visoka poslovna škola par

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE

(OSNOVNA (B) RAZINA)

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač

Rijeka, siječanj 2015.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

SADRŽAJ

visoka poslovna škola par

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: SVIBANJ 2010.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. A. Svih pet zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2 i 3, tj. $NZV(2, 3) = 6$. Dobijemo:

$$\left(-\frac{15}{6}\right), \left(-\frac{21}{6}\right), \left(-\frac{10}{6}\right), \left(-\frac{9}{6}\right) \text{ i } \left(-\frac{4}{6}\right).$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino –21 strogo manji od –15.

2. B. Od 18:05 sati najprije oduzmemo 5 minuta. Tako dobijemo 18:00 sati. Preostaje od 18:00 sati (= 17 sati i 60 minuta) oduzeti preostalih 18 – 5 = 13 minuta. Tako dobijemo vrijeme: 17 sati i 60 – 13 = 47 minuta.

3. D. Imamo redom:

$$\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{6}-\frac{1\cdot 2}{6\cdot 3}=\frac{5}{6}-\frac{2}{18}=\frac{15}{18}-\frac{2}{18}=\frac{13}{18}.$$

4. C. Masa 20 olovaka je ukupno $\frac{256}{20}=\frac{64}{5}$ puta manja od mase 256 olovaka. Stoga je tražena masa jednaka:

$$4.24:\frac{64}{5}=4.24\cdot\frac{5}{64}=\frac{21.2}{64}=\frac{212}{640}=\frac{53}{160}=0.33125 \text{ kg} = 0.33125 \cdot 1\,000 \text{ g} = 331.25 \text{ g}.$$

5. B. Imamo redom:

$$\left(\frac{3\cdot a+1}{3}\right)^2=\frac{(3\cdot a+1)^2}{3^2}=\frac{(3\cdot a)^2+2\cdot(3\cdot a)\cdot 1+1^2}{9}=\frac{3^2\cdot a^2+6\cdot a+1}{9}=\frac{9\cdot a^2+6\cdot a+1}{9}.$$

6. B. Označimo položaj luke s L. Krećući se prema istoku, brod je prevalio ukupno s_1 = 12 km/h · · 2 h = 24 km i stigao je u točku A. Krećući se prema sjeveru iz točke A brod je prevalio ukupno s_2 = 14 km/h · 5 h = 70 km i stigao u točku B. Trokut LAB je pravokutan s pravim kutom u vrhu A. Duljine njegovih kateta su $a = s_1$ = 24 km i $b = s_2$ = 70 km. Tražena udaljenost jednaka je duljini stranice BL, odnosno duljini hipotenuze trokuta LAB. Koristeći Pitagorin poučak dobijemo:

$$|LB|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{24^2+70^2}=\sqrt{576+4900}=\sqrt{5476}=74 \text{ km}.$$

7. D. Izračunamo redom:

$$f(-1) = 4 \cdot (-1) - (-1)^2 = (-4) - 1 = -5,$$
$$f(2) = 4 \cdot 2 - 2^2 = 8 - 4 = 4,$$
$$f(3) = 4 \cdot 3 - 3^2 = 12 - 9 = 3.$$

Pripadna tablica je posljednja od četiriju ponuđenih tablica.

8. C. Izračunamo redom:

$$\frac{\sqrt{28}}{3} \approx \frac{5.2915026}{3} = 1.7638342\,.$$

Zaokružimo li ovaj broj na tri decimale, dobit ćemo 1.764 (posljednju decimalu zaokružujemo naviše jer je prva sljedeća decimala (8) strogo veća od 5.).

9. **A.** Graf funkcije f je pravac p čija je jednadžba $y = 2 \cdot x - 4$. Zapišimo tu jednadžbu u segmentnom obliku jer se iz toga oblika odmah mogu očitati obje tražene točke:

$$(-2)\cdot x + y = -4 \quad / : (-4)$$
$$\frac{(-2)\cdot x}{(-4)} + \frac{y}{(-4)} = 1$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)} = 1$$

Odatle slijedi da je sjecište pravca p s osi x točka $A(2.\ 0)$, a sjecište pravca p s osi y točka $B(0, -4)$.

Napomena: Ako je jednadžba pravca u segmentnom obliku $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, onda taj pravac siječe os x u točki $S_1(m, 0)$, a os y u točki $S_2(0, n)$. Vrijedi i obrat: ako pravac siječe os x u točki $S_1(m, 0)$, a os y u točki $S_2(0, n)$, onda je njegova jednadžba u segmentnom obliku $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$.

10. **C**. ***Napomena*: U izračunu pretpostavljamo da jedna godina ima 365 dana**. U 70 godina ljudskoga života ima ukupno $70 \cdot 365$ dana, pa u tih $70 \cdot 365$ dana ljudsko srce otkuca približno

$$n = 70 \cdot 365 \cdot 100\,000 = 2\,555\,000\,000 = 2.555 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2.555 \cdot 10^9 \approx 2.6 \cdot 10^9 \text{ puta.}$$

11. **D**. Graf kvadratne funkcije očito ne siječe os x, što znači da pripadna kvadratna jednadžba nema realnih rješenja. Odatle slijedi $D < 0$. Nadalje, iz oblika grafa kvadratne funkcije (parabola s otvorom prema dolje) zaključujemo da je vodeći koeficijent $a < 0$.

12. **C.** Imamo redom:

$$2 \cdot s = a + b + c$$
$$a = 2 \cdot s - b - c.$$

13. **A.** Iz podatka da je Martina za $n = 3$ tjedna platila ukupno $c = 2\,092$ kn dobivamo jednadžbu:

$$2\,092 = t \cdot 3 + d.$$

Iz podatka da je Maja za $n = 5$ tjedana platila ukupno $c = 3\,412$ kn dobivamo jednadžbu:

$$3\,412 = t \cdot 5 + d.$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s (-5), a drugu s 3. Dobivamo:

$$-10\,460 = t \cdot (-15) + (-5) \cdot d,$$
$$10\,236 = t \cdot 15 + 3 \cdot d.$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobijemo:

$$-224 = (-2) \cdot d,$$

a odatle dijeljenjem s (-2) slijedi da je traženi iznos jednak $d = 112$ kn.

14. A. Za $x \neq \pm 2$ primjenom formule za razliku kvadrata dobijemo da je zadani izraz jednak:

$$\frac{2\cdot x}{x^2-2^2}-\frac{1}{x-2}=\frac{2\cdot x}{(x-2)\cdot(x+2)}-\frac{1}{x-2}=\frac{2\cdot x-1\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{2\cdot x-x-2}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{1}{x+2}$$

15. D. Označimo s x ukupan broj pakiranja od 330 g, a s y ukupan broj pakiranja od 500 g. Iz podatka da je ukupan broj svih pakiranja jednak 140 dobivamo jednadžbu:

$$x + y = 140.$$

Nadalje, ukupna masa svih pakiranja od 330 g iznosi $x \cdot 330$ g, a ukupna masa svih pakiranja od 500 g iznosi $y \cdot 500$ g. Iz podatka da ukupna masa svih pakiranja iznosi 55 550 g dobivamo jednadžbu:

$$x \cdot 330 + y \cdot 500 = 55\,550.$$

Iz prve jednadžbe je

$$y = 140 - x,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu dobijemo:

$$x \cdot 330 + (140 - x) \cdot 500 = 55\,550,$$
$$x \cdot 330 + 140 \cdot 500 - 500 \cdot x = 55\,550,$$
$$x \cdot (330 - 500) = 55\,550 - 140 \cdot 500,$$
$$(-170) \cdot x = 55\,550 - 70\,000,$$
$$(-170) \cdot x = (-14\,450).$$

Odatle dijeljenjem sa (-170) dobijemo $x = 85$. Dakle, trgovac je dobio 85 manjih pakiranja.

16. B. Neka je s tražena svota. Za kupnju bilježnica Marin je izdvojio ukupno $\frac{1}{3}\cdot s$ kuna, pa mu je nakon kupnje bilježnica preostalo ukupno

$$s_1 = s-\frac{1}{3}\cdot s=\frac{3\cdot s-1\cdot s}{3}=\frac{2\cdot s}{3}=\frac{2}{3}\cdot s \text{ kuna.}$$

Za kupnju olovaka Marin je izdvojio ukupno $\frac{1}{4}\cdot s_1=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot s\right)=\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot s=\frac{1}{6}\cdot s$ kuna, pa mu je nakon kupnje olovaka preostalo ukupno

$$s_2 = s_1-\frac{1}{4}\cdot s_1=\frac{2}{3}\cdot s-\frac{1}{6}\cdot s=\frac{4}{6}\cdot s-\frac{1}{6}\cdot s=\frac{4-1}{6}\cdot s=\frac{3}{6}\cdot s=\frac{1}{2}\cdot s \text{ kuna.}$$

Polovicu toga iznosa Marin je potrošio za kupnju pernice, pa mu je nakon kupnje pernice preostalo ukupno

$$s_3 = s_2-\frac{1}{2}\cdot s_2=\frac{1}{2}\cdot s-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot s\right)=\frac{1}{2}\cdot s-\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot s=\frac{1}{2}\cdot s-\frac{1}{4}\cdot s=\frac{2}{4}\cdot s-\frac{1}{4}\cdot s=\frac{2-1}{4}\cdot s=\frac{1}{4}\cdot s \text{ kuna.}$$

Prema uvjetu zadatka, taj iznos treba biti jednak 18 kuna. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{4} \cdot s = 18.$$

Množenjem te jednadžbe s 4 slijedi s = 72 kn.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 80. Označimo traženi broj s x. Iz zadanih podataka dobiva se jednadžba:

$$\frac{8}{100} \cdot x = 6.4.$$

Odavde je

$$x = 6.4 : \frac{8}{100} = 6.4 \cdot \frac{100}{8} = \frac{6.4 \cdot 100}{8} = \frac{640}{8} = 80.$$

18. –6. Uvrstimo drugu jednadžbu sustava u prvu, pa dobijemo:

$$x = 2 \cdot (2 \cdot x + 7) + 4,$$
$$x = 4 \cdot x + 14 + 4,$$
$$x - 4 \cdot x = 18,$$
$$(-3) \cdot x = 18.$$

Odatle dijeljenjem s (–3) slijedi $x = -6$.

19. 20. Neka je $š$ tražena masa šećera (iskazana u dekagramima). Iz zadanih podataka postavljamo razmjer:

$$š : 15 = 4 : 3.$$

Odatle slijedi:

$$3 \cdot š = 15 \cdot 4,$$
$$3 \cdot š = 60.$$

Dijeljenjem s 3 dobije se $š = 20$.

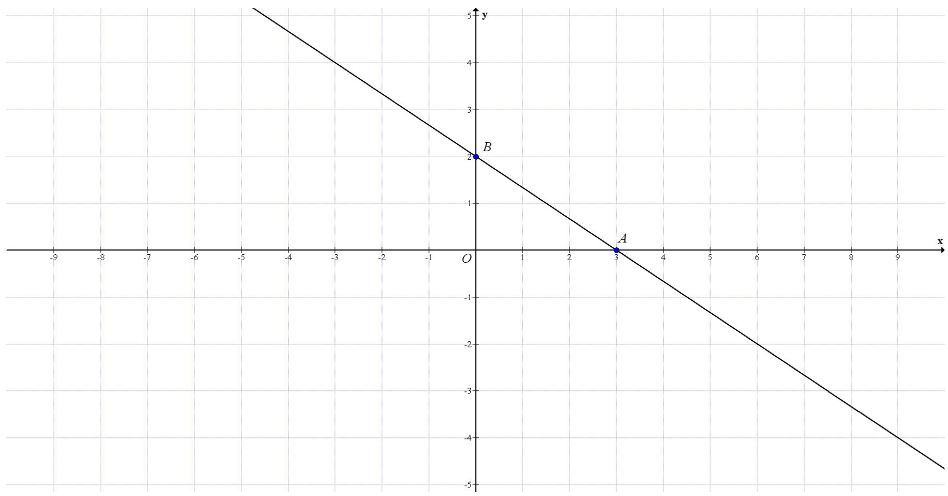
20. $\frac{3402}{3125} = 1.08864$**.** Imamo redom:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot v = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{18}{25}\right)^2 \cdot 6.3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{18^2}{25^2} \cdot \frac{63}{10} = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{63}{10}\right) \cdot \frac{18^2}{25^2} = \frac{21}{10} \cdot \frac{18^2}{25^2} = \frac{6804}{6250} = \frac{3402}{3125} = 1.08864.$$

21. Vidjeti Sliku 1. Za crtanje bilo kojega pravca dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih dviju njegovih točaka. Prevedimo jednadžbu zadanoga pravca u segmentni oblik:

$$2 \cdot x + 3 \cdot y = 6 \quad / : 6$$
$$\frac{2 \cdot x}{6} + \frac{3 \cdot y}{6} = 1$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

Analogno kao u 9. zadatku zaključujemo da zadani pravac prolazi točkama $A(3,\ 0)$ i $B(0,\ 2)$. Ucrtamo te dvije točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 1.

22. $x_1 = \sqrt{3} + 1,\ x_2 = \sqrt{3} - 1$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{\left(2 \cdot \sqrt{3}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{2^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{4 \cdot 3 - 8}}{2} =$$
$$= \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{12 - 8}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \pm 2}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} \pm \frac{2}{2} = \sqrt{3} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{3} + 1,\ x_2 = \sqrt{3} - 1$$

23. Duljina iskazana u stopama i duljina iskazana u metrima su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti k = 0.3048. Stoga je duljina od 5.8 stopa jednaka duljini od 0.3048 · 5.8 = 1.76784 metara, a duljina od 1.40208 metara jednaka duljini od $\frac{1.40208}{0.3048}$ = 4.6 stopa. Dakle, konačno imamo:

5.8 stopa = **1.76784 metara,**
4.6 stopa = 1.40208 metara.

24. $\frac{168}{5} = 33.6$ **; 168**. Izračunajmo najprije duljinu dužine $\overline{EF}$. Površina pravokutnoga trokuta CEF jednaka je:

$$P_{CEF} = \frac{|\overline{CE}| \cdot |\overline{EF}|}{2} \text{ cm}^2.$$

Odavde je

$$2 \cdot P_{CEF} = |\overline{CE}| \cdot |\overline{EF}|,$$
$$|\overline{EF}| = \frac{2 \cdot P_{CEF}}{|\overline{CE}|}$$

U posljednju jednakost uvrstimo $P_{CEF} = 12$ i $|\overline{CE}| = 6$, pa dobijemo:

$$|\overline{EF}| = \frac{2 \cdot 12}{5} = \frac{24}{5} \text{ cm}.$$

Prema uvjetu zadatka, duljina stranice $\overline{AB}$ je sedam puta veća od duljine katete $\overline{EF}$, pa slijedi:

$$|\overline{AB}| = 7 \cdot |\overline{EF}| = 7 \cdot \frac{24}{5} = \frac{168}{5} = 33.6 \text{ cm}.$$

Površina paralelograma $ABCD$ jednaka je umnošku duljine bilo koje stranice toga paralelograma i duljine pripadne visine na tu stranicu. Uočimo da je dužina $\overline{CE}$ visina iz vrha C povučena na stranicu $\overline{AB}$. Prema tome, površina paralelograma $ABCD$ jednaka je:

$$P_{ABCD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{CE}| = \frac{168}{5} \cdot 5 = 168 \text{ cm}^2.$$

25. 1.) $-\frac{4}{3}$. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$2 \cdot x + 2 + 4 = 2 - x,$$
$$2 \cdot x + x = 2 - 2 - 4,$$
$$3 \cdot x = -4.$$

Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $x = -\frac{4}{3}$.

2.) $x < -\frac{9}{4}$ **ili** $x \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{4} \right\rangle$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj s $NZV(6, 2) = 6$. Dobivamo:

$$1 \cdot (5 \cdot x - 3) - 3 \cdot (3 \cdot x) > 1 \cdot 6,$$
$$5 \cdot x - 3 - 9 \cdot x > 6,$$
$$5 \cdot x - 9 \cdot x > 6 + 3,$$
$$(-4) \cdot x > 9.$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–4), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz > u <, slijedi $x < -\frac{9}{4}$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{4} \right\rangle$.

26. 1.)10; 2.) 15. Neka je c cijena (iskazana u kunama) jedne čokolade prije poskupljenja. Tada je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja

$$c_1 = c + \frac{25}{100} \cdot c = c + \frac{1}{4} \cdot c = c \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4} \cdot c \text{ kuna.}$$

Za iznos od 120 kn se prije poskupljenja moglo kupiti ukupno $n = \frac{120}{c}$ čokolada, dok se nakon poskupljenja može kupiti ukupno $n_1 = \frac{120}{c_1} = \frac{120}{\frac{5}{4} \cdot c} = \frac{120 \cdot 4}{5 \cdot c} = \frac{24 \cdot 4}{c} = \frac{96}{c}$ čokolada. Prema uvjetu zadatka, razlika brojeva n i n_1 treba biti jednaka 2. Stoga dobivamo jednadžbu:

$$\frac{120}{c} - \frac{96}{c} = 2,$$

odnosno

$$\frac{24}{c} = 2.$$

Pomnožimo li tu jednadžbu s c (što smijemo jer je cijena jedne čokolade sigurno strogo pozitivan realan broj), dobit ćemo:

$$24 = 2 \cdot c,$$

a odavde dijeljenjem s 2 dobijemo $c = 12$. Dakle, cijena jedne čokolade prije poskupljenja iznosila je $c = 12$ kn, dok je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja

$$c_1 = \frac{5}{4} \cdot c = \frac{5}{4} \cdot 12 = 15 \text{ kuna.}$$

Prije poskupljenja se za 120 kuna moglo kupiti ukupno $n = \frac{120}{c} = \frac{120}{12} = 10$ čokolada, dok se nakon poskupljenja za isti iznos može kupiti ukupno $n_1 = \frac{96}{c} = \frac{96}{12} = 8$ čokolada.

27. 1.) 600, 250. Svaki pomak udesno ima duljinu 100 metara, dok svaki pomak prema gore ima duljinu 50 metara. Od kuće do točke K imamo ukupno 6 pomaka udesno i 5 pomaka prema gore. Stoga su koordinate točke K:

$$K\,(6 \cdot 100, 5 \cdot 50),$$

tj. $K(600, 250)$.

2.) 1 400. Od kuće do škole Karlo je napravio ukupno 10 pomaka udesno i 8 pomaka prema gore. Stoga je tražena duljina Karlova puta jednaka

$$s = 10 \cdot 100 + 8 \cdot 50 = 1\,000 + 400 = 1\,400 \text{ metara.}$$

3.) 122.8. Dovoljno je promatrati samo put od točke K do škole jer su oboje hodajući od kuće do točke K prevalili putove jednakih duljina. Od točke K do škole Karlo je prevalio put koji se sastoji od 4 pomaka udesno i 3 pomaka prema gore, pa je duljina toga puta jednaka

$$s_1 = 4 \cdot 100 + 3 \cdot 50 = 400 + 150 = 550 \text{ metara.}$$

Od točke K do škole Karmela je prevalila put čija je duljina jednaka duljini hipotenuze pravokutnoga trokuta kojemu katete imaju duljine $a = 4 \cdot 100 = 400$ metara i $b = 3 \cdot 50 = 150$ metara. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo da je duljina toga puta jednaka

$$s_2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{400^2 + 450^2} = \sqrt{160\ 000 + 22\ 500} = \sqrt{182\ 500} = \sqrt{2500 \cdot 73} = \sqrt{2500} \cdot \sqrt{73}$$
$$s_2 = 50 \cdot \sqrt{73} \approx 427.2 \text{ metara}$$

Stoga je razlika duljina Karlova puta i Karmelina puta jednaka

$$\Delta s = s_1 - s_2 \approx 550 - 427.2 = 122.8 \text{ metara}$$

28. 1.) 20. Obujam oblika leda jednak je

$$V_{led} = 3.5 \cdot 3 \cdot 2 = 21 \text{ cm}^3.$$

Prema uvjetu zadatka, obujam leda dobije se tako da se početni obujam vode poveća za 5%. Označimo li s V početni obujam vode, dobivamo jednadžbu:

$$V + \frac{5}{100} \cdot V = 21\,.$$

Odavde je

$$V \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 21$$
$$V \cdot \frac{100+5}{100} = 21$$
$$V \cdot \frac{105}{100} = 21$$
$$V = 21 : \frac{105}{100}$$
$$V = \frac{21 \cdot 100}{105}$$
$$V = 20$$

Dakle, za jedan promatrani oblik leda potrebno je ukupno 20 cm^3 vode.

