za svoje pokretanje.

Radi jednostavnosti korištenja, programsko sučelje ima standardni komandni prozor. Na vrhu toga prozora nalazi se alatna traka. U samom se komandnom prozoru nalaze svi zapisi naredbi i rezultata tih naredbi. Na dnu se nalazi redak u kojega se upisuju naredbe. Ispod toga retka smještena je traka s nekim osnovnim programskim funkcijama.

Slika 3.1. *Prikaz okvira programa Eigenmath* [8]



Treba spomenuti da se dulji nizovi naredbi mogu pohraniti kao tzv. programske skripte, te izvršiti jednim pokretanjem (klikom na opciju *Run Script*). Takva pohrana ujedno omogućava i ispravljanje pogrešaka, izmjenu polaznih podataka itd.

3.1. FUNKCIJE EIGENMATH 137

Funkcije programa Eigenmath su raspoređene u devet grupa:

- funkcije za rad s kompleksnim brojevima: *arg, conj, imag, mag, polar, real, rect,*
- funkcije za rad s polinomima: *coeff, deg, expand, factor, leading, nroots, quotient, roots,*
- funkcije za primjenu u linearnoj algebri: *adj, cofactor, contract, det, dot, inv, outer, transpose, unit, zero,*
- funkcije za primjenu u diferencijalnom i integralnom računu: *defint, derivative, gradient, integral, taylor,*
- eksponencijalne funkcije: *circexp, exp, expcos, expsin, log*,
- kružne funkcije: *arccos, arcsin, arctan, cos, sin, tan,*
- funkcije hiperbole: *arccosh, arcsinh, arctanh, cosh, sinh, tanh,*
- posebne funkcije: *besselj, hermite, laguerre, legendre* i
- druge funkcije: *abs, choose, denominator, erf, erfc, eval, factor, factorial, for, numerator, product, sqrt, sum.*

Svaka od njih unošenjem u program olakšava izračunavanje matematičkih zadataka. U nastavku se navode definicija i sintaksa samo onih funkcija koje će se efektivno koristiti u radu [9]:

`det(m)`

Vraća determinantu matrice *m*.

`dot(a,b)`

Vraća umnožak matrica *a* i *b*.

`inv(m)`

Vraća inverz matrice *m*.

`transpose(a)`

Vraća transponiranu matricu.

`unit(n)`

Vraća jediničnu matricu reda *n*.

`zero(m,n)`

Vraća nulmatricu tipa (*m*, *n*).

Treba napomenuti da će u rješavanju nekih primjera biti korištene i sljedeće funkcije MS Excela:

`MINVERSE` – vraća inverz matrice (ekvivalent Eigenmath-ove funkcije `inv`)

`MMULT` – vraća umnožak dviju matrica (ekvivalent Eigenmath-ove funkcije `dot`)

4. PRIMJENA MATRIČNOG RAČUNA

U ovom poglavlju slijedi nekoliko praktičnih primjera izrade matričnog modela na dva i više industrijskih sektora. U rješavanju zadataka rabit će se računalni programi Eigenmath i Microsoft Excel.

4.1. Primjer 1

Ekonomiju čine dva industrijska sektora: drvoprerađivačka industrija i industrija za proizvodnju električne energije.

Za proizvodnju drvnih proizvoda u vrijednosti od jedne kune potroše se drvni proizvodi u iznosu od 0.20 kn i električna energija u iznosu od 0.40 kn.

Za proizvodnju električne energije u vrijednosti od jedne kune potroše se drvni proizvodi u iznosu od 0.30 kn i električna energija u iznosu od 0.10 kn.

Finalna potražnja za drvnim proizvodima iznosi 24 milijuna kuna, a finalna potražnja za električnom energijom iznosi 16 milijuna kuna.

Koliko treba proizvesti drvnih proizvoda i električne energije da bi se zadovoljila potražnja?

<u>Rješenje pomoću računalnoga programa Eigenmath 137:</u>

S obzirom da zadatak ima dvije industrije tehnološka matrica bit će matrica reda 2. Matrica finalne potražnje i zahtjeva za proizvodnjom bit će stupčana matrica tipa 2 x 1.

Tablica 4.1. *Osnovni podaci za Primjer 1.*

Sektori	**Drvoprerađivačka industrija**	**Elektroindustrija**	**Finalna potražnja**
Drvoprerađivačka industrija	0.2	0.3	24
Elektroindustrija	0.4	0.1	16

Iz Tablice 4.1. može se sastaviti sljedeća matrica normativa:

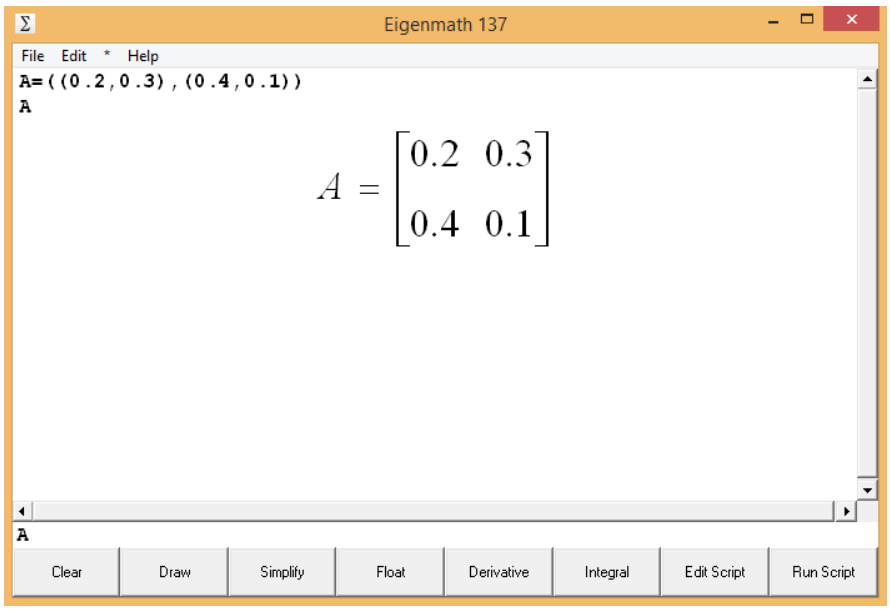
$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Pokrene se računalni program Eigenmath. U novi redak toga programa upisuje se:

```
A=((0.2,0.3),(0.4,0.1)).
```

Potom se pritisne tipka *Enter*. Želi li se dobiti efektivan ispis matrice A, u sljedećem retku treba upisati `A` i pritisnuti tipku *Enter*.

Slika 4.1. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis matrice normativa*



<u>Napomena</u>: Efektivan ispis svih matrica dobiva se tako da se u novom retku napiše ime matrice, a potom pritisne tipka *Enter*. Ta se činjenica neće posebno isticati u nastavku rada.

Za izračunavanje ukupnih outputa potrebna je i matrica finalne potražnje:

$$q = \begin{bmatrix} 24 \\ 16 \end{bmatrix}$$

U novi redak upisuje se:

```
q=((24),(16))
```

Potom se pritisne tipka *Enter*.

Potrebno je izračunati razinu ukupne proizvodnje svakog sektora. Neka je Q matrica ukupnih outputa. Matrica Q je matrica tipa 2 x 1. Ona se određuje iz formule:

$$Q = T^{-1} \cdot q,$$

gdje je $T = E - A$ pripadna matrica tehnologije.

Jedinična matrica reda 2 u Eigenmathu se generira koristeći funkciju `unit`. U novi redak programa upisuje se:

```
E=unit(2)
```

Pritisne se tipka Enter.