2.) 50. Označimo traženi broj s n. Jedna litra, tj. 1 dm^3 vode jednak je obujmu od $1 \cdot 1\ 000 = 1\ 000$ cm^3 vode. Iz **1.)** znamo da je 1 oblik leda, tj. za 21 cm^3 leda potrebno ukupno 20 cm^3 vode. Stoga je traženi broj jednak

$$n = \frac{1\ 000}{20} = 50\,.$$

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: KOLOVOZ 2010.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Svih šest zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 3 i 7, tj. $NZV(2, 3, 7) = 42$. Dobijemo redom:

$$\left(-\frac{147}{42}\right), \left(\frac{14}{42}\right), \left(-\frac{161}{42}\right), \left(-\frac{154}{42}\right), \frac{12}{42} \text{ i } \frac{18}{42}\ .$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino 12 strogo veći od –147, a strogo manji od 14.

2. **C.** Do 11:00 sati meč je trajao 15 minuta. Od 11:00 do 14:00 sati meč je trajao puna 3 sata Od 14:00 do kraja meča (14 sati i 12 minuta) meč je trajao 12 minuta. Stoga je ukupno vrijeme jednako 15 minuta + 3 sata + 12 minuta = 3 sata 27 minuta.

3. **A.** Imamo redom:

$$\frac{\frac{25}{100}-\frac{21}{2}}{\frac{1}{4}}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{42}{4}}{\frac{1}{4}}=\frac{-\frac{41}{4}}{\frac{1}{4}}=-41.$$

4. **C.** Neka su A točka u kojoj ljestve dodiruju zid, B točka u kojoj ljestve dodiruju podnožje, te C ortogonalna projekcija točke A na podnožje. Trokut ABC je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Duljina njegove hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je duljini ljestava, tj. $c = \left|\overline{AB}\right|$ 2.4 m, dok je duljina njegove katete $\overline{BC}$ jednaka udaljenosti ljestava od zida, tj. $a = \left|\overline{BC}\right| = 1$ m. Visina na kojoj ljestve dodiruju zid jednaka je duljini druge katete $\overline{AC}$ trokuta. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$\left|\overline{AC}\right|=\sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2-\left|\overline{BC}\right|^2}=\sqrt{2.4^2-1^2}=\sqrt{5.76-1}=\sqrt{4.76}=\sqrt{\frac{476}{100}}=\sqrt{\frac{119}{25}}=\frac{\sqrt{119}}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}\cdot\sqrt{119}$$

$$\left|\overline{AC}\right|\approx 2.18174242 \text{ m}$$

5. **A.** Imamo redom:

$$(a^3+2)^2=(a^3)^2+2\cdot a^3\cdot 2+2^2=a^{3\cdot 2}+4\cdot a^3+4=a^6+4\cdot a^3+4.$$

6. **B.** Traženi broj dobit ćemo tako da broj 20 875 povećamo za 4.19% njegove vrijednosti. Dobijemo:

$$N_1=20\ 875+\frac{4.19}{100}\cdot 20\ 875=20\ 875+\frac{87\ 466.25}{100}=20\ 875+\ 874.6625=21\ 749.6625\approx 21\ 750$$

7. **A.** Izračunamo redom:

$$f(-1)=2\cdot(-1)-3=(-2)-3=-5,$$
$$f(2)=2\cdot 2-3=4-3=1,$$
$$f(3)=2\cdot 3-3=6-3=3.$$

Pripadna tablica je prva od četiriju ponuđenih tablica.

8. **C.** Zaokružimo li prvi broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.77 (polazna treća decimala je 9, pa se zaokruživanjem polazna druga decimala povećava za 1). Analogno, zaokružimo li drugi broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.77 (polazna treća decimala je 3, pa se zaokruživanjem ne mijenja polazna druga decimala). Zaokružimo li treći broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.78 (iz istoga razloga kao i kod prvoga broja). Napokon, zaokružimo li četvrti broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.79 (polazna treća decimala je 6, pa se zaokruživanjem polazna druga decimala povećava za 1). Stoga je traženi broj 5.7791.

9. **B.** Obujam kocke jednak je

$$V_{kocke} = a_{kocke}^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3,$$

dok je oplošje kocke

$$O_{kocke} = 6 \cdot a_{kocke}^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2.$$

Obujam kvadra jednak je

$$V_{kvadra} = a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 4 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3,$$

dok je oplošje kvadra

$O_{kvadra} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (9 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 6) = 2 \cdot (36 + 54 + 24) = 2 \cdot 114 =$
$= 228 \text{ cm}^2.$

Dakle, kocka i kvadar imaju jednake obujmove, ali različita oplošja.

10. **D**. Imamo redom:

$$5 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 - 9 = 5 \cdot x - 9.$$

11. **C**. Maksimalna visina luka jednaka je najvećoj vrijednosti kvadratne funkcije $f(x) = (-0.3) \cdot x^2 +$ $+ 1.8 \cdot x$. Očitamo parametre kvadratne funkcije: $a = -0.3$, $b = 1.8$, $c = 0$, pa izračunamo:

$$f_{\max} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot (-0.3) \cdot 0 - 1.8^2}{4 \cdot (-0.3)} = \frac{-1.8^2}{-1.2} = \frac{1.8^2}{1.2} = \frac{3.24}{1.2} = 2.7$$

Dakle, tražena maksimalna visina iznosi 2.7 metara.

12. **D.** Imamo redom:

$$k \cdot x = -l \quad / : x$$
$$k = -\frac{l}{x}$$

13. **A.** Neka su x ukupan broj kovanica od pet kuna, y ukupan broj kovanica od dvije kune i z ukupan broj kovanica od 50 lipa (= 0.5 kn). Iz podatka da ukupna novčana vrijednost svih kovanica iznosi 132 kn slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$x \cdot 5 + y \cdot 2 + z \cdot 0.5 = 132.$$

Iz podatka da kovanica od dvije kune ima dvostruko više nego kovanica od pet kuna slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$y = 2 \cdot x.$$

Iz podatka da kovanica od 50 lipa ima trostruko više nego kovanica od dvije kune slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$z = 3 \cdot y.$$

Tako smo dobili sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x + 2 \cdot y + 0.5 \cdot z &= 132 \\ y &= 2 \cdot x \\ z &= 3 \cdot y \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe sustava dijeljenjem s 2 slijedi:

$$x = \frac{1}{2} \cdot y .$$

Uvrštavanjem te jednakosti i treće jednadžbe sustava u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$\begin{aligned} &5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y \right) + 2 \cdot y + 0.5 \cdot (3 \cdot y) = 132 \\ &\frac{5}{2} \cdot y + 2 \cdot y + 1.5 \cdot y = 132 \quad / \cdot 2 \\ &5 \cdot y + 4 \cdot y + 3 \cdot y = 264 \\ &12 \cdot y = 264 \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 12 slijedi $y = 22$. Dakle, u kasici su bile 22 kovanice od dvije kune.

14. D. Za a, $b \neq 0$ dobijemo da je zadani izraz jednak:

$$\left(\frac{3 \cdot a - b}{b^2} + \frac{b}{b^2} \right) \cdot \frac{b}{6 \cdot a} = \frac{3 \cdot a - b + b}{b^2} \cdot \frac{b}{6 \cdot a} = \frac{3 \cdot a}{b^2} \cdot \frac{b}{6 \cdot a} = \frac{1}{2 \cdot b} .$$

15. C. Površina jedne pločice iznosi:

$$P_1 = a^2_{pločice} = \left(\frac{32}{100} \text{ m} \right)^2 = \frac{32^2}{100^2} \text{ m}^2 = \frac{1024}{10\,000} \text{ m}^2 = 0.1024 \text{ m}^2 .$$

Stoga je za popločavanje poda potrebno ukupno

$$n = \frac{P_{poda}}{P_1} = \frac{15}{0.1024} = 146.484375 \approx 147 \text{ pločica}$$

(Broj zaokružujemo na prvi veći prirodan broj tako da cijeli pod bude pokriven, što neće biti ispunjeno nabavimo li 146 pločica.) Budući da u jednom paketu ima ukupno 12 pločica, traženi potreban broj paketa jednak je

$$n_1 = \frac{n}{12} = \frac{147}{12} = 12.25 \approx 13 .$$

(Broj opet zaokružujemo na prvi veći prirodan broj jer ako nabavimo 12 paketa pločica, ukupna površina koju možemo pokriti s 12 paketa iznosi $P_2 = 12 \cdot 12 \cdot P_1 = 144 \cdot 0.1024 = 14.7456$ m^2, što je manje od površine poda.) Dakle, treba kupiti najmanje 13 paketa pločica.

16. **A.** Neka je c cijena ulaznice na dan igranja utakmice, a c_p cijena ulaznice u pretprodaji. Iz podatka da je cijena ulaznice na dan igranja utakmice za 10 kuna veća od cijene ulaznice u pretprodaji slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$c = c_p + 10.$$

Za 600 kuna u pretprodaji se može kupiti ukupno $n_1 = \frac{600}{c_p}$ ulaznica, dok se na dan igranja utakmice za isti iznos može kupiti ukupno $n = \frac{600}{c}$ ulaznica. Iz podatka da se na dan igranja utakmice za 600 kn može kupiti za 5 ulaznica manje nego u pretprodaji slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$n - n_1 = 5,$$

odnosno, nakon uvrštavanja izraza za n i n_1,

$$\frac{600}{c_p} - \frac{600}{c} = 5.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$c = c_p + 10$$
$$\frac{600}{c_p} - \frac{600}{c} = 5$$

Iz prve jednadžbe toga sustava slijedi:

$$c_p = c - 10,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{600}{c-10} - \frac{600}{c} = 5 \\
&\frac{600 \cdot c}{c \cdot (c-10)} - \frac{600 \cdot (c-10)}{c \cdot (c-10)} = 5 \\
&\frac{600 \cdot c - 600 \cdot (c-10)}{c \cdot (c-10)} = 5 \\
&\frac{600 \cdot c - 600 \cdot c + 6\,000}{c \cdot (c-10)} = 5 \\
&\frac{6\,000}{c \cdot (c-10)} = 5 \quad / \cdot c \cdot (c-10) \\
&6\,000 = 5 \cdot c \cdot (c-10) \quad / : 5 \\
&1\,200 = c \cdot (c-10) \\
&c^2 - 10 \cdot c - 1\,200 = 0
\end{aligned}$$

$$c_{1,2}=\frac{10\pm\sqrt{10^2-4\cdot 1\cdot 1\ 200}}{2\cdot 1}=\frac{10\pm\sqrt{100+4\ 800}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{4\ 900}}{2}=\frac{10\pm 70}{2}\Rightarrow$$
$$c_1=\frac{10+70}{2}=\frac{80}{2}=40,\ c_2=\frac{10-70}{2}=\frac{-60}{2}=-30$$

Budući da cijena ulaznice, kao novčani iznos, ne može biti strogo negativan realan broj, rješenje c_2 ne dolazi u obzir. Dakle, cijena ulaznice na dan utakmice iznosi $c = c_1 = 40$ kn.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 320. Označimo traženi broj s x. Iz zadanih podataka dobiva se jednadžba:

$$\frac{11}{100}\cdot x=35.2\,.$$

Odavde je

$$x=35.2:\frac{11}{100}=35.2\cdot\frac{100}{11}=\frac{35.2\cdot 100}{11}=\frac{3\ 520}{11}=320\,.$$

18. $\frac{1}{5}$**.** Lijeve strane obiju jednadžbi sustava su međusobno jednake, pa takve moraju biti i desne strane tih jednadžbi. Stoga redom dobivamo:

$$\frac{3}{5}+2\cdot y=-\frac{2}{5}+7\cdot y$$
$$2\cdot y-7\cdot y=-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$$
$$(-5)\cdot y=-1$$

Odatle dijeljenjem s (–5) slijedi $y=\frac{1}{5}$.

19. 375. Neka je b tražena masa brašna (iskazana u gramima). Iz zadanih podataka postavljamo razmjer:

$$b : 150 = 5 : 2.$$

Odatle slijedi:

$$2\cdot b = 150\cdot 5,$$
$$2\cdot b = 750.$$

Dijeljenjem s 2 dobije se $b = 375$. Dakle, stavit ćemo 375 grama brašna.

20. $\frac{3}{4}$**.** Imamo redom:

$$H=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}\,.$$

21. Vidjeti Sliku 1. Graf zadane funkcije je parabola. Za crtanje bilo koje parabole dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih triju njezinih točaka, od kojih točno jedna treba biti tjeme parabole. Iz zadane funkcije očitamo vrijednosti pripadnih parametara:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,$$

pa računamo koordinate tjemena parabole:

$$T\left(-\frac{b}{2\cdot a}, \frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right) \Rightarrow T\left(-\frac{0}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot 1-0^2}{4\cdot 1}\right) \Rightarrow T\left(0,\ \frac{4}{4}\right) \Rightarrow T(0,\ 1).$$

Nadalje, primijetimo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi stroga nejednakost:

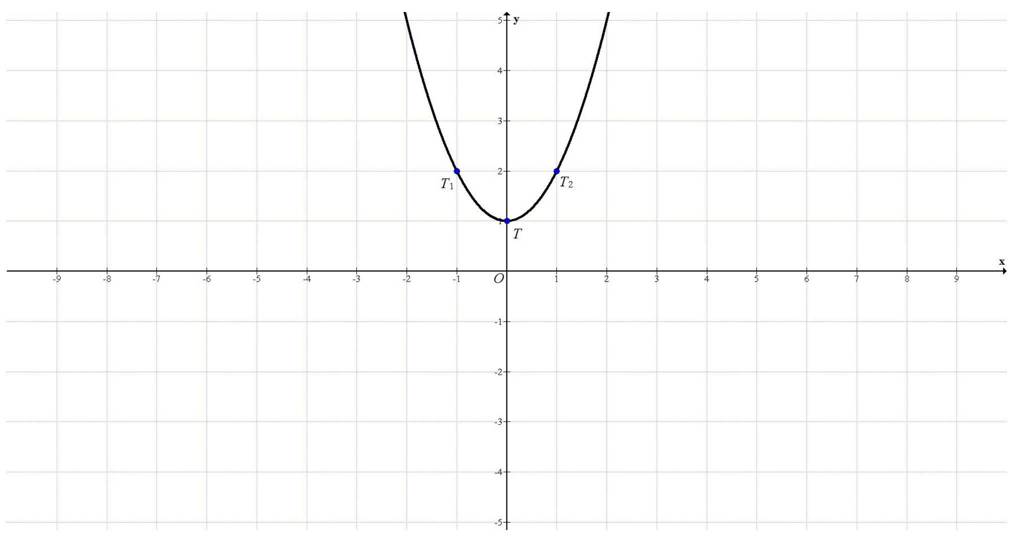
$$x^2 + 1 > 0,$$

što znači da funkcija f nema realnih nultočaka, tj. da njezin graf ne siječe os x. Sjecište toga grafa s osi y već smo odredili: to je tjeme parabole, tj. točka $T(0, 1)$.

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f za dvije različite vrijednosti varijable x. Radi lakšega crtanja, najbolje je odabrati točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo manja od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole) i točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo veća od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole). Uzmimo npr. $x = \pm 1$, pa dobijemo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Tako dobivamo još dvije točke parabole: $T_1(-1, 2)$ i $T_2(1, 2)$. Traženi graf prikazan je na Slici 2.



Slika 2.

22. $x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{5-4}}{2} = \frac{\sqrt{5}\pm\sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{5}\pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

23. Novčana vrijednost iskazana u eurima i novčana vrijednost iskazana u kunama su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti $k = 7.4456$. Stoga je iznos od 256.78 eura jednak iznosu od $256.78 \cdot 7.4456 = 1\,911.881168 \approx 1\,911.88$ kuna, a iznos od 1 000 kuna jednak iznosu od $\frac{1\,000}{7.4456} = 134.30751 \approx 134.31$ eura. Dakle, konačno imamo:

256.78 eura = **1 911.88 kuna,**
134.31 eura = 1 000 kuna.

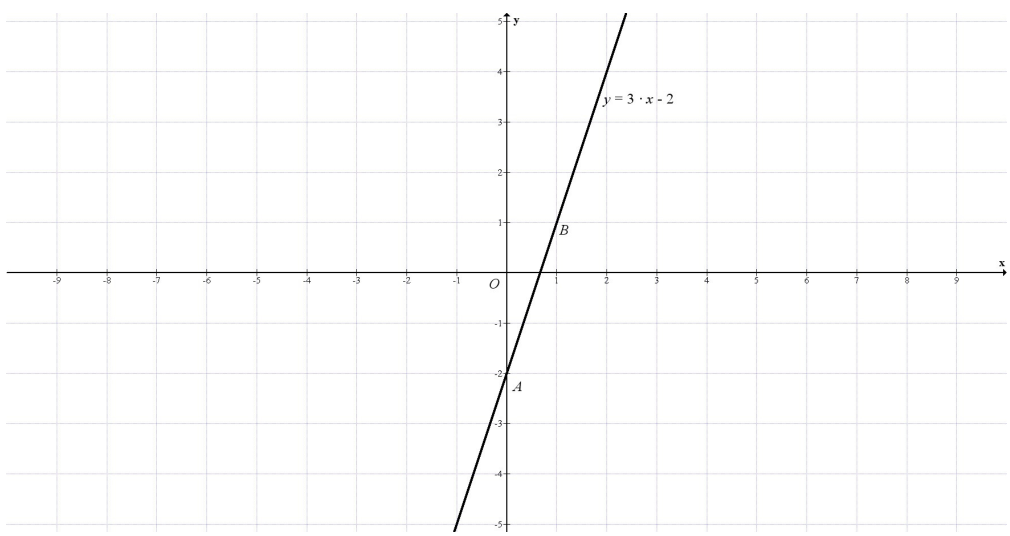
24. Vidjeti Sliku 3. Bilo koji pravac u ravnini jednoznačno je određen zadavanjem svojih bilo kojih dviju različitih točaka. Iz zadane jednadžbe pravca možemo očitati odsječak na osi y:

$$l = -2$$

pa pravac prolazi točkom $A(0, -2)$. Još jednu točku pravca dobit ćemo uzmemo li npr. $x = 1$ i izračunamo pripadnu vrijednost varijable y:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Dakle, pravac prolazi i točkom $B(1, 1)$. Ucrtamo obje navedene točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 3.

Nadalje, pravac usporedan sa zadanim pravcem ima isti koeficijent smjera kao i zadani pravac, tj. $k = 3$. Preostaje napisati jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera $k = 3$ i prolazi točkom T:

$$p \ldots y - (-7) = 3 \cdot (x - 0),$$
$$p \ldots y = 3 \cdot x + (-7),$$
$$p \ldots \mathbf{y = 3 \cdot x - 7.}$$

25. 1.) 12. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 3. Dobivamo:

$$3 \cdot x = 4 \cdot (x - 3),$$
$$3 \cdot x = 4 \cdot x - 12,$$
$$3 \cdot x - 4 \cdot x = -12,$$
$$(-1) \cdot x = -12.$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = 12$.

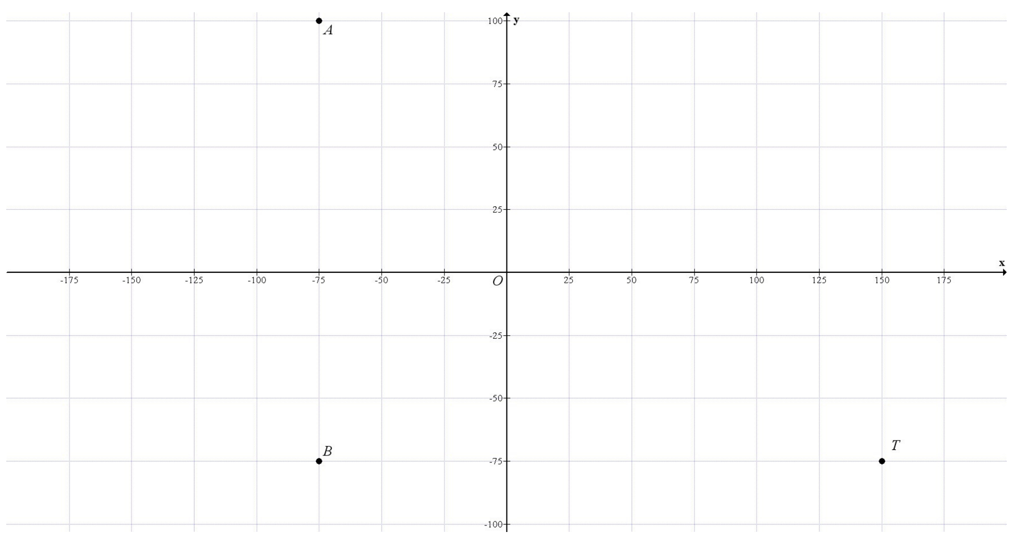
2.) $x < -20$ ili $x \in \langle -\infty, -20\rangle$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj s $NZV(3, 5) = 15$. Dobivamo:

$$5 \cdot (x - 4) - 3 \cdot (2 \cdot x) > 0,$$
$$5 \cdot x - 20 - 6 \cdot x > 0,$$
$$5 \cdot x - 6 \cdot x > 20$$
$$(-1) \cdot x > 20.$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–1), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz > u <, slijedi $x < -20$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \langle -\infty, -20\rangle$.

26. 1.) 19.7907; 2.) 62.15. Udaljenost od 12.3 milja jednaka je udaljenosti od $1.609 \cdot 12.3 = 19.7907$ km. Udaljenost od 100 km jednaka je udaljenosti od $\frac{100}{1.609} \approx 62.150404 \approx 62.15$ km.

27. 1.) Vidjeti Sliku 4. Jedan pomak iz ishodišta O u bilo kojem smjeru (vodoravno ili okomito) jednak je udaljenosti od 25 metara. Da bismo došli iz ishodišta u točku T, moramo napraviti $150 : 25 = 6$ pomaka udesno i $75 : 25 = 3$ pomaka prema dolje. (Predznak – u prvoj koordinati označava pomake ulijevo, dok predznak – u drugoj koordinati označava pomake prema dolje.) Tako dobivamo Sliku 3.



Slika 4.

2.) 285. Najprije očitamo koordinate točke A. Da bismo iz ishodišta došli u točku A, moramo napraviti 3 pomaka ulijevo i 4 pomaka prema gore. Stoga su koordinate točke A jednake $(-3 \cdot 25, 4 \cdot 25)$, tj. $(-75, 100)$. Dakle, $A(-75, 100)$. Traženu udaljenost izračunat ćemo koristeći formulu za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini:

$$d = \sqrt{[150-(-75)]^2 + (-75-100)^2} = \sqrt{(150+75)^2 + (-175)^2} = \sqrt{225^2 + 175^2} = \sqrt{50\,625 + 30\,625}$$
$$d = \sqrt{81\,250} = \sqrt{625 \cdot 130} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{130} = 25 \cdot \sqrt{130} \approx 285.0438563 \approx 285 \text{ m}$$

3.) 115. Najprije očitamo koordinate točke B. Da bismo iz ishodišta došli u točku B, moramo napraviti 3 pomaka ulijevo i 3 pomaka prema dolje. Stoga su koordinate točke B jednake $(-3 \cdot 25,$

–3 · 25) = (–75, –75), tj. $B(-75, 75)$. Da bismo iz točke A došli u točku B, moramo se pomaknuti za točno 7 pomaka prema dolje, tj. za

$$|AB| = 7 \cdot 25 = 175 \text{ metara.}$$

Nadalje, da bismo došli iz točke B u točku T, moramo se pomaknuti za točno 9 pomaka udesno. Stoga je udaljenost od točke B do točke T jednaka

$$|BT| = 9 \cdot 25 = 225 \text{ metara.}$$

Dakle, tražena duljina puta približno je jednaka

$$d_1 = |AB| + |BT| - |AT| \approx 175 + 225 - 285 = 115 \text{ metara.}$$

28. Primijetimo da su postotci ostvarenih bodova grupirani u neprave razrede s nominalnim granicama. Stoga je svaki razred zapravo segment oblika [a, b], pa tako npr. 51 – 64 obuhvaća sve postotke u segmentu [51%, 64%] i sl.

1.) dobar(3). Najprije izračunamo koliko postotaka iznosi 41 bod u odnosu na ukupno mogućih 60 bodova:

$$p = \frac{41}{60} \cdot 100 = \frac{41}{3} \cdot 5 = \frac{205}{3} = 68.33[\%]$$

Broj 68.33 pripada segmentu [65, 79]. Stoga će Jakov dobiti ocjenu *dobar*(3) jer je svakom elementu segmenta [65, 79] pridružena ta ocjena.

2.) 53 boda. Najmanji broj bodova potreban za dobivanje ocjene *odličan*(5) iznosi 90% od ukupnoga broja bodova, tj. 90% od 60 bodova. Izračunajmo koliko iznosi 90% od 60:

$$P = \frac{90}{100} \cdot 60 = \frac{9}{10} \cdot 60 = 9 \cdot 6 = 54 \text{ (boda).}$$

Budući da je Marti nedostajao 1 bod za dobivanje ocjene *odličan*(5), slijedi da je ona na ispitu postigla ukupno

$$P_1 = P - 1 = 54 - 1 = 53 \text{ boda.}$$

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: PROSINAC 2010.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **D.** Svih šest zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 3 i 5, tj. $NZV(2, 3, 5) = 30$. Dobijemo redom:

$$\left(-\frac{18}{30}\right), \left(-\frac{50}{30}\right), \left(-\frac{45}{30}\right), \left(-\frac{20}{30}\right) \text{ i } \left(-\frac{15}{30}\right).$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino –15 strogo veći od –18.

2. **B.** Od 18. travnja 2010. u 09:15 sati do 20. travnja 2010. u 09:15 sati prošla su puna dva dana, odnosno $2 \cdot 24$ sata = 48 sati. Preostaje utvrditi koliko je vremena prošlo od 20. travnja 2010. u 09:15 sati do 20. travnja 2010. u podne, tj. 20. travnja 2010. u 12:00 sati. Od 09:15 sati do 11:15 sati prošla su puna 2 sata, a od 11:15 sati do 12:00 sati prošlo je 45 minuta. Stoga je traženo vrijeme jednako 48 sati + 2 sata + 45 minuta = 50 sati i 45 minuta.

3. **C.** Zaokružimo li zadani broj na jednu decimalu, dobit ćemo 3.5 (druga decimala 4 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prva decimala ostaje nepromijenjena). Zaokružimo li zadani broj na dvije decimale, dobit ćemo 3.54 (treća decimala 2 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prva i druga decimala ostaju nepromijenjene). Zaokružimo li zadani broj na tri decimale, dobit ćemo 3.543 (četvrta decimala 7 je strogo veća od 5, pa se pri zaokruživanju treća decimala povećava za 1). Napokon, zaokružimo li zadani broj na četiri decimale, dobit ćemo 3.5427 (peta decimala 3 je strogo manja od 5, pa pri zaokruživanju prve četiri decimale ostaju nepromijenjene). Stoga je netočna treća tvrdnja.

4. **C.** Neka su A točka u kojoj ljestve dodiruju zid, B točka u kojoj ljestve dodiruju podnožje, te C ortogonalna projekcija točke A na podnožje. Trokut ABC je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Duljina njegove hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je duljini ljestava, duljina njegove katete $\overline{BC}$ jednaka udaljenosti ljestava od zida, tj. $a = \left|\overline{BC}\right|$ = 80 cm = 0.8 m, a visina na kojoj ljestve dodiruju zid jednaka je duljini druge katete $\overline{AC}$ trokuta, tj. $b = \left|\overline{AC}\right|$ = 1.35 m. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{\left|\overline{AC}\right|^2 + \left|\overline{BC}\right|^2} = \sqrt{1.35^2 + 0.8^2} = \sqrt{1.8225 + 0.64} = \sqrt{2.4625} = \sqrt{\frac{24\ 625}{10\ 000}} = \sqrt{\frac{985}{400}} = \frac{1}{20} \cdot \sqrt{985}$$

$$\left|\overline{AC}\right| \approx 1.569235 \text{ m} \approx 1.57 \text{ m}$$

5. **B.** Primjenom formule za razliku kvadrata dobivamo::

$$4 \cdot p^2 - 9 = 2^2 \cdot p^2 - 3^2 = (2 \cdot p)^2 - 3^2 = (2 \cdot p - 3) \cdot (2 \cdot p + 3).$$

6. **A.** Neka je x traženi iznos**.** Obujam potrošenoga plina i cijena potrošenoga plina su upravno razmjerne veličine. Stoga možemo postaviti sljedeću shemu:

obujam plina [m^3]	cijena plina [kn]
$\uparrow$ 33	$\uparrow$ 80.32
127	x

(Strelice naznačuju da se radi o upravno razmjernim veličinama.) Iz zadanih podataka možemo postaviti razmjer:

$$x : 80.32 = 127 : 33.$$

Odatle je

$$33 \cdot x = 127 \cdot 80.32,$$

odnosno

$$33 \cdot x = 10\,200.64$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 33 dobit ćemo $x = 309.11$.

7. **D.** Iz podatka $a < 0$ zaključujemo da je pripadna linearna funkcija (čiji je graf zadani pravac) strogo padajuća, tj. graf ide u smjeru „sjeverozapad – jugoistok“. Iz podatka $b > 0$ zaključujemo da traženi graf siječe os ordinata, tj. os y iznad ishodišta pravokutnoga koordinatnoga sustava (točnije, u točki čija je ordinata strogo pozitivan realan broj). Jedini od četiriju ponuđenih grafova koji ima oba navedena svojstva je posljednji graf.

8. **A.** Imamo redom:

$$a \cdot d - b \cdot c = 3 \cdot (-6) - (-4) \cdot (-5) = -18 - 20 = -38.$$

9. **A.** Iz podatka da je mjera jednoga kuta trokuta 101° slijedi da je zbroj preostalih dvaju kutova toga trokuta jednak $180° - 101° = 79°$. Označimo te kutove s α i β. Iz podatka da se mjere tih kutova odnose kao 2 : 5 slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je $\alpha = 2 \cdot k$ i $\beta = 5 \cdot k$. Budući da zbroj $\alpha + \beta$ mora biti jednak 79°, dobivamo:

$$2 \cdot k + 5 \cdot k = 79°,$$
$$7 \cdot k = 79°.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe sa 7 dobivamo $k = \frac{79}{7}$. Stoga je mjera manjega kuta

$$\alpha = 2 \cdot k = 2 \cdot \frac{79}{7} = \frac{158}{7} \approx 22.571428571° \approx 22°34'17''$$

10. **C**. Za $x \neq 0$ i $y \neq 1$ imamo redom:

$$\frac{x \cdot y}{x \cdot y - x} = \frac{x \cdot y}{x \cdot (y-1)} = \frac{y}{y-1}$$

11. **A**. Najmanja vrijednost pripadne kvadratne funkcije jednaka je ordinati tjemena parabole (a postiže se za vrijednost varijable x jednaku apscisi tjemena parabole). Iz grafa možemo očitati da je tjeme parabole $T(2, -3)$, pa je tražena vrijednost jednaka -3.

12. **D.** Neka je x broj učenika 4.A razreda, a y broj učenika 4.B razreda. Iz podatka da razred 4.B ima jednoga učenika manje od 4.A razreda slijedi:

$$y = x - 1.$$

Podijele li se 224 olovke na x učenika 4.A razreda tako da svaki učenik 4.A. razreda dobije isti broj olovaka i da sve olovke budu raspodijeljene, slijedi da je jedan učenik 4.A razreda dobio

$n_1 = \frac{224}{x}$ olovaka. U 4.B razredu podijeljeno je ukupno 224 – 8 = 216 olovaka na y učenika tako da je svaki učenik dobio isti broj olovaka. Stoga je jedan učenik 4.B razreda dobio $n_2 = \frac{216}{y}$ olovaka. Iz podatka da je svaki učenik 4.A razreda dobio jednako mnogo olovaka kao i svaki učenik 4.B razreda zaključujemo da je $n_1 = n_2$, odnosno

$$\frac{224}{x} = \frac{216}{y},$$

odnosno invertiranjem lijeve i desne strane te jednakosti

$$\frac{x}{224} = \frac{y}{216}.$$

Odatle množenjem s 224 dobivamo:

$$x = \frac{224}{216} \cdot y = \frac{28}{27} \cdot y\,.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$y = x - 1$$
$$x = \frac{28}{27} \cdot y$$

Uvrstimo li drugu jednadžbu sustava u prvu jednadžbu, dobijemo:

$$y = \frac{28}{27} \cdot y - 1 \quad / \cdot 27$$
$$27 \cdot y = 28 \cdot y - 27$$
$$27 \cdot y - 28 \cdot y = -27$$
$$(-1) \cdot y = -27$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $y = 27$, i to je traženi broj.

13. B. Osjenčani dio kvadrata je usporedniik (paralelogram) kojemu je duljina jedne stranice jednaka polovici duljini stranice kvadrata, a duljina visine na tu stranicu jednaka duljini stranice kvadrata. Stoga je površina toga usporednika jednaka:

$$P = a_1 \cdot v_{a_1} = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a^2.$$

14. C. Iz zadanoga razmjera izrazimo veličinu S. Imamo redom:

$$100 \cdot (S + g) = S \cdot (100 + p),$$
$$100 \cdot S + 100 \cdot g = 100 \cdot S + p \cdot S$$
$$100 \cdot S - 100 \cdot S - p \cdot S = (-100) \cdot g$$
$$-p \cdot S = (-100) \cdot g.$$

Odatle dijeljenjem cijele jednakosti s $(-p)$ dobivamo:

$$S = \frac{100}{p} \cdot g \,.$$

U ovu jednakost uvrstimo p = 2.65 i g = 864.96, pa dobijemo:

$$S = \frac{100}{2.65} \cdot 864.96 = \frac{86\,496}{2.65} = 32\,640\,.$$

15. A. Na dan igranja utakmice za 600 kn može se kupiti ukupno $n_1 = \frac{600}{40} = 15$ ulaznica. Za isti se iznos u pretprodaji može kupiti 5 ulaznica više, tj. ukupno 15 + 5 = 20 ulaznica, pa je cijena jedne ulaznice u pretprodaji $c_1 = \frac{600}{20} = 30$ kuna. Dakle, cijena jedne ulaznice na dan igranja utakmice je za $\Delta c = c - c_1$ = 40 kn – 30 kn = 10 kn veća nego u pretprodaji.

16. A. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&(2 \cdot x - 1) \cdot (x - 3) \cdot (x + 2) = \\
&= (2 \cdot x^2 - x - 6 \cdot x + 3) \cdot (x + 2) = \\
&= (2 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 3) \cdot (x + 2) = \\
&= 2 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 6 = \\
&= 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 11 \cdot x + 6.
\end{aligned}$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 14. Iz osnovne formule postotnoga računa $P = \frac{p}{100} \cdot S$ množenjem sa 100 dobivamo:

$$100 \cdot P = p \cdot S \quad / : S$$

$$p = \frac{100 \cdot P}{S}$$

U ovu jednakost uvrstimo P = postotni iznos = 71.54 i S = 511, pa dobijemo:

$$p = \frac{100 \cdot 71.54}{511} = \frac{7\,154}{511} = 14\,[\%].$$

18. $\frac{7}{4}$. Pomnožimo drugu jednadžbu s (–2) i pribrojimo tako dobivenu jednadžbu prvoj jednadžbi sustava. Dobivamo:

$$\begin{gathered}
0 = 3 - 4 \cdot y - 10 + 8 \cdot y \\
4 \cdot y - 8 \cdot y = 3 - 10 \\
(-4) \cdot y = -7.
\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–4) slijedi $y = \frac{7}{4}$.

19. 42; 129. Pola smjese kolača sadrži $\frac{1}{2} \cdot 28$ = 14 dag šećera i $\frac{1}{2} \cdot 86$ = 43 dag brašna. Stoga smjesa i pol sadrži ukupno 28 dag + 14 dag = 42 dag šećera i 86 + 43 = 129 dag brašna.

20. $\mathbf{2 \cdot S - b}$**.** Pomnožimo zadanu jednakost s 2, pa dobivamo redom:

$$2 \cdot S = a + b$$
$$a = 2 \cdot S - b.$$

21. Vidjeti Sliku 1. Graf zadane funkcije je parabola. Za crtanje bilo koje parabole dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih triju njezinih točaka, od kojih točno jedna treba biti tjeme parabole. Iz zadane funkcije očitamo vrijednosti pripadnih parametara:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 2,$$

pa računamo koordinate tjemena parabole:

$$T\left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right) \Rightarrow T\left(-\frac{0}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 2 - 0^2}{4 \cdot 1}\right) \Rightarrow T\left(0,\ \frac{8}{4}\right) \Rightarrow T(0,\ 2).$$

Nadalje, primijetimo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi stroga nejednakost:

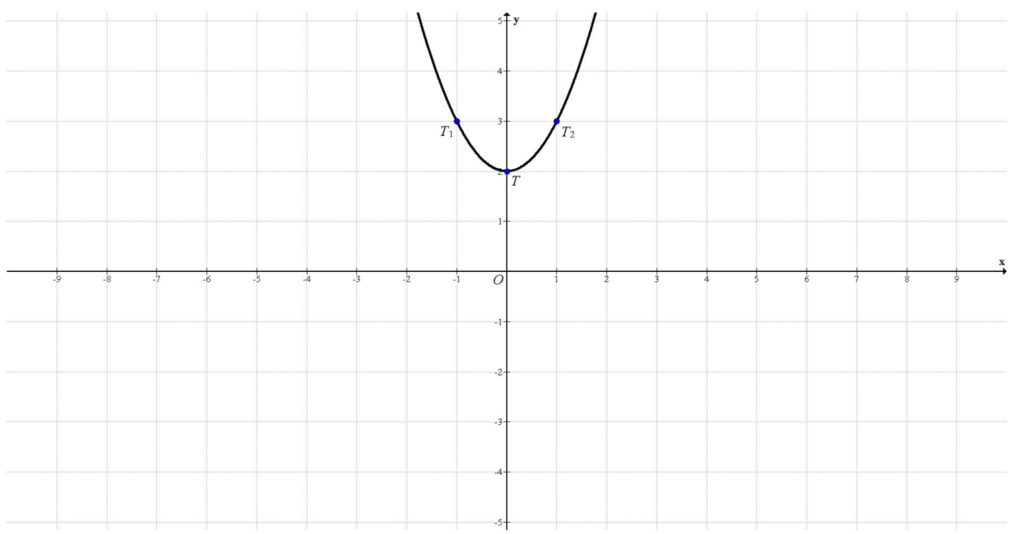
$$x^2 + 2 > 0,$$

što znači da funkcija f nema realnih nultočaka, tj. da njezin graf ne siječe os x. Sjecište toga grafa s osi y već smo odredili: to je tjeme parabole, tj. točka $T(0, 2)$.