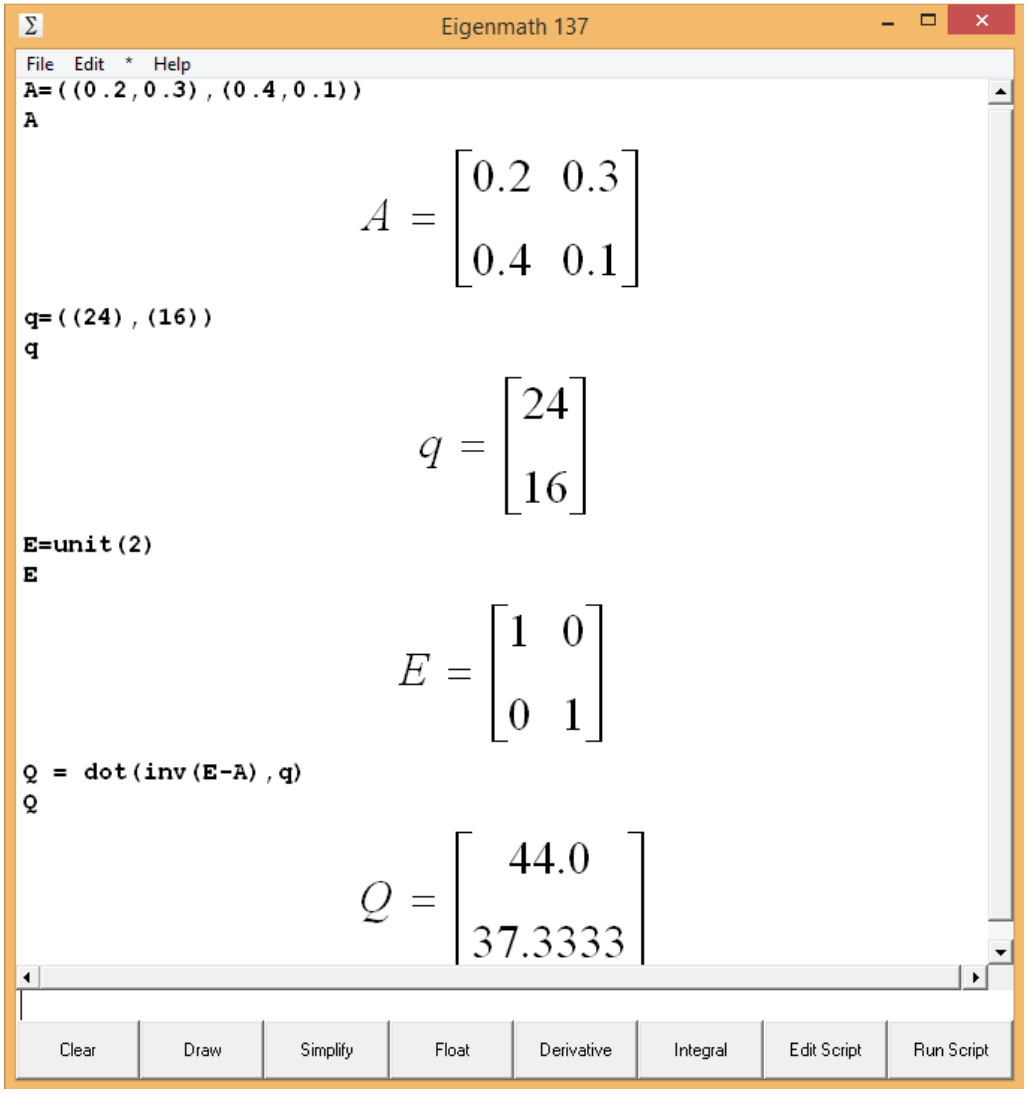
Inverz matrice računa se pomoću funkcije `inv`, a umnožak matrica pomoću funkcije `dot`. Stoga se u novi redak utipka:

```
Q = dot(inv(E-A),q).
```

Dobiva se:

$$Q = \begin{bmatrix} 44 \\ 37.3333 \end{bmatrix}$$

Slika 4.2. *Prozor programa Eigenmath nakon svih naznačenih unosa*



Elementi matrice Q interpretiraju se ovako:

- Vrijednost proizvodnje za sektor drvoprerađivačke industrije iznosi 44 milijuna kuna;
- Vrijednost proizvodnje za sektor elektroindustrije iznosi približno 37.3 milijuna kuna.

Tablica 4.2. *Input-output tablica – rješenje Primjera 1.*

Q_i	Q_{ij}		q_i
44	0.2	0.3	24
37.3	0.4	0.1	16

Rješenje pomoću računalnog programa MS Excel:

U blok ćelija B3:C4 upisuju se elementi matrice normativa.

Slika 4.3. *Elementi matrice normativa*

	A	B	C
1	Matrica normativa		
2	SEKTORI	Drvoprerađivačka industrija	Elektroindustrija
3	Drvoprerađivačka industrija	0,2	0,3
4	Elektroindustrija	0,4	0,1

Potom se u bloku ćelija B6:C7 računaju elementi matrice tehnologije. U ćeliju B6 upiše se:

`=1-B3.`

Ta se formula prekopira u ćeliju C7. Nadalje, u ćeliju C6 upiše se:

`=-C3.`

Ta se formula prekopira u ćeliju B7.

U blok ćelija B9:B10 upisuju se elementi matrice finalne potražnje. Tako se dobije sljedeća slika:

Slika 4.4. *Elementi matrice tehnologije i finalne potražnje*

	A	B	C
6	T = E - A	0,8	-0,3
7		-0,4	0,9
8			
9	Finalna potražnja	24	
10		16	

Elementi nepoznate matrice ukupne proizvodnje izračunavaju se u bloku ćelija B12:B13. Najprije se označi taj blok ćelija, pa se u ćeliju B12 upiše:

`=MMULT(MINVERSE(B6:C7);B9:B10).`

Potom se istovremeno pritisnu tipke *Ctrl*, *Shift* i *Enter*. Tako se dobije:

Slika 4.5. *Ukupni output*

	A	B
12	**Ukuput outputi**	44
13		37,33333333

4.2. Primjer 2

Zadana je input-output tablica trosektorske ekonomije Kraljevine Ubananije[4]:

Tablica 4.3. *Osnovni podaci za Primjer 2.*

Q_i	Q_{ij}			q_i
x_1	10	20	90	80
400	40	x_2	150	160
300	50	100	90	x_3

a) Dopuniti tablicu vrijednostima koje nedostaju i objasniti značenje svake od traženih vrijednosti.

b) Novim gospodarskim planom predviđeno je:

- smanjenje ukupnih outputa prvog sektora za 25%;
- smanjenje ukupnih outputa drugog sektora za 50%
- povećanje ukupne finalne potražnje trećeg sektora za 25%.

Sastaviti novu input-output tablicu. Napisati analitički izraz (formulu) prema kojoj je izračunan svaki pojedini element.

<u>Rješenje pomoću računalnoga programa Eigenmath</u>:

a) Iz jednadžbe ravnoteže određuju se nepoznati elementi x_1, x_2 i x_3:

$x_1 = 10 + 20 + 90 + 80 = 200$ $\qquad Q_1 = 200$

$x_2 = 400 - (40 + 150 + 160) = 50$ $\qquad Q_{22} = 40$

$x_3 = 300 - (50 + 90 + 100) = 60$ $\qquad q_3 = 60$

[4] Toponim je izmišljen.

Tablica 4.4. *Polazna input-output tablica.*

Q_i	Q_{ij}			q_i
200	10	20	90	80
400	40	50	150	160
300	50	100	90	60

Q_1 = 200 je ukupna količina proizvoda proizvedenih u sektoru 1, odnosno ukupni output 1. sektora.

Q_{22} = 40 je količina proizvoda iz sektora 2 ostaje u tom sektoru radi normalnoga odvijanja procesa proizvodnje.

q_3 = 60 je ukupna količina proizvoda proizvedenih u sektoru 3 nužna za gospodarske potrebe tog sektora, tj. finalna potražnja sektora 3.

b) Potrebno je izračunati elemente matrice normativa *A* prema formuli:

$$a_{ij} = \frac{Q_{ij}}{Q_j}, \text{ za svaki } i = 1, 2, 3 \text{ i svaki } j = 1, 2, 3..$$

Dobiva se:

$$a_{11} = \frac{Q_{11}}{Q_1} = \frac{10}{200} = 0.05$$

$$a_{12} = \frac{Q_{12}}{Q_2} = \frac{20}{400} = 0.05$$

$$a_{13} = \frac{Q_{13}}{Q_3} = \frac{90}{300} = 0.3$$

$$a_{21} = \frac{Q_{21}}{Q_1} = \frac{40}{200} = 0.2$$

$$a_{22} = \frac{Q_{22}}{Q_2} = \frac{50}{400} = 0.125$$

$$a_{23} = \frac{Q_{23}}{Q_3} = \frac{150}{300} = 0.5$$

$$a_{31} = \frac{Q_{31}}{Q_1} = \frac{50}{200} = 0.25$$

$$a_{32} = \frac{Q_{32}}{Q_2} = \frac{100}{400} = 0.25$$

$$a_{33} = \frac{Q_{33}}{Q_3} = \frac{90}{300} = 0.3$$

Stoga matrica normativa A glasi:

$$A = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.05 & 0.3 \\ 0.2 & 0.125 & 0.5 \\ 0.25 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Tu matricu treba upisati u novi redak računalnoga programa Eigenmath. Utipka se:

```
A=((0.05,0.05,0.3),(0.2,0.125,0.5),(0.25,0.25,0.3))
```

Pritisne se tipka *Enter*. Provjera valjanosti upisanih podataka provjerava se kao što je opisano u rješenju Primjera 1.