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f za dvije različite vrijednosti varijable x. Radi lakšega crtanja, najbolje je odabrati točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo manja od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole) i točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo veća od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole). Uzmimo npr. $x = \pm 1$, pa dobijemo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 2 = 1 + 2 = 3,$$
$$f(1) = 1^2 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

Tako dobivamo još dvije točke parabole: $T_1(-1, 3)$ i $T_2(1, 3)$. Traženi graf prikazan je na Slici 5.



Slika 5.

22. $x_1 = \sqrt{5} + 1,\ x_2 = \sqrt{5} - 1$. Imamo redom:

$$x_{1,2}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm\sqrt{\left(2\cdot\sqrt{5}\right)^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm\sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2-16}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm\sqrt{4\cdot5-16}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm\sqrt{20-16}}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{2\cdot\sqrt{5}\pm2}{2}\Rightarrow x_1=\frac{2\cdot\sqrt{5}+2}{2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}+1\right)}{2}=\sqrt{5}+1,\ x_2=\frac{2\cdot\sqrt{5}-2}{2}=\frac{2\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}=\sqrt{5}-1$$

23. (približno) 0.6876; 32.3373. Novčana vrijednost iskazana u eurima, novčana vrijednost iskazana u švicarskim francima i novčana vrijednosti iskazana u britanskim funtama su upravno razmjerne veličine. U rješenju zadatka primijenit ćemo verižni račun. Za izračun prvoga nepoznatog iznosa (u prvomu stupcu tablice) formiramo verižnik:

x GBP	1 €
1 €	1.5462 CHF
50 CHF	22.235157 GBP

Ovime je verižnik zatvoren, pa vrijednost nepoznanice x izračunamo kao količnik umnoška svih vrijednosti iz drugoga stupca verižnika i umnoška svih vrijednosti iz prvoga stupca verižnika (pri čemu vrijednosti jednake 1 zanemarujemo):

$$x=\frac{1.5462\cdot22.235157}{50}=0.687599995068\approx0.6876\,.$$

Nepoznati iznos u drugomu stupcu tablice (označimo ga s y) izračunat ćemo iz razmjera:

$$y : 50 = 1 : 1.5462.$$

Iz toga razmjera slijedi:

$$1.5462\cdot y=50\cdot1,$$

odnosno

$$1.5462\cdot y=50.$$

Odatle dijeljenjem jednadžbe s 1.5462 dobivamo $y = 32.337343 \approx 32.3373$.

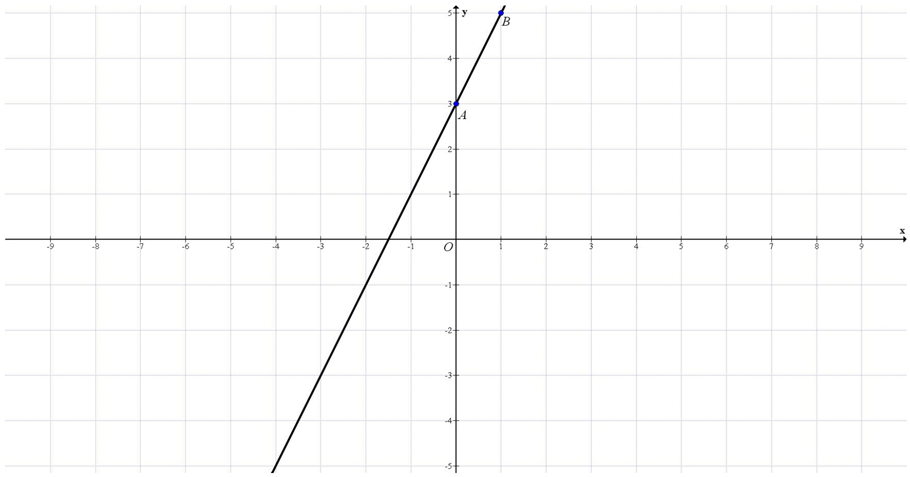
24. Vidjeti Sliku 6. Bilo koji pravac u ravnini jednoznačno je određen zadavanjem svojih bilo kojih dviju različitih točaka. Iz zadane jednadžbe pravca možemo očitati odsječak na osi y:

$$l=3$$

pa pravac prolazi točkom $A(0, 3)$. Još jednu točku pravca dobit ćemo uzmemo li npr. $x = 1$ i izračunamo pripadnu vrijednost varijable y:

$$y=2\cdot1+3=2+3=5.$$

Dakle, pravac prolazi i točkom $B(1, 5)$. Ucrtamo obje navedene točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 6.

Nadalje, pravac usporedan sa zadanim pravcem ima isti koeficijent smjera kao i zadani pravac, tj. $k = 2$. Preostaje napisati jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera $k = 3$ i prolazi točkom T:

$$p \ldots y - (-2) = 2 \cdot (x - 0),$$
$$p \ldots y = 2 \cdot x + (-2),$$
$$p \ldots \mathbf{y = 2 \cdot x - 2.}$$

25. 1.) $\frac{4}{11}$. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 6. Dobivamo:

$$3 \cdot (2 - x) = 2 \cdot (4 \cdot x + 1),$$
$$6 - 3 \cdot x = 8 \cdot x + 2,$$
$$-3 \cdot x - 8 \cdot x = 2 - 6$$
$$(-11) \cdot x = -4$$

Odatle dijeljenjem s (–11) slijedi $x = \frac{4}{11}$

2.) $\mathbf{x > \frac{19}{4}}$ **ili** $x \in \left\langle \frac{19}{4}, +\infty \right\rangle$. Imamo redom:

$$5 \cdot x + 15 + 2 \cdot x < 11 \cdot x - 4,$$
$$5 \cdot x + 2 \cdot x - 11 \cdot x < -4 - 15,$$
$$(-4) \cdot x < -19$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–4), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz < u >, slijedi $x > \frac{19}{4}$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \left\langle \frac{19}{4}, +\infty \right\rangle$.

26. 1.) 56.75; 2.) 14.97797 ≈ 14.98. Obujam od 12.5 galona jednak je obujmu od $4.54 \cdot 12.5 = 56.75$ litara. Obujam od 68 litara jednak je obujmu od $\frac{68}{4.54} \approx 14.977973 \approx 14.98$ galona.

27. 1.) 0.8. Iz grafa očitamo: $f(1.2) = 0.8$.

2.) 102. Iz grafa vidimo da se tijelo ukupno gibalo 1.7 sati, odnosno $1.7 \cdot 60 = 102$ minute.

3.) 0.6. Tijelo se počelo gibati jednolikom brzinom 0.4 sata nakon početka gibanja i prestalo se gibati jednolikom brzinom 1 sat nakon početka gibanja (te se tada ponovno počelo gibati jednoliko ubrzano). Stoga je traženo vrijeme t = 1 sat – 0.4 sata = 0.6 sati.

28. Sastanku je nazočilo ukupno 24 + 14 = 38 učenika, što čini 76% ukupnoga broja članova vijeća. Označimo li s x ukupan broj članova vijeća, zaključujemo da mora vrijediti jednakost:

$$\frac{76}{100} \cdot x = 40.$$

Odatle slijedi

$$x = 38 : \frac{76}{100} = 38 \cdot \frac{100}{76} = \frac{3\,800}{76} = 50.$$

Dakle, učeničko vijeće u punom sastavu broji ukupno 50 članova.

1.) 48. Tražimo koliko postotaka iznosi 24 u odnosu na 50. Analogno kao u zadatku **17.** dobijemo:

$$p = \frac{24}{50} \cdot 100 = \frac{2\,400}{50} = 48[\%]$$

Dakle, za prijedlog je glasovalo 48% od ukupnoga broja članova vijeća.

2.) 25. Najmanji broj glasova potreban za izglasavanje prijedloga iznosi 65% od ukupnoga broja nazočnih članova, tj. 65% od 38. Izračunajmo koliko iznosi 65% od 38:

$$P = \frac{65}{100} \cdot 38 = \frac{13}{20} \cdot 38 = \frac{494}{20} = \frac{247}{10} = 24.7.$$

Budući da broj glasova, prema prirodi zadatka, nužno mora biti prirodan broj, dobiveni postotni iznos zaokružujemo na prvi veći prirodan broj, tj. na 25. (Ovo zaokruživanje nema veze s prvom decimalom iza decimalne točke jer se u zadatku zahtijeva da postotni udio broja glasova za prihvaćanje prijedloga u odnosu na ukupan broj nazočnih članova bude strogo veći od 65%, pa se uvijek zaokružuje naviše). Dakle, traženi broj članova je 25.

visoka poslovna škola par

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: SVIBANJ 2011.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **D.** Koristeći kalkultator izračunamo:

$$\pi^3 - 3^3 \approx 31.006 - 27 = 4.006.$$

Taj broj pripada intervalu $[3.5, 5\rangle$ jer tom intervalu pripadaju svi realni brojevi jednaki ili veći od 3.5, a strogo manji od 5.

2. **B.** Imamo redom:

$$2.7\% = \frac{2.7}{100} = \frac{27}{1000} = 0.027\,.$$

3. **C.** Iz zadanoga razmjera slijedi

$$7 \cdot a = 5 \cdot b,$$

odnosno

$$a = \frac{5}{7} \cdot b\,.$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $b = 9$, dobit ćemo

$$a = \frac{5}{7} \cdot 9 = \frac{45}{7}.$$

4. **A.** Označimo traženi broj s x. Polovica vrijednosti broja x jednaka je $\frac{1}{2} \cdot x$, a broj dvostruko veći od traženoga broja jednak je $2 \cdot x$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$x + \frac{1}{2} \cdot x = 2 \cdot x - 3\,.$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu s 2, dobit ćemo

$$2 \cdot x + x = 4 \cdot x - 6,$$

odnosno

$$2 \cdot x + x - 4 \cdot x = -6,$$

odnosno

$$(-1) \cdot x = -6.$$

Odatle je $x = 6$.

5. **B.** Imamo:

$$f(1) = 10^{2 \cdot 1 + 1} = 10^{2+1} = 10^3 = 1\ 000.$$

6. **B.** Izračunajmo najprije iznos mjesečnih režija. On iznosi 24% od obiteljskih primanja, odnosno

$$\frac{24}{100}\cdot 8\ 750 = 2\ 100 \text{ kuna.}$$

Stoga je traženi iznos jednak

$$8\ 750 - (2\ 100 + 6\ 200) = 8\ 750 - 8\ 300 = 450 \text{ kuna.}$$

7. **C.** Koristeći identitet $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ i formulu za razliku kvadrata dobivamo:

$$\left(\sqrt{3}-1\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)^2 = \left[\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)\right]^2 = \left[\left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2\right]^2 = (3-1)^2 = 2^2 = 4\,.$$

8. **A.** Pomnožimo drugu jednadžbu s (–10). Dobivamo:

$$(-10)\cdot y - 20\cdot x - 70 = 0.$$

Zbrojimo dobivenu jednadžbu s prvom jednadžbom sustava, pa dobijemo

$$(-22)\cdot x - 66 = 0,$$

odnosno

$$(-22)\cdot x = 66.$$

Odatle je $x = -3$.

9. **C.** Ako nakon utovara teret tvori 60% ukupne mase vozila s teretom, onda masa vozila bez tereta tvori 100% – 60% = 40% ukupne mase vozila s teretom. Označimo li s m masu vozila s teretom, onda prema uvjetima zadatka vrijedi jednakost:

$$\frac{40}{100}\cdot m = 3\ 000\,.$$

Odavde je

$$m = 3\ 000 : \frac{40}{100} = 3\ 000\cdot\frac{100}{40} = 7\ 500 \text{ kg.}$$

Stoga ukupna masa tereta iznosi:

$$m_t = 7\ 500 - 3\ 000 = 4\ 500 \text{ kg.}$$

Nakon što se istovari trećina tereta, u vozilu preostanu dvije trećine tereta. Masa te dvije trećine tereta iznosi:

$$m_{ot} = \frac{2}{3}\cdot 4\ 500 = 3\ 000 \text{ kg,}$$

pa je ukupna masa vozila s preostalim teretom jednaka:

$$m_{uk} = 3\ 000 + 3\ 000 = 6\ 000 \text{ kg.}$$

Tako dobivamo da je traženi postotak jednak:

$$p = \frac{m_{ot}}{m_{uk}} \cdot 100 = \frac{3\,000}{6\,000} \cdot 100 = 50,$$

tj. $p = 50\%$.

10. D. Iz zadane jednakosti slijedi

$$r \cdot \pi \cdot s = P - B.$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane s $r \cdot \pi$ dobijemo

$$s = \frac{P - B}{r \cdot \pi}$$

11. B. Iz zadanoga grafa vidimo daje tjeme parabole $T = (3, 2)$. Stoga pripadna kvadratna funkcija postiže najveću vrijednost 2 za $x = 3$.

12. A. Primjenom formule za kvadrat razlike dobivamo:

$$(a^5 - 2)^2 = (a^5)^2 - 2 \cdot a^5 \cdot 2 + 2^2 = a^{5 \cdot 2} - \; - 4 \cdot a^5 + 4 = a^{10} - 4 \cdot a^5 + 4.$$

13. C. Označimo traženi broj godina s x. Za x godina otac će biti star $52 + x$ godina, a sinovi $24 + x$ i $18 + x$ godina. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$52 + x = (24 + x) + (18 + x).$$

Odatle slijedi

$$52 + x = 24 + x + 18 + x,$$

odnosno

$$x - x - x = 24 + 18 - 52,$$

odnosno

$$-x = -10,$$

Odatle je $x = 10$. Doista, za 10 godina otac će biti star $52 + 10 = 62$ godine, a sinovi $24 + 10 = 34$ godine i $18 + 10 = 28$ godina, pa će otac doista biti star koliko i oba njegova sina zajedno ($62 = 34 + 28$).

14. D. Bez izračuna bilo kojega od ostalih elemenata odmah vidimo da je duljina D prostorne dijagonale kvadra jednaka duljini brida AB, što je nemoguće jer je kod „nedegeneriranoga" kvadra duljina prostorne dijagonale nužno strogo veća od duljine bilo kojega brida kvadra. Stoga je veličina D pogrješno izračunana. Radi provjere, izračunajmo sve navedene veličine za $a = 12$ cm, $b = 4$ cm i $c = 3$ cm:

$O = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (12 \cdot 4 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 2 \cdot (48 + 36 + 12) = 2 \cdot 96 = 192 \text{ cm}^2$;
$V = a \cdot b \cdot c = 12 \cdot 4 \cdot 3 = 144 \text{ cm}^3$;
$d = \sqrt{|BC|^2 + |CG|^2} = \sqrt{|BC|^2 + |AE|^2} = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$;
$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{144 + 16 + 9} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$.

15. A. Primijetimo da vrijedi identitet

$$x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1) \cdot (x + 1).$$

Prema pretpostavci je $x \neq \pm 1$, pa je zadani izraz jednak:

$$\frac{2\cdot(x-2)}{x^2-1}-\frac{3}{x+1}=\frac{2\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{3}{x+1}=\frac{2\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{3\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{2\cdot(x-2)-3\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{2\cdot x-4-3\cdot x+3}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-x-1}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{(-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-1}{x-1}=\frac{(-1)\cdot(-1)}{(-1)\cdot(x-1)}=\frac{1}{-x+1}=\frac{1}{1-x}$$

16. C. Neka je a duljina stranice kvadrata. Prema uvjetu zadatka vrijedi $|CE| = |BC| = a$. To znači da je trokut BCE jednakokračan. Kut kod vrha C toga trokuta jednak je

$$\angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 90° + 60° = 150°.$$

Budući da je trokut BCE jednakokračan, kut kod vrha E jednak je kutu kod vrha B jer se nasuprot jednakim stranicama trokuta nalaze jednaki kutovi. Označimo li $x = \angle BEC$, onda iz

$$\angle BEC + \angle BCE + \angle EBC = 180°$$

i

$$\angle BEC = \angle EBC$$

slijedi

$$x + 150° + x = 180°,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 180° - 150°,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 30°.$$

Odatle je $x = 15°$. Tako iz jednakosti

$$x + \alpha = \angle DEC = 60°$$

uvrštavanjem $x = 15$ dobijemo:

$$\alpha = 60° - x = 60° - 15° = 45°.$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. $-\frac{3}{7}$. Imamo redom:

$$\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-2.4\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-\frac{24}{10}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3}{7}-\frac{12}{5}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{3\cdot5-12\cdot7}{35}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(\frac{15-84}{35}\right)=\frac{5}{23}\cdot\left(-\frac{69}{35}\right)=$$

$$=-\frac{5\cdot69}{23\cdot35}=-\frac{1\cdot3}{1\cdot7}=-\frac{3}{7}$$

18. 2.40 kn. Budući da je 28 kn i 40 lipa = 28.40 kn, cijena svih 9 bilježnica iznosi 50 – 28.4 = 21.6 kn. Stoga je cijena jedne bilježnice 21.6 : 9 = 2.40 kn = 2 kn 40 lp.

19. 12 sati i 50 minuta. Do 19. svibnja u 20 sati preostalo je 50 minuta. Do završetka dana (19. svibnja) preostala su 4 sata. Stoga je traženo vrijeme

$$t = 50 \text{ minuta} + 4 \text{ sata} + 8 \text{ sati} = 12 \text{ sati i } 50 \text{ minuta}.$$

20. 72 putnika. Označimo ukupan broj popunjenih mjesta s x, a ukupan broj praznih mjesta s y. Budući da u zrakoplovu ima ukupno 108 mjesta, vrijedi jednakost

$$x + y = 108.$$

Iz uvjeta da na svaka dva popunjena mjesta dolazi po jedno prazno mjesto proizlazi razmjer

$$x : y = 2 : 1.$$

Odatle je

$$x \cdot 1 = 2 \cdot y,$$

odnosno

$$y = \frac{1}{2} \cdot x .$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x + y &= 108 \\ y &= \frac{1}{2} \cdot x \end{aligned}$$

Njega je najbrže riješiti metodom zamjene (supstitucije), tj. tako da se u prvu jednadžbu sustava uvrsti druga. Dobiva se:

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} \cdot x &= 108 \,/ \cdot 2 \\ 2 \cdot x + x &= 216 \\ 3 \cdot x &= 216 \\ x &= \frac{216}{3} = 72 \end{aligned}$$

Dakle, u zrakoplovu ima ukupno 72 putnika (i 36 praznih mjesta).

21. 8. Označimo brojnik polaznoga razlomka s x. Tada je nazivnik razlomka $x + 40$. Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost:

$$\frac{x}{x+40} = \frac{2}{7} .$$

Množenjem ove jednadžbe s $7 \cdot (x + 40)$ dobijemo jednadžbu

$$7 \cdot x = 2 \cdot (x + 40),$$

odnosno

$$7 \cdot x = 2 \cdot x + 80,$$

odnosno

$$7 \cdot x - 2 \cdot x = 80,$$

odnosno

$$5 \cdot x = 80.$$

Otuda je $x = 16$. Dakle, polazni razlomak je jednak

$$\frac{16}{16+40} = \frac{16}{56}.$$

Najveći zajednički djelitelj njegova brojnika i nazivnika je $NZD(16, 56) = 8$ i s tim brojem valja skratiti polazni razlomak da se dobije razlomak $\frac{2}{7}$.

22. $x_1 = \sqrt{7}+1,\ x_2 = \sqrt{7}-1$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm \sqrt{\left(2\cdot\sqrt{7}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1} = \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm \sqrt{2^2\cdot\left(\sqrt{7}\right)^2 - 24}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm \sqrt{4\cdot 7 - 24}}{2} =$$
$$= \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm \sqrt{28-24}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{7} \pm 2}{2} = \frac{2\cdot\sqrt{7}}{2} \pm \frac{2}{2} = \sqrt{7} \pm 1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{7}+1,\ x_2 = \sqrt{7}-1$$

23. Vidjeti Sliku 7. Traženi pravac nacrtan je zelenom bojom. Njegova je jednadžba (zapisana u eksplicitnom obliku) $y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}$. Zadatak se može riješiti na barem dva različita načina:

I. Konstrukcijski: U priloženi koordinatni sustav ucrtamo točke A, B i M. Povučemo pravac kroz točke A i B. Potom konstruiramo pravac kroz točku M usporedan s pravcem kroz točke A i B (lakši i brži način).

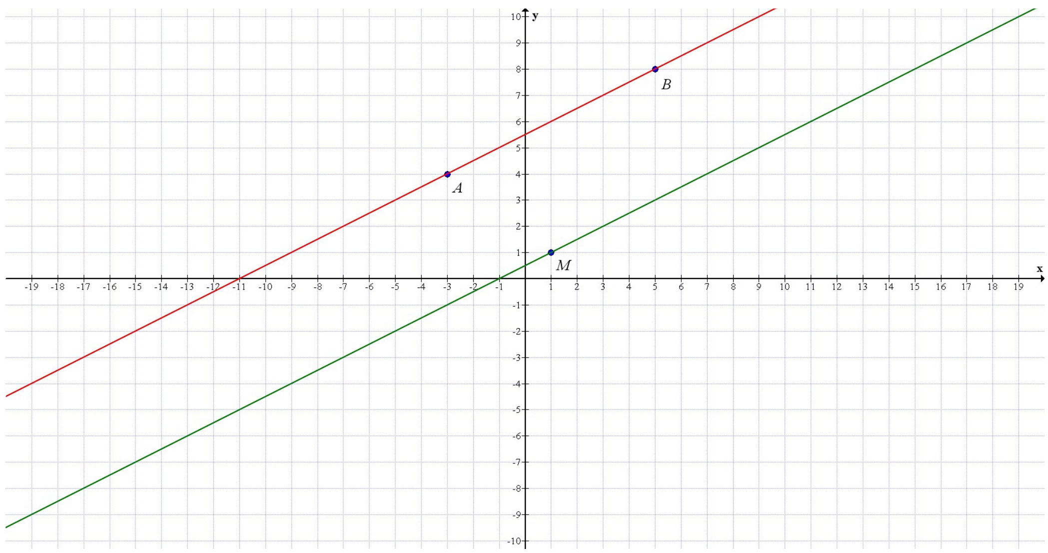
II. Analitički: Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B jednak je:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{8-4}{5-(-3)} = \frac{4}{5+3} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$

Budući da je traženi pravac p usporedan s pravcem kroz točke A i B, i njegov je koeficijent smjera jednak $k = \frac{1}{2}$. Koristeći formulu za jednadžbu pravca kojemu je zadan koeficijent smjera i jedna točka dobivamo jednadžbu pravca p:

$$p \ldots y - 1 = \frac{1}{2}\cdot(x-1) \Rightarrow p \ldots y = \frac{1}{2}\cdot x - \frac{1}{2} + 1 \Rightarrow p \ldots y = \frac{1}{2}\cdot x + \frac{1}{2}.$$

Osim točke M, taj pravac prolazi npr. točkom $C(-1, 0)$. (Točku C dobijemo tako da u jednadžbu pravca p uvrstimo $x = -1$ i izračunamo $y = \frac{1}{2} \cdot (-1) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.) Ucrtamo točke M i C u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 7.

24. Svota iskazana u dolarima i svota iskazana u kunama su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti k = 5.7256. Stoga 352.74 USD vrijedi kao i 352.74 · 5.7256 = = 2 019.648144 kn, a 1 000 kuna vrijedi kao i $\frac{1\,000}{5.7256}$ = 174.65418 USD. Izračunane vrijednosti moramo zaokružiti na dvije decimale (jer je najmanja novčana jedinica manja od 1 USD jednaka 1 cent = $\frac{1}{100}$ USD i analogno za HRK), pa konačno dobijemo:

352.74 USD = **2 019.65 kn**
174.65 USD = 1 000 kn.

25. 1.) $\frac{6}{11}$. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$6 - 3 \cdot x = 8 \cdot x,$$

odnosno

$$(-3) \cdot x - 8 \cdot x = -6,$$

odnosno

$$(-11) \cdot x = -6.$$

Odatle je $x = \frac{6}{11}$.

2.) $x \le \frac{28}{5}$ ili $x \in \left\langle -\infty, \frac{28}{5} \right]$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se u njoj pojavljuju, tj. s $NZV(5, 4) = 20$. Dobivamo:

$$4 \cdot (5 \cdot x - 2) - 3 \cdot x \cdot 5 \le 1 \cdot 20,$$

odnosno

$$20 \cdot x - 8 - 15 \cdot x \le 20,$$

odnosno

$$5 \cdot x \le 28.$$

Odatle je $x \le \frac{28}{5}$ ili, ekvivalentno, $x \in \left\langle -\infty, \frac{28}{5} \right]$.

26. 1.) 101.6. U zadanu formulu uvrstimo $x = 40$. Dobivamo:

$$y = 2.54 \cdot 40 = 101.6.$$

Dakle, 40 incha iznosi 101.6 cm.

2.) 0.3937. U zadanu formulu uvrstimo $y = 1$. Dobivamo linearnu jednadžbu

$$1 = 2.54 \cdot x$$

čije rješenje je

$$x = \frac{1}{2.54} = 0.3937.$$

27. 1.) (–10, –20). Do točke J dolazimo iz točke (0, 0) ili koračajući 10 metara ulijevo, pa 20 metara nadolje ili 20 metara nadolje, pa 20 metara ulijevo. Kretanje prema gore ili udesno bilježimo kao kretanje u pozitivnom smjeru (s predznakom +), a kretanje prema dolje ili ulijevo bilježimo kao kretanje u negativnom smjeru (s predznakom –). Pri pisanju koordinata najprije pišemo koliko smo metara išli ulijevo ili udesno, a potom koliko smo metara išli prema gore ili dolje. Stoga su tražene koordinate točke J jednake $J(–10, 20)$.

2.) $10 \cdot \sqrt{26} \approx 50.9902$. Trebamo izračunati duljinu dužine $\overline{NJ}$. Povucimo kroz točku J pravac usporedan s osi y, a kroz točku N pravac usporedan s osi x. Ti se pravci sijeku u točki $S(–10, 30)$. Trokut NSJ je pravokutan trokut s pravim kutom u točki S, te hipotenuzom $\overline{NJ}$. Duljine kateta toga trokuta su $|NS| = 10$ metara i $|SJ| = 50$ metara. Primjenom Pitagorina poučka na trokut NSJ dobivamo:

$$|NJ| = \sqrt{|NS|^2 + |SJ|^2} = \sqrt{10^2 + 50^2} = \sqrt{100 + 2\ 500} = \sqrt{2\ 600} = \sqrt{100 \cdot 26} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{26} = 10 \cdot \sqrt{26}$$

Stoga je tražena duljina jednaka $10 \cdot \sqrt{26} \approx 50.9902$ m.

3.) 1000. Koristimo iste oznake kao u podzadatku **2.** Površina trokuta JMN jednaka je polovici umnoška duljine stranice MN i duljine visine na tu stranicu povučene iz vrha J. Duljina stranice

MN jednaka je 40 metara, dok je duljina visine na tu stranicu jednaka duljini dužine *JS*, tj. 50 metara. Stoga je tražena površina jednaka

$$P_{JMN} = \frac{|MN| \cdot |JS|}{2} = \frac{50 \cdot 40}{2} = 1\,000 \text{ m}^2.$$

28. **1.) 600.** Najveći mogući broj bodova dobije se ispravnim odgovaranjem na svih 40 pitanja. Budući da se ispravnim odgovorom na jedno pitanje dobije 15 bodova, traženi broj jednak je $40 \cdot 15 = 600$.

2.) 24. Označimo s x broj pitanja na koja je učenik odgovorio točno, a s y broj pitanja na koja je učenik odgovorio netočno. Budući da je učenik odgovorio na svih 40 pitanja, vrijedi jednakost

$$x + y = 40.$$

Ukupan broj bodova postignutih točnim odgovorima jednak je $15 \cdot x$, dok je ukupan broj negativnih bodova postignutih netočnim odgovorima jednak $5 \cdot y$. Budući da je ukupan broj postignutih bodova jednak 280, mora vrijediti jednakost

$$15 \cdot x - 5 \cdot y = 280,$$

odnosno nakon dijeljenja lijeve i desne strane jednakosti s 5,

$$3 \cdot x - y = 56.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x + y = 40,$$
$$3 \cdot x - y = 56.$$

Zbrajanjem obiju jednadžbi dobivamo jednadžbu:

$$4 \cdot x = 96,$$

a odatle je $x = 24$. Dakle, učenik je točno odgovorio na 24 pitanja (a netočno na preostalih $40 - 24 = 16$ pitanja).

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: KOLOVOZ 2011.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Zadani broj očito nije niti prirodan broj niti cijeli broj. Budući da je

$$3.12 = \frac{312}{100} = \frac{78}{25},$$

zadani broj možemo zapisati u obliku razlomka kojemu je brojnik cijeli broj (78), a razlomak prirodan broj (25). Dakle, zadani broj je racionalan i pripada skupu racionalnih brojeva **Q**.

2. **B.** Imamo redom:

$$\frac{2}{7} + \frac{5}{7} : \frac{5}{14} = \frac{2}{7} + \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{2}{7} + \frac{5 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{2}{7} + 2 = \frac{2 + 2 \cdot 7}{7} = \frac{2 + 14}{7} = \frac{16}{7}.$$

3. **C.** Preračunajmo najprije 1 stopu u cm. Duljina od 1 metra jednaka je duljini od 100 cm, pa je duljina od 0.3048 m jednaka duljini od

$$0.3048 \cdot 100 = 30.48 \text{ cm}.$$

Stoga je duljina od 1 stope jednaka duljini od 30.48 cm. Odatle slijedi da se duljina iskazana u cm preračunava u stope tako da se njezin mjerni broj podijeli s 30.48. Dakle, Srećko je visok

$$\frac{187}{30.48} = 6.13517 \text{ stopa},$$

odnosno, zaokruženo na četiri decimale, 6.1352 stopa (pri zaokruživanju četvrtu decimalu moramo povećati za 1 jer je peta decimala 7 jednaka ili veća od 5.)

4. **A.** Mjeru kuta $\angle ADE$ dobit ćemo tako da od 180° oduzmemo mjeru kuta $\angle EDB$ jer su ti kutovi suplementni. Prema tome,

$$\angle ADE = 180° - 122° = 58°.$$

Kutovi $\angle AED$ i $\angle ACB$ su sukladni (kutovi koje isti pravac – u ovom slučaju, pravac AB – zatvara s usporednim pravcima – u ovom slučaju, pravcima DE i CB – uvijek su sukladni), pa imaju jednake mjere. Dakle,

$$\angle AED = \angle ACB = 95.4°.$$

Kutovi α, $\angle ADE$ i $\angle AED$ su kutovi istoga trokuta ADE, pa njihov zbroj mora biti jednak 180°. Tako iz

$$\alpha + \angle ADE + \angle AED = 180°$$

slijedi redom:

$$\alpha = 180 - \angle ADE - \angle AED,$$
$$\alpha = 180° - 58° - 95.4°,$$
$$\alpha = 26.6°.$$

5. **B.** Zadani trokut je pravokutan s pravim kutom u vrhu A. Duljine njegovih kateta su $|AB| = 13.47$ cm i $|AC| = 9.23$ cm. Tražimo duljinu hipotenuze BC. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$|BC| = \sqrt{|AB|^2 + |AC|^2} = \sqrt{13.47^2 + 9.23^2} = \sqrt{181.4409 + 85.1929} = \sqrt{266.6338} \approx 16.328925$$

Zaokružimo li dobivenu vrijednost na dvije decimale, dobit ćemo $|BC| = 16.33$ (treća decimala 8 je jednaka ili veća od 5, pa prigodom zaokruživanja drugu decimalu moramo povećati za 1).

6. **D.** Imamo redom:

$$\frac{1}{3-a} + \frac{2}{3\cdot a} = \frac{1\cdot 3\cdot a + 2\cdot(3-a)}{(3-a)\cdot 3\cdot a} = \frac{3\cdot a + 6 - 2\cdot a}{(3-a)\cdot 3\cdot a} = \frac{a+6}{(3-a)\cdot 3\cdot a} = \frac{a+6}{3\cdot a\cdot(3-a)}.$$

7. **D.** Iznos sniženja jednak je:

$$P = 249.99 - 199.99 = 50.00 \text{ kn.}$$

Preostaje odrediti koliko postotaka iznosi 50.00 kn u odnosu na početnu cijenu $S = 249.99$ kn:

$$p = \frac{100\cdot P}{S} = \frac{100\cdot 50}{249.99} \approx 20.0008$$

Dakle, cijena košulje snižena je za približno 20%.

8. **A.** Imamo redom:

$$3\cdot x + 5 < x + 1,$$
$$3\cdot x - x < 1 - 5,$$
$$2\cdot x < -4.$$

Dijeljenjem posljednje nejednakosti s 2 (pri čemu se znak nejednakosti neće promijeniti) dobivamo $x < -2$. Dakle, skup svih rješenja polazne nejednadžbe tvore svi realni brojevi strogo manji od -2. Ti brojevi tvore interval $\langle -\infty, -2\rangle$.

9. **B.** Imamo redom:

$$\frac{a}{K-1} = 2 \quad / \cdot (K-1)$$
$$a = 2\cdot(K-1),$$
$$a = 2\cdot K - 2,$$
$$a + 2 = 2\cdot K.$$

Odatle dijeljenjem lijeve i desne strane jednakosti s 2 dobivamo

$$K = \frac{a+2}{2}.$$

10. **A**. Imamo redom:

$$(-3^2)^3 = [(-1)\cdot 3^2]^3 = (-1)^3 \cdot (3^2)^3 = (-1)\cdot 3^{2\cdot 3} = (-1)\cdot 3^6 = -3^6.$$

11. **A**. Ako je na svaka dva popunjena mjesta jedno mjesto prazno, onda je od ukupno 3 mjesta jedno mjesto prazno. To znači da je trećina svih mjesta u avionu prazna, odnosno da je popunjeno $\frac{2}{3}$ svih mjesta u zrakoplovu. Od $\frac{2}{3}$ svih mjesta, na $1-\frac{1}{9}=\frac{9-1}{9}=\frac{8}{9}$ mjesta, pa odrasle osobe zauzimaju ukupno $\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{27}$ svih mjesta u zrakoplovu. Stoga je ukupan broj odraslih osoba u zrakoplovu jednak $\frac{16}{27}\cdot 108=64$.

12. **A.** Duljina od 1 km jednaka je duljini od 1 000 metara, pa je duljina od 20 km jednaka duljini od $20\cdot 1\,000$ m = 20 000 m. Vrijeme od 4 sata i 57 minuta jednako je vremenu od $4\cdot 60+57=240+$ $+57=297$ minuta. Prema tome, Anina brzina iskazana u metrima po minuti jednaka je

$$v=\frac{20\,000\text{ m}}{297\text{ min.}}\approx 67.34\text{ m/min.}$$

13. **D.** Koordinata točke B je $\frac{-100+(-46)}{2}=\frac{-100-46}{2}=\frac{-146}{2}=-73$, tj. $B(-73)$. Koordinata točke D je $-46+90=90-46=44$, tj. $D(44)$. Stoga je tražena razlika jednaka $44-(-73)=44+73=117$.

14. **C.** Na mljevenje ili prodaju potrošeno je ukupno $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=$ $=\frac{3}{8}$ početnoga broja zrna žita. Stoga je preostalo ukupno $1-\frac{3}{8}=\frac{8-3}{8}=\frac{5}{8}$ početnoga broja zrna žita, tj. $\frac{5}{8}\cdot 1.2\cdot 10^{10}=0.75\cdot 10^{10}=0.75\cdot 10\cdot 10^{9}=(0.75\cdot 10)\cdot 10^{9}=7.5\cdot 10^{9}$ zrna žita.

15. **C.** Zadatak ćemo riješiti primjenom jednostavnoga računa smjese jer imamo točno dva sastojka od kojih pravimo smjesu. Odredimo najprije omjer miješanja tih sastojaka. Koristimo shemu zvijezde. U prvi stupac pišemo masnoće sastojaka, i to od najveće prema najmanjoj. U drugi stupac pišemo željenu masnoću smjese. U trećem stupcu izračunavamo omjerni broj koji pripada svakom pojedinom sastojku kao apsolutnu vrijednost razlike željene masnoće smjese i masnoće para dotičnoga sastojka:

$$\begin{array}{ccc} 3.8 & & 2.6-0.9=1.7 \\ & 2.6 & \\ 0.9 & & 3.8-2.6=1.2 \end{array}$$

Dakle, sastojke treba pomiješati u omjeru 1.7 : 1.2, tj. u omjeru 17 : 12. (Članove omjera smijemo pomnožiti realnim brojem različitim od nule, pri čemu se vrijednost omjera neće promijeniti.) Sada obujam od 100 litara smjese dijelimo u omjeru 17 : 12. Primjenjujemo jednostavni račun diobe. Računamo omjerni koeficijent:

$$k=\frac{100}{17+12}=\frac{100}{29}.$$

Traženi obujam mlijeka s 0.9% masnoće dobit ćemo tako da pripadni omjerni broj koji odgovara tom sastojku (to je broj 12) pomnožimo s omjernim koeficijentom. Stoga treba uzeti ukupno

$$12 \cdot \frac{100}{29} = \frac{1200}{29} \approx 41.37931 \approx 41.38 \text{ litara mlijeka s } 0.9\% \text{ masnoće.}$$

16. D. Primijetimo da je $f(0) = a \cdot 0^2 - 2 = 0 - 2 = -2$. Stoga graf funkcije f mora prolaziti točkom $(0, -2)$. Jedini od četiriju ponuđenih grafova koji prolazi točkom $(0, -2)$ jest četvrti graf.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 438.01. Broj π napisan na pet decimala glasi: $\pi = 3.14159$. Zaokružimo li taj broj na četiri decimale, dobit ćemo: $\pi = 3.1416$ (peta decimala 9 je jednaka ili veća od 5, pa prigodom zaokruživanja četvrtu decimalu moramo povećati za 1). Tako dalje dobivamo:

$$P = 2 \cdot 2.154 \cdot 3.1416 \cdot (2.154 + 30.21) = 2 \cdot 2.154 \cdot 3.1416 \cdot 32.364 = 438.0147902592$$

Zaokružimo li broj P na dvije decimale, dobit ćemo: $P \approx 438.01$.