Smanjenjem ukupnog outputa u 1. sektoru za 25% dobije se novi ukupni output toga sektora:

$$Q_1 = 200 \cdot 0.75 = 150$$

Smanjenjem ukupnog outputa u 2. sektoru za 50% dobije se novi ukupni output toga sektora:

$$Q_2 = 400 \cdot 0.5 = 200$$

Povećanjem ukupne finalne potražnje u 3. sektoru za 25% dobije se nova finalna potražnja tog sektora:

$$q_3 = 60 \cdot 1.25 = 75$$

Potrebno je izračunati matricu tehnologije T prema formuli: $T = E - A$. U novom retku računalnoga programa Eigenmath najprije se generira jedinična matrica reda 3:

```
E = unit(3)
```

Pritisne se tipka *Enter*. Potom se u novi redak upiše:

```
T = E - A
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$T = \begin{bmatrix} 0.95 & -0.1 & -0.45 \\ -0.1 & 0.9 & -0.4 \\ -0.17 & -0.3 & 0.66 \end{bmatrix}$$

Pretpostavi se da je novi vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ x \end{bmatrix}$$

U novi redak se upisuje:

```
Q'=((150),(200),(x))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

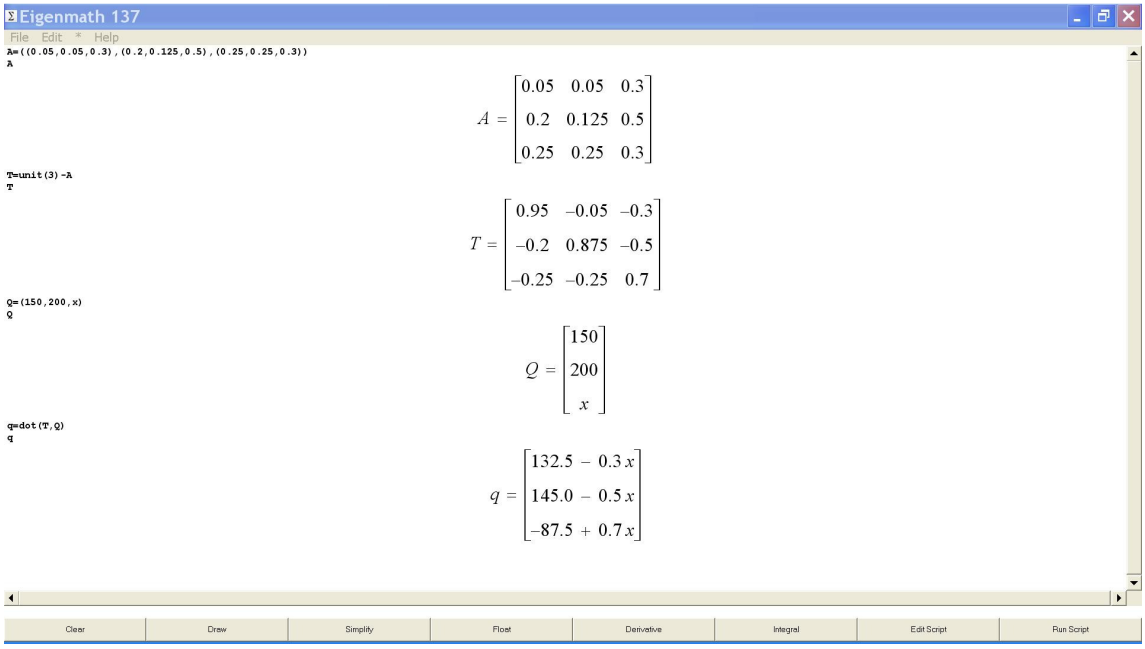
Vektor novih ukupnih finalnih potražnji računa se prema formuli: $q = T \cdot Q'$. U novi redak se utipka:

```
q = dot(T, Q')
```

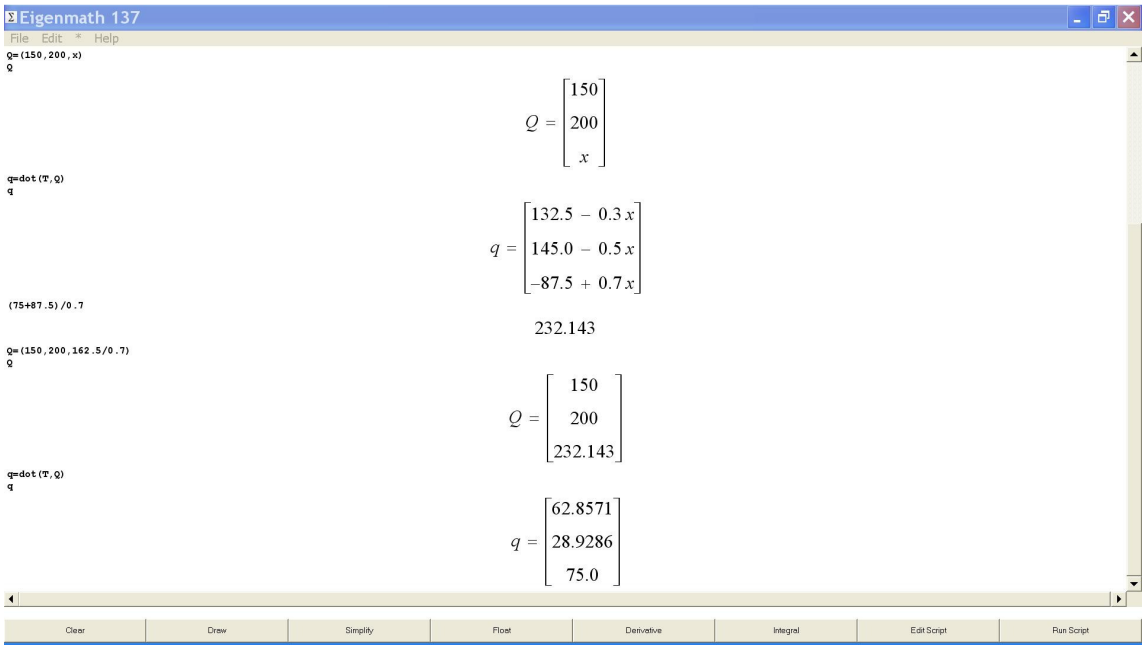
Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$q = \begin{bmatrix} 132.5 - 0.3 \cdot x \\ 145 - 0.5 \cdot x \\ -87.5 + 0.7 \cdot x \end{bmatrix}$$

Slika 4.6. *Prikaz postupka rješavanja 2. zadatka – 1. dio*



Slika 4.7. *Prikaz postupka rješavanja 2. zadatka – 2. dio*



Prema uvjetima primjera, treća komponenta ovog vektora treba biti jednaka 75. Stoga se nepoznanica x određuje iz jednadžbe:

$$-87.5 + 0.7 \cdot x = 75$$

Dobiva se:

$$0.7 \cdot x = 75 + 87.5$$

$$0.7 \cdot x = 162.5 \ / : 0.7$$

$$x = 232.143$$

Odatle slijedi da je novi vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 232.143 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti x u vektor q slijedi:

$$q = \begin{bmatrix} 132.5 - 0.3 \cdot x \\ 145 - \ 0.5 \cdot x \\ -87.5 + 0.7 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 62.857 \\ 28.923 \\ 75 \end{bmatrix}$$