18. $\frac{5}{4}$. Imamo redom:

$$\frac{1}{2} \cdot (4 \cdot x + 1) = 3$$
$$2 \cdot x + \frac{1}{2} = 3$$
$$2 \cdot x = 3 - \frac{1}{2}$$
$$2 \cdot x = \frac{3 \cdot 2 - 1}{2}$$
$$2 \cdot x = \frac{6 - 1}{2}$$
$$2 \cdot x = \frac{5}{2}$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $x = \frac{5}{4}$.

19. –2. Zadana jednadžba ekvivalentna je jednadžbi

$$x^2 - 2 \cdot x - 8 = 0.$$

Ovu jednadžbu najlakše i najbrže rješavamo primjenom Vièteovih formula. Tražimo dva realna broja čiji je zbroj jednak 2, a umnožak –8. Ti brojevi su očito 4 i –2. Stoga je traženo negativno rješenje polazne jednadžbe $x = -2$.

Ne sjetimo li se Vièteovih formula, gornju jednadžbu rješavamo primjenom formule za određivanje rješenja kvadratne jednadžbe. „Očitamo“ koeficijente u kvadratnoj jednadžbi:

$$a = 1, b = -2, c = -8,$$

pa dobivamo:

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2,\ x_2 = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

20. 15 kv. jed. Površina četverokuta *KLMN* jednaka je zbroju površine trokuta *KLN* i površine trokuta *LMN*. Izračunajmo zasebno svaku od tih površina.

Površina trokuta *KLN* jednaka je polovici umnoška duljine stranice *LN* i visine na tu stranicu povučene iz vrha *K*. Stranica *LN* očito pripada pravcu usporednom s osi y, pa njezinu duljinu određujemo tako da prebrojimo za koliko se jediničnih duljina moramo pomaknuti iz točke *L* usporedno s osi y da bismo došli u točku *N*. Lako utvrđujemo da moramo napraviti 5 jediničnih „koraka“, pa je $|LN| = 5$. Visina na stranicu *LN* povučena iz vrha *K* je pravac usporedan s osi x (jer je pravac *LN* usporedan s osi y), pa njezinu duljinu određujemo tako da prebrojimo za koliko se jediničnih duljina moramo pomaknuti iz točke *K* usporedno s osi x da bismo došli do neke točke (koju nazivamo nožište visine) na stranici *LN*. Lako utvrđujemo da moramo napraviti 2 jedinična „koraka“. Stoga je duljina visine povučene iz vrha *K* na stranicu *LN* jednaka $v = 2$. Prema tome, površina trokuta *KLN* jednaka je

$$P_{KLN} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{LN}\right|\cdot v$$
$$P_{KLN} = \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2$$
$$P_{KLN} = 5 \text{ kv. jed.}$$

Odredimo površinu trokuta *LMN*. Taj trokut je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu *L*. Njegove katete su stranice *LM* i *LN*, a hipotenuza stranica *MN*. Stoga je njegova površina jednaka polovici umnoška duljine katete *LM* i duljine katete *LN*. Duljinu stranice *LN* već smo izračunali: $|LN| = 5$. Preostaje odrediti duljinu katete *LM*. Uočimo da je pravac *LM* usporedan s osi x, pa duljinu katete *LM* određujemo tako da prebrojimo za koliko se jediničnih duljina moramo pomaknuti iz točke *L* usporedno s osi x da bismo došli u točku *M*. Lako utvrđujemo da moramo napraviti 4 jedinična „koraka“. Zato je $|LM| = 4$, pa je površina trokuta *LMN*

$$P_{LMN} = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{LM}\right|\cdot\left|\overline{LN}\right|$$
$$P_{LMN} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5$$
$$P_{LMN} = 10 \text{ kv. jed.}$$

Tako je tražena površina četverokuta *KLMN* jednaka

$$P_{KLMN} = P_{KLN} + P_{LMN} = 5 + 10 = 15 \text{ kv. jed.}$$

21. $2\cdot a^2 + 7\cdot a + 6$. Imamo redom:

$$(a + 2)\cdot(2\cdot a + 3) = 2\cdot a^2 + 4\cdot a + 3\cdot a + 6 = 2\cdot a^2 + 7\cdot a + 6.$$

22. 7.5; 1.95. Ako za lijepljenje 1 m^2 pločica treba 3 kg ljepila u prahu, onda za lijepljenje 2.5 m^2 pločica treba 2.5 puta više ljepila u prahu, tj. $2.5\cdot 3 = 7.5$ kg ljepila u prahu. Masa ljepila u prahu i obujam vode su upravno razmjerne veličine (koliko puta se poveća masa ljepila u prahu, toliko se puta poveća i potreban obujam vode). Označimo li nepoznati obujam vode s x, možemo postaviti razmjer:

$$x : 7.5 = 26 : 100.$$

Otuda redom dobivamo:

$$100 \cdot x = 7.5 \cdot 26,$$
$$100 \cdot x = 195.$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti sa 100 dobijemo $x = 1.95$. Dakle, za lijepljenje 2.5 m^2 pločica trebamo ukupno 7.5 kg ljepila u prahu i 1.95 litara vode.

23. *IQ* = 116; 15 godina. U izraz za određivanje IQ najprije uvrstimo $s = 19$ i $m = 22$, pa dobijemo:

$$IQ = \frac{22}{19} \cdot 100 = \frac{2200}{19} \approx 115.78947 .$$

Dobiveni rezultat zaokružimo na najbliži cijeli broj. Prva decimala iza decimalne točke jednaka je 7, pa zaokružujemo naviše. Stoga je traženi količnik inteligencije $IQ = 116$.

Potom iz zadane formule za IQ izrazimo starost s. Imamo redom:

$$IQ = \frac{m}{s} \cdot 100 \quad / \cdot s$$
$$IQ \cdot s = m \cdot 100 \quad / : IQ$$
$$s = \frac{m}{IQ} \cdot 100$$

U ovu formulu uvrstimo $IQ = 120$ i $m = 18$, pa dobijemo:

$$s = \frac{18}{120} \cdot 100 = \frac{1800}{120} = 15 .$$

Dakle, osoba ima 15 godina.

24. $\frac{7}{2}$; $\frac{3}{2}$. Prvu jednadžbu zadanoga sustava uvrstimo u drugu, pa dobijemo:

$$\frac{3 \cdot x}{x-2} = 7 \quad / \cdot (x-2)$$
$$3 \cdot x = 7 \cdot (x-2),$$
$$3 \cdot x = 7 \cdot x - 14,$$
$$3 \cdot x - 7 \cdot x = -14,$$
$$(-4) \cdot x = -14 \quad / : (-4)$$
$$x = \frac{-14}{-4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}.$$

Dobivenu vrijednost za x uvrstimo u prvu jednadžbu sustava. Dobivamo:

$$y = x - 2,$$
$$y = \frac{7}{2} - 2,$$
$$y = \frac{7 - 2 \cdot 2}{2},$$
$$y = \frac{7-4}{2},$$

$$y = \frac{3}{2}.$$

Stoga je rješenje polaznoga sustava $(x, y) = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

25. **1.)** **114.92**. Izrazimo ukupno vrijeme trajanja razgovora u minutama:

$$t = 7 \cdot 60 + 32 = 420 + 32 = 452 \text{ minute.}$$

Za 452 minute razgovora treba platiti iznos $S = 452 \cdot 0.21 = 94.92$ kn. Da se dobije ukupan iznos telefonskoga računa, iznosu S treba pribrojiti mjesečnu naknadu od 20 kn. Tako je traženi ukupan iznos telefonskoga računa jednak $94.92 + 20 = 114.92$ kn.

2.) **163.** Od iznosa 54.23 kn ukupno 20 kn otpada na mjesečnu naknadu, pa je iznos potrošen na plaćanje razgovora jednak $54.23 - 20 = 34.23$ kn. Budući da jedna minuta razgovora stoji 0.21 kn, traženo ukupno trajanje svih razgovora dobit ćemo tako da iznos od 34.23 kn podijelimo s 0.21 kn:

$$34.23 : 0.21 = 163.$$

Dakle, traženo ukupno trajanje svih telefonskih razgovora iznosi 163 minute.

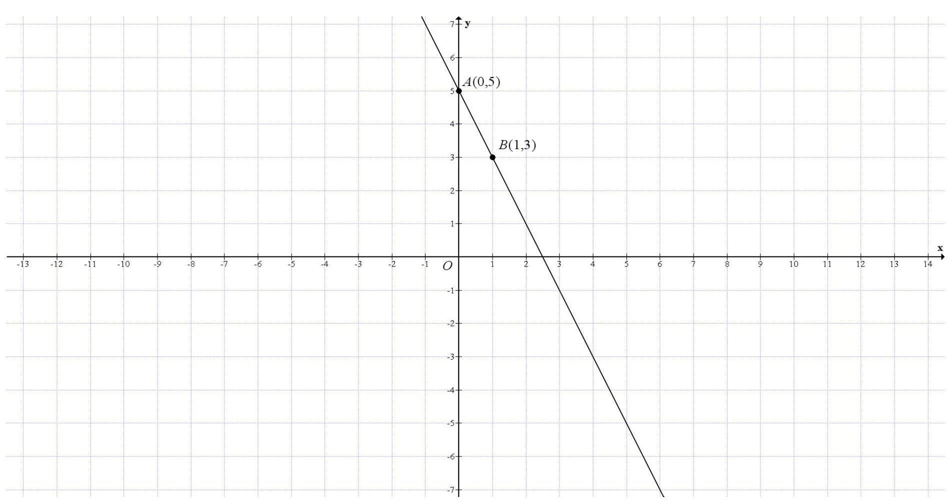
26. **1.)** Da bismo nacrtali zadani pravac, dovoljno je odrediti bilo koje dvije njegove točke i spojiti ih pravcem. Odaberemo npr. $x = 0$, pa izračunamo:

$$y = (-2) \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5.$$

Dakle, pravac će prolaziti točkom $A(0, 5)$. Odaberemo npr. $x = 1$, pa izračunamo:

$$y = (-2) \cdot 1 + 5 = -2 + 5 = 3.$$

Dakle, pravac će prolaziti točkom $B(1, 3)$. Preostaje ucrtati navedene točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojiti pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 8.



Slika 8.

2.) $\boldsymbol{y = \frac{5}{2} \cdot x}$**.** Zadani pravac prolazi ishodištem, pa njegova jednadžba ima oblik $y = a \cdot x$, gdje je a trenutno nepoznata konstanta. Da bismo je odredili, treba nam bilo koja druga točka zadanoga pravca (tj. točka različita od ishodišta). Iz slike se vidi da zadani pravac prolazi točkom $T(2, 5)$, pa koordinate točke T moraju zadovoljavati jednadžbu pravca. Uvrstimo li koordinate te točke u jednakost $y = a \cdot x$, dobit ćemo:

$$5 = a \cdot 2.$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $a = \frac{5}{2}$. Dakle, tražena jednadžba pravca je $y = \frac{5}{2} \cdot x$.

27. 1.) 450 000 stanovnika. Jedan „korak“ prema gore „vrijedi“ 100 000. Da od osi *županije* dođemo do krajnje gornje točke u stupcu E, moramo napraviti 4 „puna“ „koraka“ i još pola jednoga „koraka“, tj. ukupno 4.5 „koraka“. Stoga je traženi procijenjeni broj stanovnika 4.5 · 100 000 = = 450 000.

2.) 4. Odredimo najprije točku na osi *broj stanovnika* koja odgovara broju od 250 000. Od presjecišta osi *županije* i osi *broj stanovnika* napravimo ukupno 2.5 „koraka“ po osi *broj stanovnika* i dođemo u polovište dužine omeđene trećom i četvrtom točkom na osi *broj stanovnika* (prva točka je presjecište osi *županije* i osi *broj stanovnika*, a druga točka je točka kojoj je pridružen broj 100 000). Tim polovištem povučemo pravac usporedan s osi *županije*. Prebrojimo koliko dužina u stupcima A – H ima krajnju gornju točku strogo ispod dobivenoga pravca. Četiri su takve dužine: dužina u stupcu C, te dužine u stupcima F, G i H. To znači da četiri promatrane županije imaju strogo manje od 250 000 stanovnika.

3.) ≈ 16 puta. Županija s najvećim brojem stanovnika je županija A i ona ima približno 800 000 stanovnika (moramo napraviti približno 8 punih „koraka“ da od osi *županije* dođemo do krajnje gornje točke u stupcu A, a svaki „korak“ „vrijedi“ 100 000 stanovnika). Županija s najmanjim brojem stanovnika je županija C i ona ima približno 50 000 stanovnika (moramo napraviti svega pola jednoga „koraka“ da od osi *županije* dođemo do krajnje gornje točke u stupcu C, pa, ako jedan „puni korak“ vrijedi 100 000 stanovnika, onda polovica „punoga koraka“ vrijedi $\frac{1}{2} \cdot$ $\cdot$ 100 000 = 50 000 stanovnika). Stoga je traženi broj jednak količniku brojeva 800 000 i 50 000, a taj je 800 000 : 50 000 = 16. Dakle, županija s najvećim brojem stanovnika ima približno 16 puta više stanovnika od županije s najmanjim brojem stanovnika.

28. 1.) 218.2. Izračunajmo najprije energetsku vrijednost 20 g žitarica. Energetska vrijednost i masa žitarica su upravno razmjerne veličine (koliko puta se poveća masa žitarica, toliko puta se poveća i energetska vrijednost). Označimo li s x traženu energetsku vrijednost, možemo postaviti razmjer:

$$x : 20 = 341 : 100.$$

Odatle je

$$100 \cdot x = 341 \cdot 20,$$
$$100 \cdot x = 6\,820.$$

Dijeljenjem sa 100 dobivamo $x = 68.2$. Dakle, 20 g žitarica ima energetsku vrijednost 68.2 kcal.

Izračunajmo energetsku vrijednost 250 g mlijeka. Analogno kao i kod žitarica, energetska vrijednost i masa mlijeka su upravno razmjerne veličine. Označimo li s y traženu energetsku vrijednost, možemo postaviti razmjer:

$$y : 250 = 60 : 100.$$

Odatle je

$$100 \cdot y = 250 \cdot 60,$$
$$100 \cdot y = 15\,000.$$

Dijeljenjem sa 100 dobivamo $y = 150$. Dakle, 250 g mlijeka ima energetsku vrijednost 150 kcal. Stoga je ukupna energetska vrijednost Filipova obroka jednaka

$$E = x + y = 68.2 + 150 = 218.2 \text{ kcal}.$$

2.) ≈ 8.42. Izračunajmo najprije masu ugljikohidrata u 20 g žitarica. Masa ugljikohidrata i masa žitarica su upravno razmjerne veličine. Označimo li s u_1 traženu masu ugljikohidrata, možemo postaviti razmjer:

$$u_1 : 20 = 57 : 100.$$

Odatle je

$$100 \cdot u_1 = 57 \cdot 20,$$
$$100 \cdot u_1 = 1\,140.$$

Dijeljenjem sa 100 dobivamo $u_1 = 11.4$. Dakle, u 20 g žitarica ima 11.4 g ugljikohidrata. Izračunajmo masu ugljikohidrata u 250 g mlijeka. Masa ugljikohidrata i masa mlijeka su upravno razmjerne veličine. Označimo li s u_2 traženu masu ugljikohidrata, možemo postaviti razmjer:

$$u_2 : 250 = 4.53 : 100.$$

Odatle je

$$100 \cdot u_2 = 250 \cdot 4.53,$$
$$100 \cdot u_2 = 1\,132.5.$$

Dijeljenjem sa 100 dobivamo $u_2 = 11.325$. Dakle, u 250 g mlijeka ima 11.325 g ugljikohidrata. Ukupna masa Filipova obroka je

$$m = 20 + 250 = 270 \text{ g}.$$

U tih 270 g obroka ima ukupno

$$u = u_1 + u_2 = 11.4 + 11.325 = 22.725 \text{ g ugljikohidrata}.$$

Preostaje izračunati koliko postotaka tvori 22.725 g u odnosu na ukupnu masu od 270 g. Traženi postotak je:

$$p = \frac{100 \cdot u}{m}$$
$$p = \frac{100 \cdot 22.725}{270},$$
$$p = \frac{2\,272.5}{270} = 8.41667 \approx 8.42.$$

Dakle, približno 8.42% Filipova obroka tvore ugljikohidrati.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: PROSINAC 2011.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Skup svih realnih brojeva strogo većih od –2 je otvoreni interval $\langle -2, +\infty\rangle$. Prvi od ponuđenih četiriju skupova je skup svih realnih brojeva strogo manjih od –2, drugi skup svih realnih brojeva ne većih od –2, a četvrti skup svih realnih brojeva ne manjih od –1. (*Napomena*: „biti ne manji od“ znači „biti jednak ili veći od“. Analogno, „biti ne veći od“ znači „biti jednak ili manji od“.)

2. **C.** Imamo redom:

$$\frac{16}{100}\cdot 16=\frac{16\cdot 16}{100}=\frac{256}{100}=2.56\,.$$

3. **C.** Budući da 1 dekagram jednak 10 grama, slijedi da je 1 gram jednak $\frac{1}{10}$ dekagrama. Stoga zaključujemo da je $\frac{1}{10}$ dekagrama jednaka 0.035274 unca, odnosno da je 1 unca jednaka $\frac{\frac{1}{10}}{0.035274}=\frac{100000}{35274}=\frac{50000}{17637}$ dekagrama. Dakle, 9 unca jednako je $9\cdot\frac{50000}{17637}=\frac{450000}{17637}\approx 25.51$ dag.

4. **C.** Broj π zaokružuje se na dvije decimale tako da se znamenka ispred decimalne točke (3) i znamenka desetinki (1) prepišu, a znamenka stotinki poveća za 1 ako znamenka tisućinki pripada skupu {5, 6, 7, 8, 9}, odnosno prepiše ako znamenka tisućinki pripada skupu {0, 1, 2, 3, 4}. Stoga je $\pi \approx 3.14$. Općenito, zaokruživanje na n decimala radi se tako da se sve znamenke ispred decimalne točke i prvih $n-1$ znamenki iza decimalne točke prepišu, a n–ta znamenka poveća za 1 ako je $n+1$–va znamenka element skupa {5, 6, 7, 8, 9}, odnosno prepiše ako je $n+1$–va znamenka element skupa {0, 1, 2, 3, 4}. Dakle, kod zaokruživanja na tri decimale dobijemo $\pi \approx 3.142$, kod zaokruživanja na četiri decimale $\pi \approx 3.1416$, a kod zaokruživanja na pet decimala $\pi \approx 3.14159$.