Na kraju je potrebno izračunati nove vrijednosti veličina Q_{ij} prema formuli $Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j$:

$$Q_{11} = a_{11} \cdot Q_1 = 0.05 \cdot 150 = 7.5$$

$$Q_{12} = a_{12} \cdot Q_2 = 0.05 \cdot 200 = 10$$

$$Q_{13} = a_{13} \cdot Q_3 = 0.3 \cdot 232.143 = 69.643$$

$$Q_{21} = a_{21} \cdot Q_1 = 0.2 \cdot 150 = 30$$

$$Q_{22} = a_{22} \cdot Q_2 = 0.125 \cdot 200 = 25$$

$$Q_{23} = a_{23} \cdot Q_3 = 0.5 \cdot 232.143 = 116.072$$

$$Q_{31} = a_{31} \cdot Q_1 = 0.25 \cdot 150 = 37.5$$

$$Q_{32} = a_{32} \cdot Q_2 = 0.25 \cdot 200 = 50$$

$$Q_{33} = a_{33} \cdot Q_3 = 0.3 \cdot 232.143 = 69.643$$

Tako se dobije sljedeća input-output tablica:

Tablica 4.5. *Nova input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}			q_i
150	7.5	10	69.643	62.857
200	30	25	116.072	28.923
232.143	37.5	50	69.643	75

4.3. Primjer 3

Zadana je sljedeća matrica tehnologije:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Sastaviti input-output tablicu ako je poznato:

a) ukupni output prvog sektora je 320, ukupni output trećega sektora 500, a ukupna finalna potražnja drugoga sektora 24.

b) ukupna finalna potražnja prvoga sektora jednaka je 20, ukupna finalna potražnja trećega sektora jednaka je 165, a ukupni output drugoga sektora jednak je 250.

<u>Rješenje pomoću računalnoga programa Eigenmath</u>:

a) Najprije je potrebno unijeti one podatke koji su dostupni kako bi se dobile ostale vrijednosti. Prvo se unosi matrica tehnologije:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Ovu matricu tehnologije treba upisati u novi redak računalnoga programa Eigenmath. Utipka se:

```
T=((0.7,-0.1,-0.2),(-0.3,0.8,-0.4),(-0.2,-0.3,0.9))
```

Pritisne se tipka *Enter*. Provjera valjanosti upisanih podataka provjerava se kao što je opisano u rješenju Primjera 1.

Unosi se vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 320 \\ x \\ 500 \end{bmatrix}$$

U novi redak računalnoga programa *Eigenmath* upisuje se:

```
Q'=((320),(x),(500))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

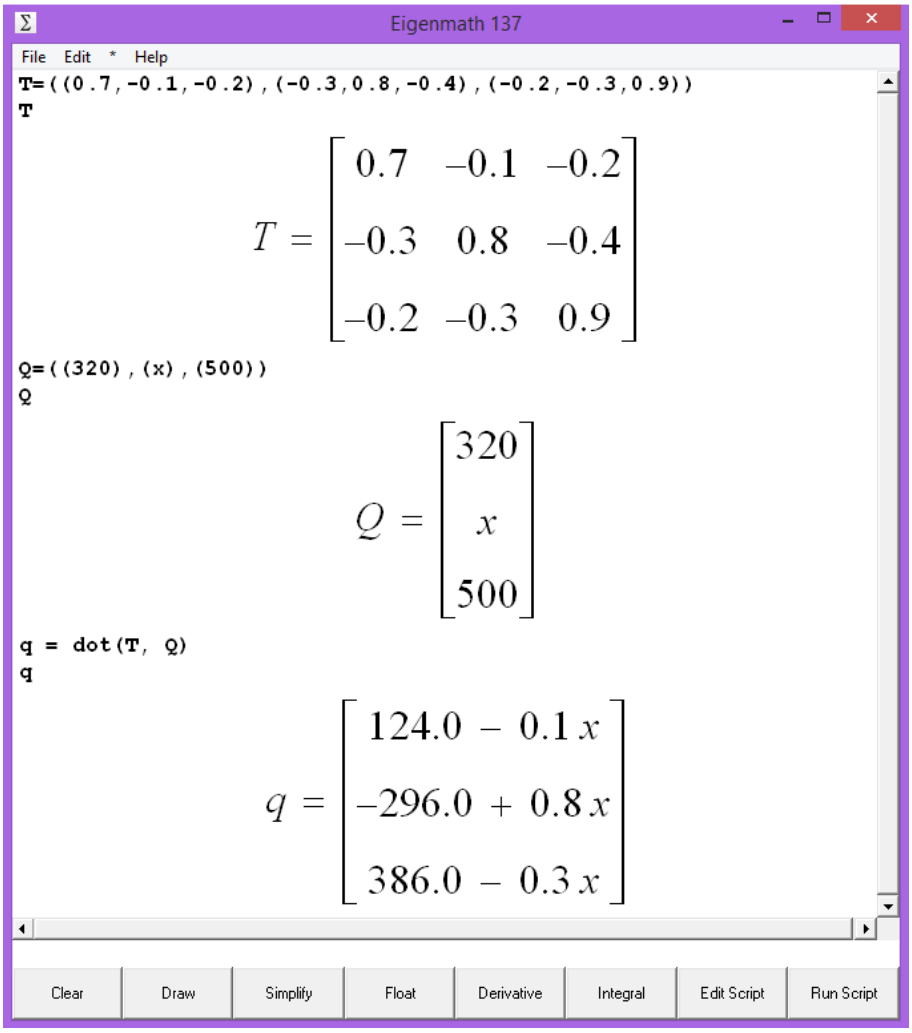
Vektor novih ukupnih finalnih potražnji računa se prema formuli: $q = T \cdot Q'$. Množenje matrica u ***Eignemath-u*** izvršava se pomoću ranije spomenute funkcije `dot`. U novi redak računalnoga programa *Eigenmath* utipka se:

```
q = dot(T, Q')
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$q = \begin{bmatrix} 124 - 0.1 \cdot x \\ -296 + 0.8 \cdot x \\ 386 - 0.3 \cdot x \end{bmatrix}$$

Slika 4.8. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis tehnološke matrice, ukupnog outputa i novog vektora finalne potražnje*



Prema uvjetima primjera, druga komponenta ovog vektora treba biti jednaka 24. Stoga se nepoznanica x određuje iz jednadžbe:

$$-296 + 0.8 \cdot x = 24$$

Dobiva se:

$$0.8 \cdot x = 24 + 296$$

$$0.8 \cdot x = 320 \;/ : 0.8$$

$$x = 400$$

Odatle slijedi da je novi vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 320 \\ 400 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti x u vektor q slijedi:

$$q = \begin{bmatrix} 124 - 0.1 \cdot x \\ -296 + \ 0.8 \cdot x \\ 386 - 0.3 \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 24 \\ 266 \end{bmatrix}$$

Potrebno je izračunati matricu normativa A prema formuli: $A = E - T$. U novom retku računalnoga programa Eigenmath najprije se generira jedinična matrica reda 3:

```
E = unit(3)
```

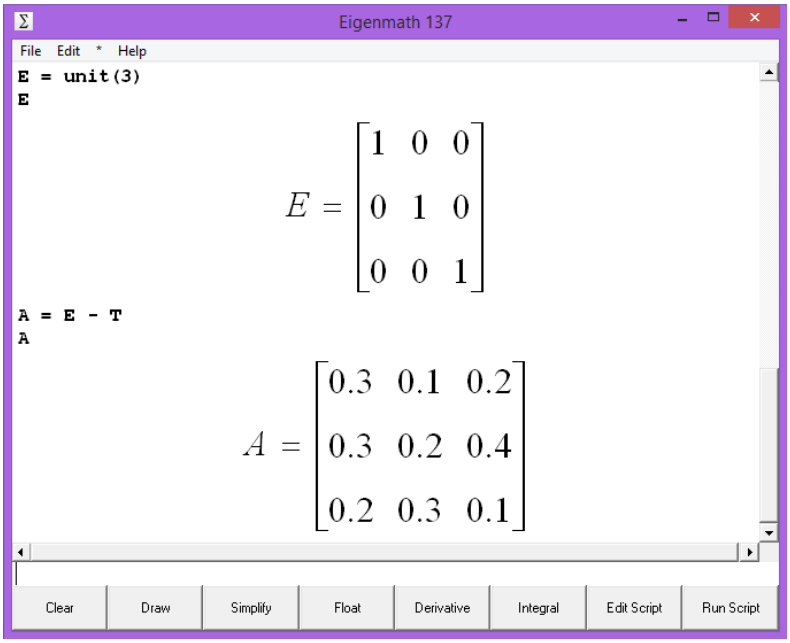
Pritisne se tipka *Enter*. Pritisne se tipka *Enter*. Potom se u novi redak upiše:

```
A = E - T
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Slika 4.9. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis jedinične matrice reda tri i matrice normativa*



Na kraju je potrebno izračunati nove vrijednosti veličina Q_{ij} prema formuli $Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j$:

$$Q_{11} = a_{11} \cdot Q_1 = 0.3 \cdot 320 = 96$$
$$Q_{12} = a_{12} \cdot Q_2 = 0.1 \cdot 400 = 40$$
$$Q_{13} = a_{13} \cdot Q_3 = 0.2 \cdot 500 = 100$$

$$Q_{21} = a_{21} \cdot Q_1 = 0.3 \cdot 320 = 96$$
$$Q_{22} = a_{22} \cdot Q_2 = 0.2 \cdot 400 = 80$$
$$Q_{23} = a_{23} \cdot Q_3 = 0.4 \cdot 500 = 200$$

$$Q_{31} = a_{31} \cdot Q_1 = 0.2 \cdot 320 = 64$$
$$Q_{32} = a_{32} \cdot Q_2 = 0.3 \cdot 400 = 120$$
$$Q_{33} = a_{33} \cdot Q_3 = 0.1 \cdot 500 = 50$$

Tako se dobije sljedeća input-output tablica.

Tablica 4.6. *Nova input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}			q_i
320	96	40	100	84
400	96	80	200	24
500	64	120	50	266

b) Najprije je potrebno unijeti one podatke koji su dostupni kako bi se dobile ostale vrijednosti. Prvo se unosi matrica tehnologije:

$$T = \begin{bmatrix} 0.7 & -0.1 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.2 & -0.3 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Ovu matricu tehnologije treba upisati u novi redak računalnoga programa Eigenmath. Utipka se:

```
T=((7/10,-1/10,-2/10),(-3/10,8/10,-4/10),(-2/10,-3/10,9/10))
```

Pritisne se tipka *Enter*. Provjera valjanosti upisanih podataka provjerava se kao što je opisano u rješenju Primjera 1.

Pretpostavi se da je:

$$q' = \begin{bmatrix} 20 \\ x \\ 165 \end{bmatrix}$$

U novi redak računalnoga programa *Eigenmath* upisuje se:

```
q'=((20),(x),(165))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

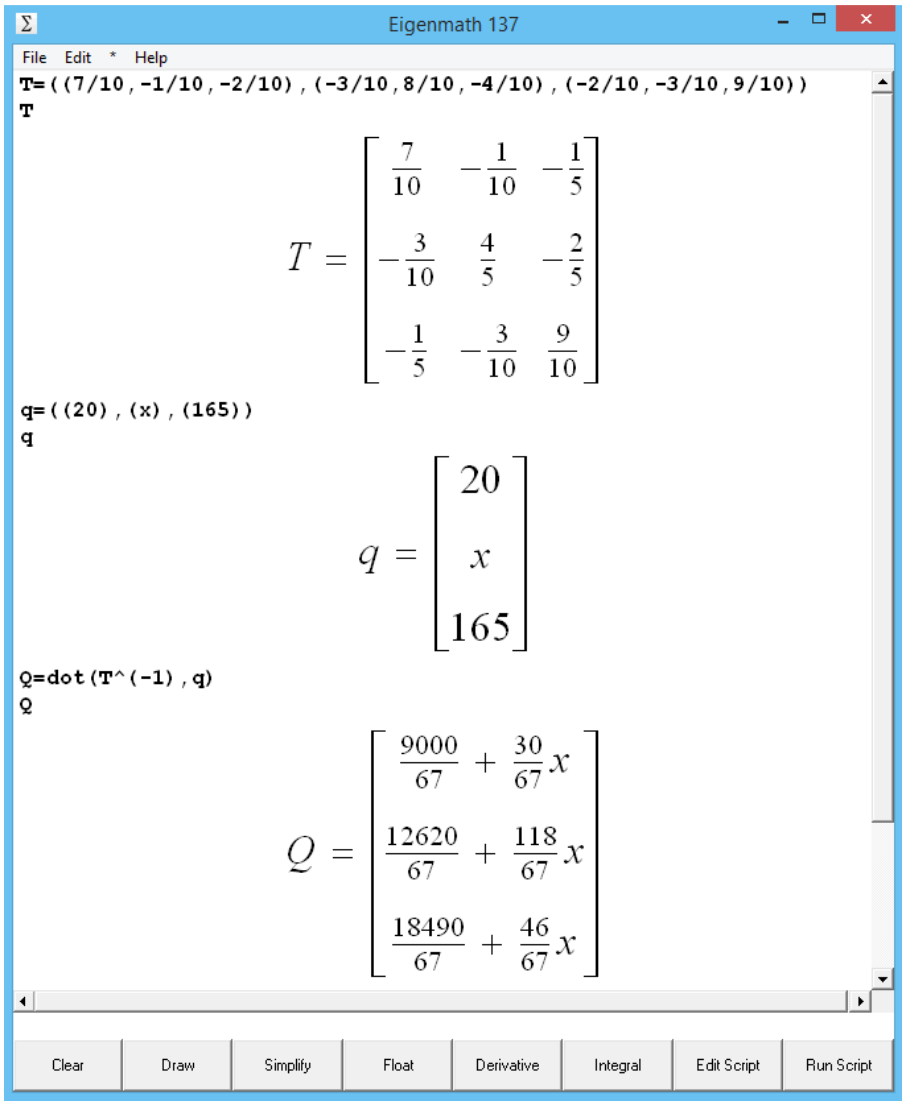
Matrica novih ukupnih outputa *Q*' racuna se prema formuli:

```
Q'=dot(T^(-1),q)
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{9000}{67} + \frac{30}{67} \cdot x \\ \frac{12620}{67} + \frac{118}{67} \cdot x \\ \frac{18490}{67} + \frac{46}{67} \cdot x \end{bmatrix}$$

Slika 4.10. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis tehnološke matrice, finalne potražnje i ukupnog outputa*



Prema uvjetima primjera, novi ukupni output drugog sektora treba biti jednak 250. Stoga se nepoznanica x određuje iz jednadžbe:

$$\frac{12620}{67} + \frac{118}{67} \cdot x = 250$$

Dobiva se:

$$\frac{118}{67} \cdot x = 250 - \frac{12620}{67}$$

$$\frac{118}{67} \cdot x = \frac{16750}{67} - \frac{12620}{67}$$

$$\frac{118}{67} \cdot x = \frac{4130}{67} \quad / : \frac{118}{67}$$

$$x = 35$$

Odatle slijedi da je novi vektor finalne potražnje:

$$q' = \begin{bmatrix} 20 \\ 35 \\ 165 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti x u vektor q slijedi:

$$Q' = \begin{bmatrix} \frac{9000}{67} + \frac{30}{67} \cdot x \\ \frac{12620}{67} + \frac{118}{67} \cdot x \\ \frac{18490}{67} + \frac{46}{67} \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 250 \\ 300 \end{bmatrix}$$

U prethodnom zadatku izračunata je matrica normativa A:

$$A = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

Na kraju je potrebno izračunati nove vrijednosti veličina Q_{ij} prema formuli $Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j$:

$$Q_{11} = a_{11} \cdot Q_1 = 0.3 \cdot 150 = 45$$
$$Q_{12} = a_{12} \cdot Q_2 = 0.1 \cdot 250 = 25$$
$$Q_{13} = a_{13} \cdot Q_3 = 0.2 \cdot 300 = 60$$

$$Q_{21} = a_{21} \cdot Q_1 = 0.3 \cdot 150 = 45$$
$$Q_{22} = a_{22} \cdot Q_2 = 0.2 \cdot 250 = 50$$
$$Q_{23} = a_{23} \cdot Q_3 = 0.4 \cdot 300 = 120$$

$$Q_{31} = a_{31} \cdot Q_1 = 0.2 \cdot 150 = 30$$
$$Q_{32} = a_{32} \cdot Q_2 = 0.3 \cdot 250 = 75$$
$$Q_{33} = a_{33} \cdot Q_3 = 0.1 \cdot 300 = 30$$

Tako se dobije sljedeća input-output tablica.

Tablica 4.7. *Nova input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}			q_i
150	45	25	60	20
250	45	50	150	35
300	30	75	30	165

4.4. Primjer 4

Zadana je sljedeća matrica normativa trosektorske ekonomije:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Sastaviti novu input-output tablicu ako je poznato da je ukupna proizvodnja prvog sektora 60, ukupna proizvodnja drugog sektora 100, a finalna potražnja trećeg sektora 90 n.j..

<u>Rješenje</u>:

Najprije je potrebno unijeti one podatke koji su dostupni kako bi se dobile ostale vrijednosti. Prvo se unosi matrica normativa:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{3}{20} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ovu matricu normativa treba upisati u novi redak računalnoga programa Eigenmath. Utipka se:

```
A=((1/5,3/20,1/8),(1/2,1/5,1/8),(1/4,1/2,1/5))
```

Pritisne se tipka *Enter*. Provjera valjanosti upisanih podataka provjerava se kao što je opisano u rješenju Primjera 1.

Potrebno je izračunati matricu tehnologije T prema formuli: $T = E - A$. U novom retku računalnoga programa Eigenmath najprije se generira jedinična matrica reda 3:

```
E = unit(3)
```

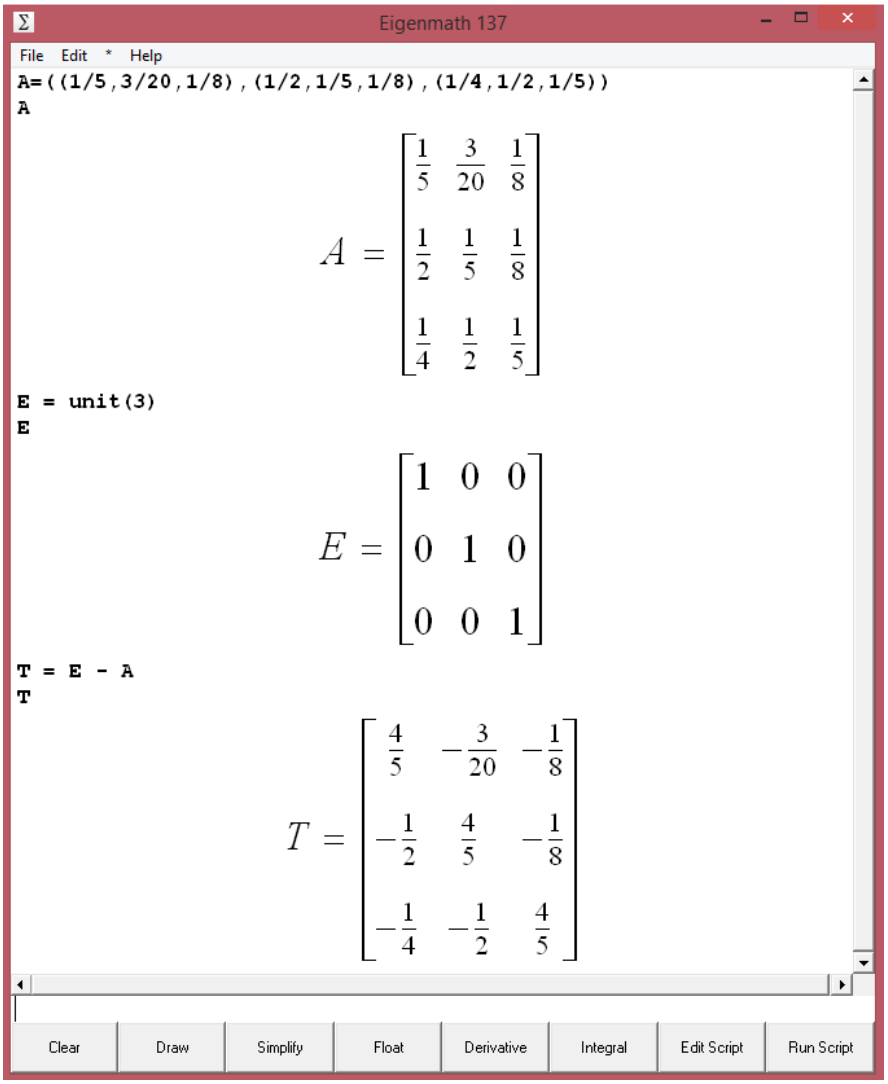
Pritisne se tipka *Enter*. Potom se u novi redak upiše:

```
T = E - A
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

Slika 4.11. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis matrice normativa, jedinične i tehnološke matrice*



Pretpostavi se da je novi vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \\ x \end{bmatrix}$$

U novi redak računalnoga programa *Eigenmath* upisuje se:

```
Q'=((60),(100),(x))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

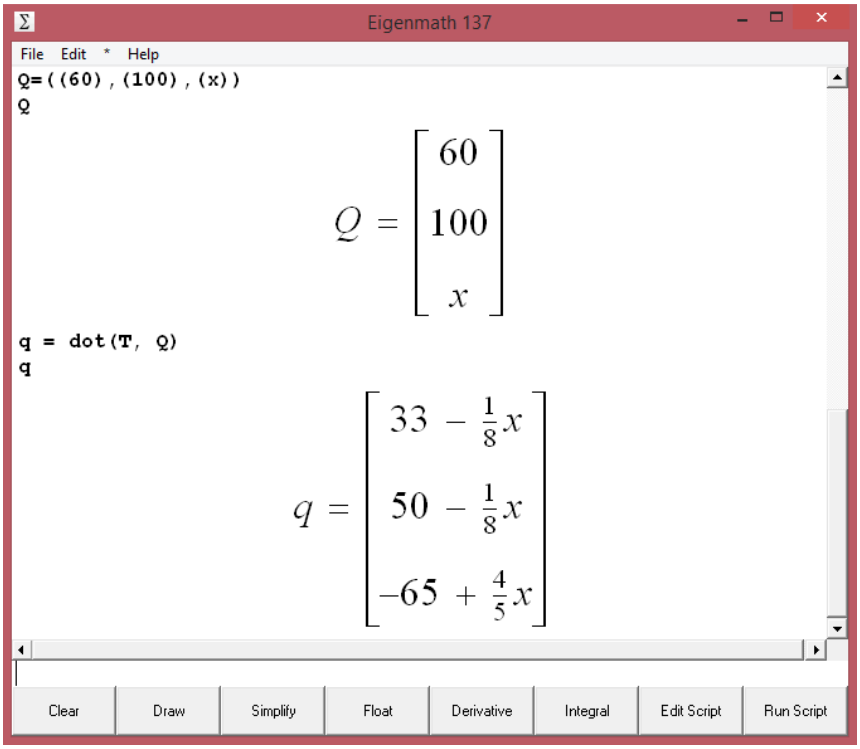
Vektor novih ukupnih finalnih potražnji računa se prema formuli: $q = T \cdot Q'$. U novi redak računalnoga programa *Eigenmath* utipka se:

```
q = dot(T, Q')
```

Pritisne se tipka *Enter*. Dobije se:

$$q = \begin{bmatrix} 33 - \frac{1}{8} \cdot x \\ 50 - \frac{1}{8} \cdot x \\ -65 + \frac{4}{5} \cdot x \end{bmatrix}$$

Slika 4.12. *Prikaz unosa funkcije u programu Eigenmath za ispis ukupnog outputa i elementi novog vektora finalne potražnje*



Prema uvjetima primjera, treća komponenta ovog vektora treba biti jednaka 90. Stoga se nepoznanica x određuje iz jednadžbe:

$$-65 + \frac{4}{5} \cdot x = 90$$

Dobiva se:

$$\frac{4}{5} \cdot x = 90 + 65$$

$$\frac{4}{5} \cdot x = 155 \ / : \frac{4}{5}$$

$$x = 193.75$$

Odatle slijedi da je novi vektor ukupnih outputa:

$$Q' = \begin{bmatrix} 60 \\ 100 \\ 193.75 \end{bmatrix}$$

Uvrštavanjem dobivene vrijednosti x u vektor q slijedi:

$$q = \begin{bmatrix} 33 - \frac{1}{4} \cdot x \\ 50 - \frac{1}{2} \cdot x \\ -65 + \frac{4}{5} \cdot x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8.78125 \\ 25.7813 \\ 266 \end{bmatrix}$$

Na kraju je potrebno izračunati nove vrijednosti veličina Q_{ij} prema formuli $Q_{ij} = a_{ij} \cdot Q_j$:

$$Q_{11} = a_{11} \cdot Q_1 = \frac{1}{5} \cdot 60 = 12$$

$$Q_{12} = a_{12} \cdot Q_2 = \frac{3}{20} \cdot 100 = 15$$

$$Q_{13} = a_{13} \cdot Q_3 = \frac{1}{8} \cdot 193.75 = 24.21875$$

$$Q_{21} = a_{21} \cdot Q_1 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$$

$$Q_{22} = a_{22} \cdot Q_2 = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20$$

$$Q_{23} = a_{23} \cdot Q_3 = \frac{1}{8} \cdot 193.75 = 24{,}21875$$

$$Q_{31} = a_{31} \cdot Q_1 = \frac{1}{4} \cdot 60 = 15$$

$$Q_{32} = a_{32} \cdot Q_2 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50$$

$$Q_{33} = a_{33} \cdot Q_3 = \frac{1}{5} \cdot 193.75 = 38.75$$

Tako se dobije sljedeća input-output tablica.

Tablica 4.8. *Nova input-output tablica*

Q_i	Q_{ij}			q_i
60	12	15	24.21875	8.78125
100	30	20	24.21875	25.7813
193.75	15	50	38.75	90

4.5. Primjer 5

Ekonomiju čine četiri industrijska sektora: poljoprivreda, trgovina, rudarstvo i građevinarstvo.

- Proizvodnja poljoprivrednih proizvoda u vrijednosti od 10 n.j.[5] zahtijeva proizvodnju poljoprivrednih proizvoda u vrijednosti od 2 n.j., trgovine u vrijednosti od 1 n.j., rudarstva u vrijednosti od 1 n.j. i građevinarstva u iznosu od 3 n.j.
- Industrijski sektor trgovine u vrijednosti od 100 n.j. zahtijeva proizvodnju poljoprivrednih proizvoda u vrijednosti od 20 n.j., trgovine u vrijednosti od 10 n.j. i građevinarstva u iznosu od 20 n.j..
- Proizvodnja rudarskih proizvoda u vrijednosti od 1000 n.j. zahtijeva proizvodnju trgovine u vrijednosti od 200 n.j., rudarstva u vrijednosti od 100 n.j. i građevinarstva u iznosu od 200 n.j..
- Proizvodnja građevinskih proizvoda u vrijednosti 1 n.j. zahtjeva proizvodnju poljoprivrednih proizvoda u vrijednosti od 0.1 n.j., trgovine u vrijednosti od 0.3 n.j., rudarstva u vrijednosti od 0.2 n.j. i građevinarstva u iznosu od 0.1 n.j..

Odrediti razinu proizvodnje svakog sektora potrebnu za zadovoljavanje ukupnih potreba poljoprivrede u iznosu od 300 milijuna n.j., ukupnih potreba sektora trgovine u iznosu od 200 milijuna n.j., ukupnih potreba rudarstva u iznosu od 100 milijuna n.j. i ukupnih potreba građevinarstva u iznosu od 200 milijuna n.j.

[5] Skraćenica za „novčanih jedinica“.

<u>Rješenje pomoću računalnoga programa Eigenmath</u>:

S obzirom da zadatak ima četiri industrije tehnološka matrica biti će matrica reda 4, dok će matrica krajnjih zahtjeva biti stupčana matrica tipa (4,1).

Tablica 4.9. *Osnovni podaci za Primjer 4.*

Sektori	Poljoprivreda	Trgovina	Rudarstvo	Građevina	Finalna potražnja
Poljoprivreda	0.2	0.2	0	0.1	300
Trgovina	0.1	0.1	0.2	0.3	200
Rudarstvo	0.1	0	0.1	0.2	100
Građevinarstvo	0.3	0.2	0.2	0.1	200

Elementi gornje tablice dobiveni su dijeljenjem zahtjeva proizvodnje sa vrijednostima proizvodnje. :

$$a_{11} = \frac{2}{10} = 0.2 \qquad a_{31} = \frac{1}{10} = 0.1$$

$$a_{12} = \frac{20}{100} = 0.2 \qquad a_{32} = \frac{0}{100} = 0.0$$

$$a_{13} = \frac{0}{1000} = 0 \qquad a_{33} = \frac{100}{1000} = 0.1$$

$$a_{21} = \frac{1}{10} = 0.1 \qquad a_{41} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$a_{22} = \frac{10}{100} = 0.1 \qquad a_{42} = \frac{20}{100} = 0.2$$

$$a_{23} = \frac{200}{1000} = 0.2 \qquad a_{43} = \frac{200}{1000} = 0.2$$

Iz prethodne tablice može se sastaviti sljedeća matrica normativa:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.2 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 \end{bmatrix}$$

U novom retku računalnoga programa Eigenmath utipka se:

```
A=((0.2,0.2,0,0.1),(0.1,0.1,0.2,0.3),(0.1,0,0.1,0.2),(0.3,0.2,
0.2,0.1))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

Matrica finalnih potražnji jednaka je:

$$q = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Ta se matrica u novom retku računalnoga programa Eigenmath zadaje utipkavanjem:

```
q=((300),(200),(100),(200))
```

Pritisne se tipka *Enter*.

Neka je

$$Q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

vektor ukupnih outputa. Taj se vektor određuje prema formuli $Q = T^{-1} \cdot q$, gdje su $T = E - A$ matrica tehnologije i E jedinična matrica reda 4.

U novom retku programa *Eigenmath* generira se jedinična matrica reda 4:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

upisivanjem:

```
E=unit(4)
```

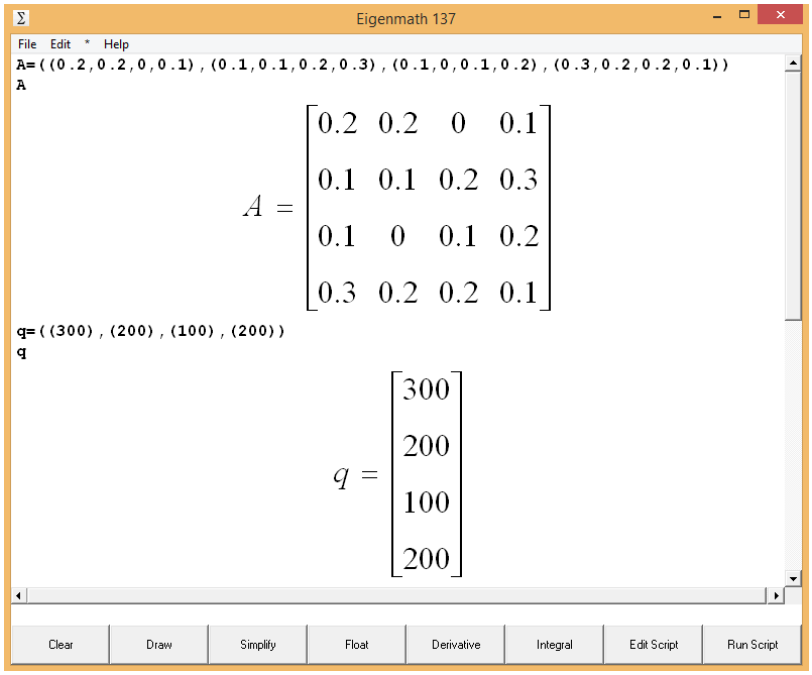
Pritisne se tipka *Enter*. Potom se utipka:

```
Q = dot(inv(E-A),q)
```