5. **A.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}&3\cdot\frac{9^a}{27}=\frac{3}{27}\cdot 9^a=\frac{1}{9}\cdot 9^a=\frac{9^a}{9^1}=9^{a-1},\\&9^{a-1}=\frac{1}{9},\\&9^{a-1}=9^{-1},\\&a-1=-1,\\&a=0.\end{aligned}$$

6. **B.** Neka je x manji od tih dvaju brojeva. Tada je veći broj jednak $3\cdot x$. Iz podatka da zbroj tih dvaju brojeva iznosi 168 dobivamo jednadžbu:

$$x+3\cdot x=168,$$

odnosno

$$4\cdot x=168.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s dobiva se $x = 42$. Dakle, manji broj je 42, a veći $3 \cdot 42 = 126$. Razlika većega i manjega broja jednaka je $126 - 42 = 84$.

7. **C.** Prije tri godine Lucija je imala $17 - 3 = 14$ godina, pa je tada Tamara imala $25 - 14 = 11$ godina. Danas Tamara ima $11 + 3 = 14$ godina, pa će imati 18 godina za $18 - 14 = 4$ godine.

8. **A.** Neka je $a = 6$ cm duljina jedne katete, a b duljina druge katete. Iz

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$$

slijedi

$$\begin{aligned} &2 \cdot P = a \cdot b \quad / : a \\ &b = \frac{2 \cdot P}{a} \\ &b = \frac{2 \cdot 12}{6} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

Primjenom Pitagorina poučka dobijemo traženu duljinu hipotenuze:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = \sqrt{4 \cdot 13} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13} = 2 \cdot \sqrt{13} \approx 7.21 \text{ cm}.$$

9. **A.** Svi ponuđeni odgovori iskazani su u dm^3, pa površinu osnovke uspravne prizme najprije iskažimo u dm^2. Koristeći jednakost

$$1 \text{ dm} = 10 \text{ cm},$$

iz koje dijeljenjem lijeve i desne strane s 10 slijedi

$$1 \text{ cm} = 0.1 \text{ dm},$$

dobijemo

$$500 \text{ cm}^2 = 500 \cdot (0.1 \text{ dm})^2 = 500 \cdot 0.01 = 5 \text{ dm}^2.$$

Tako je traženi obujam jednak umnošku površine osnovke i duljine visine prizme, tj.

$$V = B \cdot h = 5 \text{ dm}^2 \cdot 8 \text{ dm} = 40 \text{ dm}^3.$$

10. **B**. Primjenom formule za kvadrat razlike kvadriranjem lijeve strane prve jednakosti dobivamo:

$$(a - 1)^2 + 2 \cdot a = a^2 - 2 \cdot a + 1 + 2 \cdot a = a^2 + 1,$$

a taj je izraz različit od izraza $a^2 - 1$ za svaki $a \in \mathbf{R}$. Nadalje, primjenom formule za razliku kvadrata lako se vidi da je lijeva strana treće jednakosti jednaka $a^2 - 1$, pa iz jednakosti

$$a^2 - 1 = 1 - a^2$$

dobijemo

$$\begin{aligned} 2 \cdot a^2 &= 2, \quad /:2 \\ a^2 &= 1. \end{aligned}$$

Odatle je $a = -1$ ili $a = 1$, pa zaključujemo da treća jednakost nije točna za svaki $a \in \mathbf{R}$, nego samo za $a = -1$ i $a = 1$. Slično, primjenom formule za kvadrat zbroja dobivamo da je lijeva strana četvrte jednakosti jednaka $a^2 + 2 \cdot a + 1$, pa iz jednadžbe

$$a^2 + 2 \cdot a + 1 = 1 + a^2$$

slijedi

$$\begin{aligned} 2 \cdot a &= 0, \ /:2 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Dakle, ni četvrta jednakost nije istinita za svaki $a \in \mathbf{R}$, nego samo za $a = 0$. Napokon, također primjenom formule za kvadrat zbroja dobivamo da je lijeva strana druge jednakosti:

$$(a + 1)^2 - 2 \cdot a = a^2 + 2 \cdot a + 1 - 2 \cdot a = a^2 + 1,$$

a to je upravo desna strana druge jednakosti. Stoga je ta jednakost istinita za svaki $a \in \mathbf{R}$.

11. B. Primjenom formule za razliku kvadrata imamo redom:

$$\left(\frac{x-5}{x+5}-\frac{x+5}{x-5}\right):\frac{x}{x^2-25}=\left[\frac{(x-5)\cdot(x-5)-(x+5)\cdot(x+5)}{(x+5)\cdot(x-5)}\right]\cdot\frac{x^2-25}{x}=$$
$$=\left[\frac{(x-5)^2-(x+5)^2}{(x+5)\cdot(x-5)}\right]\cdot\frac{(x+5)\cdot(x-5)}{x}=\frac{\left[(x-5)-(x+5)\right]\cdot\left[(x-5)+(x+5)\right]\cdot(x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)\cdot(x+5)\cdot x}=$$
$$=\frac{(x-5-x-5)\cdot(x-5+x+5)}{x}=\frac{(-10)\cdot 2\cdot x}{x}=-20$$

12. B. Uvrstimo prvu jednadžbu zadanoga sustava u njegovu drugu jednadžbu. Dobivamo redom:

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{5}+2\cdot y+9&=0 \quad /\cdot 5 \\ y-1+10\cdot y+45&=0, \\ 11 \cdot y + 44 &= 0, \\ 11 \cdot y &= -44. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 11 slijedi $y = -4$.

13. D. Najprije riješimo zadanu nejednadžbu. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &\frac{11-x}{3}+\frac{x-3}{4}>2 \quad /\cdot 12 \\ &4\cdot(11-x)+3\cdot(x-3)>24, \\ &44-4\cdot x+3\cdot x-9>24, \\ &-x>24-44+9, \\ &-x>-11 \quad /:(-1) \\ &x<11. \end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja polazne nejednadžbe je otvoreni interval $\langle -\infty, 11\rangle$. Budući da vrijede nejednakosti

$$\frac{66}{5} > \frac{65}{5} = 13,\quad \frac{55}{4} > \frac{52}{4} = 13,\quad \frac{33}{2} > \frac{32}{2} = 16 \text{ i } \frac{22}{3} < \frac{24}{3} = 8,$$

zaključujemo da su prva tri broja strogo veća od 11, pa ne pripadaju skupu rješenja polazne nejednadžbe. Stoga jedino broj $\frac{22}{3}$ pripada spomenutom skupu.

14. D. Označimo s x traženi broj planinara. Prema podatcima iz zadatka, ukupno $\frac{1}{3}\cdot x$ planinara otišlo je do izvora, $\frac{1}{4}\cdot x$ planinara igralo je društvenu igru, a $\frac{1}{6}\cdot x$ planinara bavilo se sportskim aktivnostima. Stoga je preostalo njih ukupno

$$x-\left(\frac{1}{3}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot x+\frac{1}{6}\cdot x\right)=x-\frac{1}{3}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot x-\frac{1}{6}\cdot x=\frac{12\cdot x-4\cdot x-3\cdot x-2\cdot x}{12}=\frac{3\cdot x}{12}=\frac{1}{4}\cdot x\,.$$

Taj izraz treba biti jednak 12, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{4}\cdot x=12\,,$$

iz koje množenjem s 4 slijedi $x = 48$.

15. B. Koristeći jednakosti iz zadatka, te jednakost

1 kilometar = 1000 metara,

odnosno (nakon dijeljenja s 1000)

1 metar = 0.001 kilometara,

dobivamo redom:

150 megaparseka = $150 \cdot 10^6$ parseka = $150 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16}$ metara = $150 \cdot 10^6 \cdot 3.09 \cdot 10^{16} \cdot$ $\cdot\, 0.001$ km = $0.4635 \cdot 10^{22}$ km = $0.4635 \cdot 10 \cdot 10^{21}$ km = $4.635 \cdot 10^{21}$ km.

16. D. Iz zadanih podataka slijedi da su nultočke tražene funkcije $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$, pa navedenu funkciju možemo zapisati u obliku:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$
$$f(x) = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 2),$$
$$f(x) = a \cdot (x^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x - 6),$$
$$f(x) = a \cdot (x^2 + x - 6).$$

Iz podatka da graf tražene funkcije prolazi točkom B zaključujemo da vrijednost funkcije za $x = 0$ treba biti jednaka 3, pa uvrštavanjem $x = 0$ i $f(0) = 3$ u posljednju jednakost dobijemo:

$$3 = a \cdot (0^2 + 0 - 6),$$
$$(-6) \cdot a = 3.$$

Odatle nakon dijeljenja s (-6) slijedi $a = -0.5$. Dakle,

$$f(x) = (-0.5) \cdot (x^2 + x - 6) = -0.5 \cdot x^2 - 0.5 \cdot x + 3.$$

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. $a \cdot b - 1$. Iz zadane jednakosti množenjem s a dobijemo:

$$1 + x = a \cdot b,$$

a odatle je izravno

$$x = a \cdot b - 1.$$

18. 5.28. Na memorijskom ključiću ostalo je 34% slobodnoga prostora, što znači da je popunjeno ukupno 100% – 34% = 66% kapaciteta ključića. Stoga je tražena količina podataka jednaka

$$\frac{66}{100} \cdot 8 = \frac{66 \cdot 8}{100} = \frac{528}{100} = 5.28 \text{ GB}.$$

19. 5.426. Imamo redom:

$$M = \sqrt{1 + \frac{4^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}} = \sqrt{1 + \frac{4^2}{\frac{3^2}{4^2}}} = \sqrt{1 + \frac{4^2 \cdot 4^2}{3^2}} = \sqrt{1 + \frac{4^4}{3^2}} = \sqrt{\frac{3^2 + 4^4}{3^2}} = \frac{\sqrt{3^2 + 4^4}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{9 + 256}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{265} .$$

Pomoću kalkulatora dobijemo:

$$M \approx \frac{1}{3} \cdot 16.278820596 = 5.426273532 \approx 5.426$$

20. 10 kv. jed. Površina zadanoga trokuta jednaka je polovici umnoška duljine stranice $\overline{AB}$ i duljine visine povučene iz vrha C na tu stranicu. Duljina stranice $\overline{AB}$ jednaka je udaljenosti između točaka A i B. Da bismo iz točke A došli u točku B, moramo se pomaknuti 5 puta udesno (usporedno s osi x), i to svaki put za jednu jedinicu mjerenja. Stoga je $|AB| = 5$. Da bismo iz vrha C došli do stranice $\overline{AB}$ moramo se pomaknuti 4 puta prema dolje (usporedno s osi y), i to svaki put za jednu jedinicu mjerenja. Stoga je $v_c = 4$. Tako konačno dobivamo:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot v_c = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10 \text{ kv. jed.}$$

21. 220. Imamo redom:

$$f(8) = \frac{5.94 \cdot 10^{5-0.25 \cdot 8}}{27} = \frac{5.94 \cdot 10^{5-2}}{27} = \frac{5.94 \cdot 10^{3}}{27} = \frac{5.94 \cdot 1000}{27} = \frac{5940}{27} = 220 .$$

22. 0.8; 45. **a)** U 2 kg mljevenoga mesa ima ukupno $\frac{40}{100} \cdot 2 = \frac{40 \cdot 2}{100} = \frac{80}{100} = 0.8$ kg svinjskoga mesa.

b) Neka je x tražena masa. Tada je masa smjese svinjetine i govedine 30 + x dag. Maseni udio svinjetine u toj smjesi jednak je $\frac{30}{30 + x}$ i, prema uvjetu zadatka, treba iznositi 40% = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$. Tako dobivamo jednadžbu:

$$\frac{30}{30 + x} = \frac{2}{5}$$

koja je prema definiciji jednakosti dvaju razlomaka ekvivalentna jednadžbi

$$30 \cdot 5 = (30 + x) \cdot 2,$$

odnosno jednadžbi

$$150 = 60 + 2 \cdot x,$$

odnosno jednadžbi

$$2 \cdot x = 150 - 60,$$

odnosno jednadžbi

$$2 \cdot x = 90.$$

Dijeljenjem posljednje jednadžbe s 2 dobijemo $x = 45$.

23. **172; 25.7. a)** U zadanu formulu uvrstimo $p = 26.3$. Dobivamo:

$$3 \cdot v - 20 \cdot 26.3 + 10 = 0,$$
$$3 \cdot v - 526 + 10 = 0,$$
$$3 \cdot v - 516 = 0,$$
$$3 \cdot v = 516.$$

Odatle dijeljenjem s 3 slijedi $v = 172$.
b) U zadanu formulu uvrstimo $v = 168$. Dobivamo:

$$3 \cdot 168 - 20 \cdot p + 10 = 0,$$
$$504 - 20 \cdot p + 10 = 0,$$
$$514 - 20 \cdot p = 0,$$
$$20 \cdot p = 514.$$

Odatle dijeljenjem s 20 slijedi $p = 25.7$.

24. **9:31, 7 sati i 9 minuta.** Od 10:00 sati do 10:27 sati prošlo je ukupno 27 minuta. Stoga preostaje još 56 – 27 = 29 minuta između 09:00 i 10:00 sati. Dakle, drugi vlak je krenuo u 29 minuta do 10 sati, odnosno 60 – 29 = 31 minutu nakon 09:00 sati, tj. u 9 sati i 31 minutu, tj. u 9:31 sati.

Nadalje, između 21:39 sati i 4:39 sati prošlo je punih 7 sati (jednako kao i od 21:00 do 04:00 sati, a to je vrijeme lagano izračunati: puna 3 sata do 24:00 = 00:00 sati, te još 4 sata od 00:00 do 04:00 sati). Od 4:39 sati do 4:48 sati prošlo je 9 minuta. Stoga je traženo vrijeme vožnje trećega vlaka 7 sati i 9 minuta.

25. **1.) –2**. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 6. Dobivamo:

$$2 \cdot (x - 1) + 24 \cdot x = 5 \cdot x - 2 - 42,$$
$$2 \cdot x - 2 + 24 \cdot x = 5 \cdot x - 2 - 42,$$
$$26 \cdot x - 5 \cdot x = -42,$$
$$21 \cdot x = -42.$$

Odatle dijeljenjem s 21 slijedi $x = -2$.

2.) –1. Imamo redom:

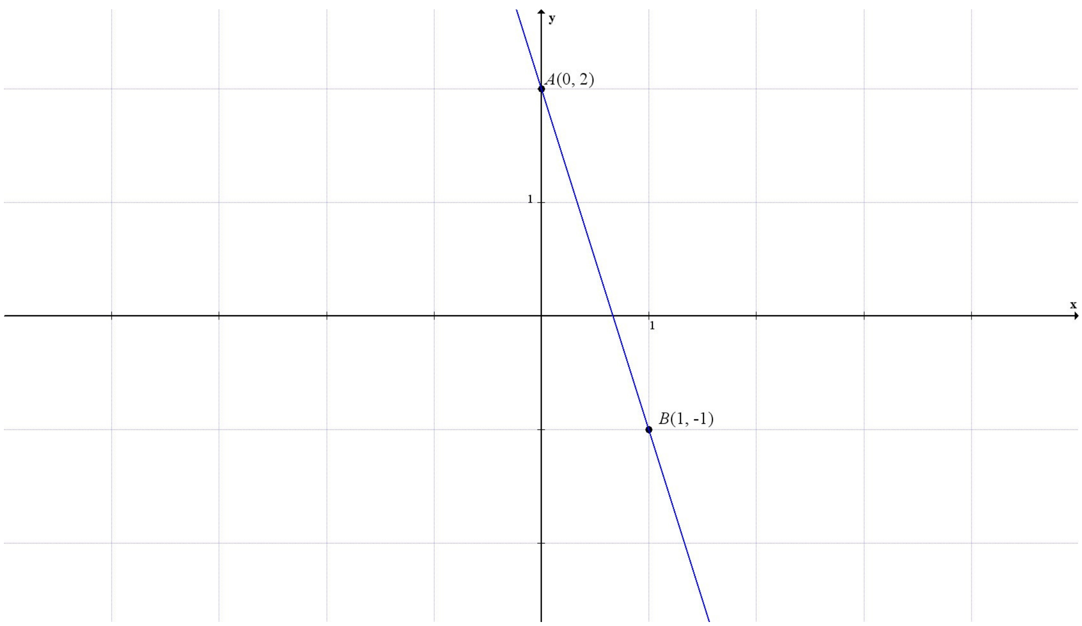
$$3 \cdot x^2 - 3 \cdot x - 6 = 0, \quad /:3$$

$$x^2 - x - 2 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2,\ x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Budući da tražimo negativno rješenje, x_1 ne dolazi u obzir, pa preostaje $x = x_2 = -1$.

26. 1.) Vidjeti Sliku 9. Bilo koji pravac određen je s bilo koje svoje dvije različite točke. Stoga uzmimo npr. $x = 0$, pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca dobijemo $y = (-3) \cdot 0 + 2 = 0 + 2 = 2$. Dakle, traženi pravac prolazi točkom $A(0, 2)$. Uzmemo li npr. $x = 1$, uvrštavanjem u jednadžbu pravca dobijemo $y = (-3) \cdot 1 + 2 = -3 + 2 = -1$, pa traženi pravac prolazi točkom $B(1, -1)$. Preostaje ucrtati točke A i B u priloženi koordinatni sustav, te ih spojiti jednim pravcem.



Slika 9.

2.) $y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$ **ili** $\boldsymbol{x - 2 \cdot y + 2 = 0}$ **ili** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{1} = 1$**.** Koristimo formulu za (eksplicitnu) jednadžbu pravca ako su zadane dvije njegove međusobno različite točke. Imamo redom:

$$y - 0 = \frac{2-0}{2-(-2)} \cdot [x - (-2)],$$

$$y = \frac{2}{2+2} \cdot (x+2),$$

$$y = \frac{2}{4} \cdot (x+2),$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x+2),$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot x + 1.$$

Preostala dva oblika dobijemo iz navedenoga eksplicitnoga oblika na sljedeći način:

$$y=\frac{1}{2}\cdot x+1$$
$$-\frac{1}{2}\cdot x+y=1$$
$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1\Rightarrow \text{ segmentni oblik: } \frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1$$
$$\frac{x}{-2}+\frac{y}{1}=1 \quad /\cdot(-2)$$
$$x-2\cdot y=-2$$
$$x-2\cdot y+2=0\Rightarrow \text{ implicitni oblik: } x-2\cdot y+2=0.$$

27. **1.) 7**. Iz grafa se vidi da je visina stupca iznad modaliteta 6 (na osi x) jednaka 7 jedinica mjerenja. To znači da je 7 učenika postiglo 6 bodova.

2.) 30. Traženi broj dobit ćemo tako da zbrojimo visine svih stupaca. Tako odmah slijedi:

$$N = 1 + 2 + 3 + 1 + 4 + 7 + 0 + 1 + 5 + 0 + 2 + 4 = 30.$$

3.) ≈ 6.77. Imamo ukupno 1 učenika s 1 bodom, 2 učenika s 2 boda, 3 učenika s 3 boda, 1 učenika s 4 boda, 4 učenika s 5 bodova, 7 učenika sa 6 bodova, 1 učenika s 8 bodova, 5 učenika s 9 bodova, 2 učenika s 11 bodova i 4 učenika s 12 bodova. Stoga je traženi prosjek bodova po jednom učeniku jednak

$$\bar{x}=\frac{1\cdot1+2\cdot2+3\cdot3+1\cdot4+4\cdot5+7\cdot6+1\cdot8+5\cdot9+2\cdot11+4\cdot12}{30},$$
$$\bar{x}=\frac{1+4+9+4+20+42+8+45+22+48}{30}=\frac{203}{30}\approx 6.766667\approx 6.77$$

28. **1.) 14.7 kn.** Cijena 5 pakiranja praška A iznosi $5 \cdot 9.80 = 49$ kn. Cijena jednoga pakiranja praška B iznosi 34.30 kn. Stoga je tražena ušteda jednaka $49 - 34.30 = 14.70$ kn.