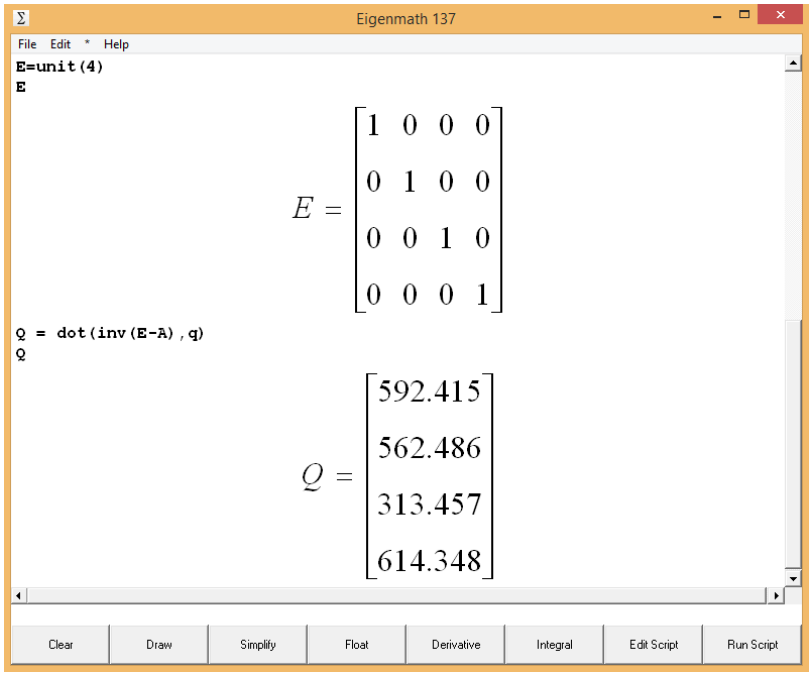
Pritisne se tipka *Enter*, pa se dobije:

$$Q = \begin{bmatrix} 592.415 \\ 562.486 \\ 313.457 \\ 614.348 \end{bmatrix}$$

Slika 4.13. *Prikaz postupka rješavanja 4. zadatka – 1. dio*



Slika 4.14. *Prikaz postupka rješavanja 4. zadatka – 2. dio*



Interpretacije elemenata matrice Q su:

- Vrijednost proizvodnje za sektor poljoprivrede iznosi 592.415 milijuna n.j.
- Vrijednost proizvodnje za sektor trgovine iznosi 562.486 milijuna n.j.
- Vrijednost proizvodnje za sektor rudarstva iznosi 313.457 milijuna n.j.
- Vrijednost proizvodnje za sektor građevine iznosi 614.348 milijuna n.j.

<u>Rješenje pomoću računalnog programa MS Excel:</u>

U blok ćelija B3:E6 upisuju se elementi matrice normativa.

Slika 4.15. *Elementi matrice normativa*

	A	B	C	D	E
1		Matrica normativa			
2	SEKTORI	Poljoprivreda	Trgovina	Rudarstvo	Građevinarstvo
3	Poljoprivreda	0,2	0,2	0	0,1
4	Trgovina	0,1	0,1	0,2	0,3
5	Rudarstvo	0,1	0	0,1	0,2
6	Građevina	0,3	0,2	0,2	0,1

Potom se u bloku ćelija B8:E11 računaju elementi matrice tehnologije. U ćeliju B8 upiše se:

`=1-B3.`

Ta se formula prekopira u ćeliju C9, D10, E11. Nadalje, u ćeliju C8 upiše se:

`=-C3.`

Ta se formula prekopira u sve preostale ćelije matrice tehnologije.

U blok ćelija B13:B16 upisuju se elementi matrice finalne potražnje. Tako se dobije sljedeća slika:

Slika 4.16. *Elementi matrice tehnologije i finalne potražnje*

	A	B	C	D	E
8	T = E - M	0,8	-0,2	0	-0,1
9		-0,1	0,9	-0,2	-0,3
10		-0,1	0	0,9	-0,2
11		-0,3	-0,2	-0,2	0,9
12					
13	Finalna potražnja	300			
14		200			
15		100			
16		200			

Elementi nepoznate matrice ukupne proizvodnje izračunavaju se u bloku ćelija B18:B21. Najprije se označi taj blok ćelija, pa se u ćeliju B18 upiše:
`=MMULT(MINVERSE(B8:E11);B13:B16).`

Potom se istovremeno pritisnu tipke *Ctrl*, *Shift* i *Enter*. Tako se dobije:

Slika 4.17. *Ukupni output*

	A	B
18	Finalna potražnja	592,414896
19		562,4857208
20		313,4567055
21		614,3477268

5. ZAKLJUČAK

Input-output analiza na sistematiziran i pregledan način prikazuje odnose i međusobne utjecaje industrijskih sektora, kao i odnose proizvodnje i finalne potražnje.

Razvoj koncepta input-output tablice je tijekom vremena mijenjao svoje oblike i namjenu korištenja. U doba Drugoga svjetskoga rata korištenje input-output tablice se smanjuje jer se smatralo da je koriste komunističke zemlje koje su imale plansko gospodarstvo. U današnje se vrijeme takvo shvaćanje pokazalo pogrešnim, a input-output tablice su se pokazale potrebnima. S otvaranjem granica i novih tržišta danas se input-output analize moraju provoditi u širem obliku i trebaju postojati kako bi se uvidjele i iskoristile potencijalne prilike u kojima se analizom utvrdi da je finalna potražnja veća od proizvodnje.

Razvoj računalnih programa omogućio je da se u kraćem vremenu i s manje novaca dođe do konačnih rezultata, što znači da se brže može reagirati na promjene tržišta.

Iz praktičnih primjera mogu se vidjeti neka mikro-tržišta i međusektorski industrijski odnosi. Za velika gospodarstva potrebna su mnogo veća istraživanja koja ovim radom nisu predviđena. Međutim, rad može poslužiti kao temelj mogućih analiza velikih tržišta uz postojanje više resursa (ljudi, kapitala, informacija, vremena i sl.).

U Republici Hrvatskoj se takva istraživanja, upravo zbog svoje obuhvatnosti, provode jednom u nekoliko godina i mogu dati vrlo korisne informacije na temelju kojih država, županije, općine, tvrtke i ustanove mogu usmjeriti svoja ulaganja u razvoj.

6. LITERATURA

[1] Jurčić Lj. (2000.) Razvitak input-output analize u Hrvatskoj
URL: http://hrcak.srce.hr/file/45251 (20.08.2014.)

[2] Jurčić Lj. (2000.) Razvitak input-output analize u Hrvatskoj
URL: http://hrcak.srce.hr/file/45251 (20.08.2014.)

[3] http://www.veleri.hr/files/datoteke/nastavni_materijali/k_poduzetnistvo_s1/Kvantitativne_za_poduzetnike_Pr3_Izv.pdf (21.08.2014.)

[4] http://www.veleri.hr/files/datoteke/nastavni_materijali/k_poduzetnistvo_s1/Kvantitativne_za_poduzetnike_Pr3_Izv.pdf (21.08.2014.)

[5] http://web.zpr.fer.hr/ZPM13C2/invmat/html/..%5Chtml%5C2.1%20Definicije%20i%20primjeri.htm (21.08.2014.)

[6] http://www.internetimenik.com/sluzbeno-glasilo-pregled/agregat/agregat-b.html (21.08.2014.)

[7] Državni zavod za statistiku (2013.) Input-output tablica za 2004.
http://www.dzs.hr/Hrv_Eng/publication/2013/12-01-04_01_2013.htm (23.08.2014.)

[8] http://www.carrascal.net46.net/fisicas/informatica/eigenmath_2.jpg (24.08.2014.)

[9] http://gweigt.net/ref.html (22.08.2014.)

[10] L. Neralić, B. Šego: Matematika, Element, Zagreb, 2009.

[11] Lj. Martić: Matematičke metode za ekonomske analize, Narodne novine, Zagreb, 1966.

7. POPIS KORIŠTENIH FUNKCIJA RAČUNALNIH PROGRAMA EIGENMATH I MS EXCEL

- EIGENMATH

`det(m)`

`dot(a,b)`

`inv(m)`

`transpose(a)`

`unit(n)`

`zero(m,n)`

- MS EXCEL

`MINVERSE` – vraća inverz matrice (ekvivalent Eigenmath-ove funkcije `inv`)

`MMULT` – vraća umnožak dviju matrica

8. POPIS SLIKA

9. POPIS TABLICA