2.) 4; 0; 2. Neka su a broj pakiranja praška A, b broj pakiranja praška B i c broj pakiranja praška C. Iz podataka u zadatku zaključujemo da je ukupna masa praška A kojega ćemo kupiti $a \cdot 1 = a$ kg, ukupna masa praška B $b \cdot 5 = 5 \cdot b$ kg, a ukupna masa praška C $c \cdot 12 = 12 \cdot c$ kg. Zbroj svih triju masa mora biti jednak 28 kg, pa dobivamo jednadžbu:

$$a + 5 \cdot b + 12 \cdot c = 28.$$

Nadalje, cijena a kg praška A iznosi $a \cdot 9.80 = 9.80 \cdot a$ kn, cijena b kg praška B iznosi $b \cdot 34.30 = 34.30 \cdot b$ kn, a cijena c kg praška C iznosi $c \cdot 68.00 = 68.00 \cdot c$ kn. Stoga ukupna cijena svih kupljenih pakiranja iznosi:

$$c_{\text{ukupno}} = 9.80 \cdot a + 34.30 \cdot b + 68.00 \cdot c \text{ kn.}$$

Prema zahtjevu zadatka, možemo postaviti sljedeći matematički model:

$$\text{minimizirati } c_{\text{ukupno}} = 9.80 \cdot a + 34.30 \cdot b + 68.00 \cdot c$$

pod uvjetima

$$a + 5 \cdot b + 12 \cdot c = 28,$$
$$a, b, c \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Iz uvjeta $a + 5 \cdot b + 12 \cdot c = 28$ izrazimo npr. nepoznanicu a, pa dobijemo:

$$a = 28 - 5 \cdot b - 12 \cdot c.$$

Uvrstimo li taj izraz u izraz za c_{ukupno}, dobit ćemo:

$$c_{\text{ukupno}} = 9.80 \cdot (28 - 5 \cdot b - 12 \cdot c) + 34.30 \cdot b + 68.00 \cdot c,$$
$$c_{\text{ukupno}} = 274.4 - 49 \cdot b - 117.6 \cdot c + 34.30 \cdot b + 68.00 \cdot c,$$
$$c_{\text{ukupno}} = 274.4 - 14.7 \cdot b - 49.6 \cdot c.$$

Odatle slijedi da ćemo platiti najmanju cijenu ako uzmemo što je više moguće pakovanja praška C. Budući da vrijednost nepoznanice a mora biti ili prirodan broj ili nula, iz izraza

$$a = 28 - 5 \cdot b - 12 \cdot c$$

slijedi da možemo uzeti najviše 2 pakovanja praška C. Stoga je $c = 2$. Tako dobijemo novi matematički model:

$$\text{minimizirati } c_{\text{ukupno}} = 9.80 \cdot a + 34.30 \cdot b + 68.00 \cdot 2$$

pod uvjetima

$$a + 5 \cdot b + 12 \cdot 2 = 28,$$
$$a, b \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

kojega možemo zapisati u obliku

$$\text{minimizirati } c_{\text{ukupno}} = 9.80 \cdot a + 34.30 \cdot b + 136$$

pod uvjetima

$$a + 5 \cdot b = 4,$$
$$a, b \in \mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Iz navedenih uvjeta odmah proizlazi $b = 0$ jer je za $b > 0$ vrijednost nepoznanice a strogo negativan cijeli broj. Tako je napokon $a = 4$. Dakle, treba kupiti 4 pakovanja praška A i 2 pakovanja praška C, te ćemo za to platiti ukupno $4 \cdot 9.80 + 2 \cdot 68 = 39.20 + 136 = 175.20$ kn.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: LIPANJ 2012.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **D.** Pomnožimo li nejednakost A s 5, znak nejednakosti se neće promijeniti jer se pri množenju bilo koje nejednakosti sa strogo pozitivnim realnim brojem znak nejednakosti ne mijenja. Tako se dobije ekvivalentna nejednakost $5 \cdot 5 < 24$, odnosno $25 < 24$, što je očito netočno.
Pomnožimo li nejednakost B s 6, znak nejednakosti se neće promijeniti. Tako se dobije ekvivalentna nejednakost $2 \cdot 2 < 1 \cdot 3$, odnosno $4 < 3$, što je očito netočno.

Budući da vrijedi jednakost $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, nejednakost C je ekvivalentna nejednakosti $\frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ koja je očito netočna.

Budući da vrijedi jednakost $0.7 = \frac{7}{10}$, nejednakost D pomnožimo s 20, pa dobijemo ekvivalentnu nejednakost $7 \cdot 2 < 3 \cdot 5$, odnosno $14 < 15$, što je očito istinita nejednakost.

2. **B.** Imamo redom:

$$0.3825 = \frac{0.3825 \cdot 100}{100} = \frac{38.25}{100} = 38.25\%.$$

3. **A.** Pomnožimo zadanu jednakost s 2, pa dobijemo redom:

$$x + \frac{y}{2} = 2,$$
$$x = 2 - \frac{y}{2},$$
$$x = 2 - \frac{1}{2} \cdot y.$$

4. **D.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} &3 \cdot x - \frac{1}{2} \geq 2 - x \quad / \cdot 2 \\ &6 \cdot x - 1 \geq 4 - 2 \cdot x \\ &6 \cdot x + 2 \cdot x \geq 4 + 1 \\ &8 \cdot x \geq 5 \quad / : 8 \\ &x \geq \frac{5}{8} \end{aligned}$$

Svi realni brojevi koji nisu manji od $\frac{5}{8}$ tvore interval $\left[\frac{5}{8}, +\infty\right\rangle$.

5. **A.** Pomnožimo drugu jednadžbu s 3. Dobijemo:

$$6 \cdot x + 3 \cdot y = 3.$$

Zbrajanjem dobivene jednadžbe i prve jednadžbe sustava slijedi:

$$7 \cdot x = 2 \cdot a + 3.$$

Odatle dijeljenjem s 2 dobivamo

$$x = \frac{2 \cdot a + 3}{7} = \frac{3 + 2 \cdot a}{7}.$$

6. A. Rastavimo brojnik u faktore koristeći formulu za razliku kvadrata, dok nazivnik rastavimo u faktore izlučivši $2 \cdot y$ iz svakoga njegovoga člana. Dobijemo:

$$y^2 - 4 = y^2 - 2^2 = (y - 2) \cdot (y + 2);$$
$$2 \cdot y^2 - 4 \cdot y = 2 \cdot y \cdot (y - 2).$$

Stoga je

$$\frac{y^2 - 4}{2 \cdot y^2 - 4 \cdot y} = \frac{(y-2) \cdot (y+2)}{2 \cdot y \cdot (y-2)} = \frac{y+2}{2 \cdot y}.$$

7. C. Iz slike najprije očitamo koordinate svake pojedine točke:

$$K(4, 3),\ L(-2, 2),\ M(-4, -4),\ N(3, -3).$$

Preostaje uvrstiti koordinate svake pojedine točke u jednadžbu pravca i utvrditi u kojim slučajevima se dobiju identiteti. Konkretno:

- za točku K uvrstimo $x = 4$, $y = 3$, pa dobijemo: $7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 - 4 = 28 - 24 - 4 = 0$, pa točka K pripada zadanom pravcu;
- za točku L uvrstimo $x = -2$, $y = 2$, pa dobijemo: $7 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 - 4 = -14 - 16 - 4 = -34 \neq 0$, pa točka L ne pripada zadanom pravcu;
- za točku M uvrstimo $x = -4$, $y = -4$, pa dobijemo: $7 \cdot (-4) - 8 \cdot (-4) - 4 = -28 + 32 - 4 = 0$, pa točka M pripada zadanom pravcu;
- za točku N uvrstimo $x = 3$, $y = -3$, pa dobijemo: $7 \cdot 3 - 8 \cdot (-3) - 4 = 21 + 24 - 4 = 41 \neq 0$, pa točka N ne pripada zadanom pravcu.

Dakle, zadanom pravcu pripadaju točke K i M.

8. B. Označimo s x traženi kut, a s y treći (preostali) kut trokuta. Iz podatka da se ti kutovi odnose kao 2 : 5 dobivamo razmjer:

$$x : y = 2 : 5.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera treba biti jednak umnošku unutrašnjih članova, pa slijedi:

$$5 \cdot x = 2 \cdot y.$$

Odatle dijeljenjem s 2 dobivamo:

$$y = \frac{5}{2} \cdot x.$$

Zbroj kutova x, y i 138° treba biti jednak 180° jer je zbroj svih triju unutrašnjih kutova u svakom trokutu jednak 180°. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$x + y + 138° = 180°,$$

odnosno

$$x + y = 180° - 138°,$$

odnosno

$$x + y = 42°.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} \cdot x \\ x + y = 42° \end{cases}$$

Taj sustav riješimo metodom zamjene (supstitucije) tako da prvu jednadžbu sustava uvrstimo u drugu:

$$\begin{aligned} &x + \frac{5}{2} \cdot x = 42° \quad / \cdot 2 \\ &2 \cdot x + 5 \cdot x = 84° \\ &7 \cdot x = 84° \quad /:7 \\ &x = 12° \end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi 12°.

9. **D.** 1 kilogram ima točno $1000 = 10^3$ grama. Stoga $9.1094 \cdot 10^{-31}$ kilograma ima $9.1094 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3 = 9.1094 \cdot 10^{-28}$ grama.

10. **C**. Izračunajmo ukupnu promjenu cijene, tj. za koliko je postotaka krajnja cijena kišobrana veća u odnosu na njegovu početnu cijenu. Primijenit ćemo formulu za strukturnu promjenu osnovne veličine:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100,$$

pri čemu su R rezultantna promjena osnovne veličine, p_1 prva promjena i p_2 druga promjena. U ovu jednakost uvrstimo $p_1 = +20$ (jer se cijena najprije poveća za 20%) i $p_2 = -30$ (jer se nova cijena potom snizi za 30%). Dobivamo:

$$\begin{aligned} &R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{-30}{100}\right) - 100 \\ &R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) - 100 \\ &R = 100 \cdot 1.2 \cdot 0.7 - 100 \\ &R = 84 - 100 \\ &R = -16 \end{aligned}$$

Dakle, krajnja je cijena za 16% manja u odnosu na početnu. Označimo li s C traženu (početnu) cijenu kišobrana, onda je krajnja cijena kišobrana

$$C_1 = C - \frac{16}{100} \cdot C = C \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right) = C \cdot (1 - 0.16) = 0.84 \cdot C.$$

Prema uvjetu zadatka, cijena C_1 mora iznositi 126 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$0.84 \cdot C = 126.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 0.84 dobiva se $C = 150$. Dakle, početna cijena kišobrana je 150 kn.

11. B. Svaki učenik u promatranom razredu dobio je točno jednu ocjenu: *odličan*, *vrlo dobar*, *dobar*, *dovoljan* ili *nedovoljan*. Označimo s x ukupan broj učenika u tom razredu. Prema podatcima iz zadatka, broj učenika koji su dobili ocjenu *odličan* jednak je $\frac{1}{5} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *vrlo dobar* jednak je $\frac{1}{3} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *dobar* jednak je $\frac{3}{10} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *dovoljan* jednak je $\frac{1}{10} \cdot x$, a broj učenika koji su dobili ocjenu *nedovoljan* jednak je 2. Zbroj svih tih brojeva mora biti jednak ukupnom broju učenika u tom razredu, tj. x, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{5} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{3}{10} \cdot x + \frac{1}{10} \cdot x + 2 = x .$$

Pomnožimo tu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 3 i 10, tj. s 30. Dobivamo redom:

$$\begin{gathered} 6 \cdot x + 10 \cdot x + 9 \cdot x + 3 \cdot x + 60 = 30 \cdot x, \\ 6 \cdot x + 10 \cdot x + 9 \cdot x + 3 \cdot x - 30 \cdot x = -60, \\ (-2) \cdot x = -60, \quad /:(-2) \\ x = 30. \end{gathered}$$

Dakle, u razredu je ukupno 30 učenika, pa broj učenika koji su dobili ocjenu *odličan* iznosi $\frac{1}{5} \cdot 30 = 6$.

12. C. Označimo s r_1 polumjer prvoga, a s r_2 polumjer drugoga kruga. Tada je opseg prvoga kruga $O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi$, a opseg drugoga kruga $O_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi$. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost

$$O_1 = 2 \cdot O_2.$$

Uvrštavanjem izraza za O_1 i O_2 dobivamo:

$$\begin{gathered} 2 \cdot r_1 \cdot \pi = 2 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \pi), \quad /:(2 \cdot r_2 \cdot \pi), \\ \frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{2 \cdot r_2 \cdot \pi} = 2, \\ \frac{r_1}{r_2} = 2. \end{gathered}$$

Površina prvoga kruga jednaka je $P_1 = r_1^2 \cdot \pi$, a površina drugoga $P_2 = r_2^2 \cdot \pi$. Dijeljenjem tih dvaju izraza dobijemo:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_1^2 \cdot \pi}{r_2^2 \cdot \pi} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 .$$

Preostaje uvrstiti $\frac{r_1}{r_2} = 2$ i dobiti:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Dakle, površina prvoga kruga je četiri puta veća od površine drugoga kruga.

13. C. Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga broja:

$$a = 2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8,$$
$$b = \sqrt[3]{64} : \frac{1}{3} = \sqrt[3]{2^6} \cdot 3 = 2^{\frac{6}{3}} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12,$$
$$c = \left|-\frac{2}{3}\right| \cdot |2| + 1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Zadatak traži da izračunamo vrijednost izraza $a \cdot c + b$. Ta je vrijednost jednaka:

$$a \cdot c + b = 8 \cdot \frac{7}{3} + 12 = \frac{56}{3} + 12 = \frac{56 + 12 \cdot 3}{3} = \frac{56+36}{3} = \frac{92}{3}.$$

14. A. Uočimo pravokutan trokut ABD s pravim kutom kod vrha A. Duljine njegovih kateta su $|AB| = a$ cm i $|AD| = |BC| = 5.3$, a duljina njegove hipotenuze je $|BD| = a + 3$ cm. Prema Pitagorinu poučku mora vrijediti jednakost:

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2,$$

pa uvrštavanjem gore navedenih veličina dobijemo jednadžbu:

$$a^2 + 5.3^2 = (a + 3)^2.$$

Nju riješimo na uobičajen način primjenom formule za kvadrat zbroja:

$$a^2 - (a + 3)^2 = -(5.3^2),$$
$$a^2 - (a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 9) = -28.09,$$
$$a^2 - a^2 - 6 \cdot a - 9 = -28.09,$$
$$-6 \cdot a = -28.09 + 9,$$
$$-6 \cdot a = -19.09, \quad /:(-6)$$
$$a = \frac{19.09}{6} \text{ cm}.$$

Stoga je površina pravokutnika jednaka

$$P = |AB| \cdot |AD| = a \cdot 5.3 = \frac{19.09}{6} \cdot 5.3 = \frac{19.09 \cdot 5.3}{6} = \frac{101.177}{6} = 16.8628\dot{3} \approx 16.86 \text{ cm}^2.$$

15. C. Označimo s p cijenu jednoga plavoga kamenčića, a s $ž$ cijenu jednoga žutoga kamenčića. Tada je cijena 56 plavih i 6 žutih kamenčića jednaka $56 \cdot p + 6 \cdot ž$ kn, a cijena 12 plavih i 37 žutih kamenčića jednaka $12 \cdot p + 37 \cdot ž$ kn. Obje cijene trebaju biti jednake 400 kn, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 56\cdot p+6\cdot ž=400, \\ 12\cdot p+37\cdot ž=400. \end{cases}$$

Oduzimanjem tih dviju jednadžbi dobijemo:

$$44\cdot p-31\cdot ž=0,$$
$$44\cdot p=31\cdot ž.$$

Odatle dijeljenjem s 31 slijedi

$$ž=\frac{44}{31}\cdot p\,.$$

Budući da je $\frac{44}{31}>1$, razabiremo da je $ž>p$, pa tražimo iznos

$$ž-p=\frac{44}{31}\cdot p-p=\left(\frac{44}{31}-1\right)\cdot p=\left(\frac{44-31}{31}\right)\cdot p=\frac{13}{31}\cdot p\,.$$

Njega ćemo izračunati tako da iz formiranoga sustava odredimo vrijednost nepoznanice p. Uvrštavanjem jednakosti $ž=\frac{44}{31}\cdot p$ npr. u prvu jednadžbu sustava dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&56\cdot p+6\cdot\frac{44}{31}\cdot p=400,\\
&56\cdot p+\frac{264}{31}\cdot p=400, \quad /\cdot 31\\
&1736\cdot p+264\cdot p=12400,\\
&2000\cdot p=12400, \quad /:2000\\
&p=\frac{12400}{2000}=\frac{12400:400}{2000:400}=\frac{31}{5}
\end{aligned}$$

Stoga je traženi iznos razlike cijena jednak

$$ž-p=\frac{13}{31}\cdot p=\frac{13}{31}\cdot\frac{31}{5}=\frac{13}{5}=2.6\text{ kn.}$$

16. A. Iz podatka da je diskriminanta kvadratne funkcije negativna zaključujemo da ta kvadratna funkcija nema realnih nultočaka, odnosno da njezin graf ne siječe os x. Iz podatka da je koeficijent c strogo pozitivan zaključujemo da graf kvadratne funkcije siječe os y u točki $(0, c)$ koja se nalazi na pozitivnom dijelu osi y. (Graf svake kvadratne funkcije oblika $f(x) = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ siječe os y u točki $(0, c)$.) Jedina krivulja koja ne siječe os x i koja os y siječe u točki na pozitivnom dijelu te osi jest parabola A. (Parabole B i C sijeku os x u točno jednoj točki, a parabola D siječe os y u točki koja se nalazi na negativnom dijelu te osi.)

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 287; 18. Traženi iznos jednak je:

S = 8.17 kn/litra · 35.15 litra = 287.1755 kn = (dobiveni broj zaokružujemo na dvije decimale jer tisućiti, desettisućiti itd. dio kune ne postoje i pritom koristimo načelo: ako je treća decimala 5 ili znamenka veća od 5, drugu decimalu povećavamo za 1, a u suprotnom drugu decimalu prepisujemo) = 287.18 kn.

18. $\mathbf{3 \cdot \boldsymbol{a} - 5 \cdot \boldsymbol{b}}$**.** Imamo redom:

$a + 3 \cdot b + 2 \cdot (a - 4 \cdot b) = a + 3 \cdot b + 2 \cdot a - 8 \cdot b = 3 \cdot a - 5 \cdot b$.

19. 2. Pomnožimo zadanu jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s $2 \cdot x$. Tako redom dobivamo:

$$(2 \cdot x + 1) \cdot x = (x^2 - 1) \cdot 2,$$
$$2 \cdot x^2 + x = 2 \cdot x^2 - 2,$$

a odavde poništavanjem člana $2 \cdot x^2$ koji se nalazi na objema stranama posljednje jednakosti izravno slijedi $x = -2$.

20. –2, –1, 0, 1 i 2. Zadani interval sadrži sve realne brojeve koji su istodobno jednaki ili veći od –2, te strogo manji od 3. U tom se intervalu nalazi točno pet cijelih brojeva: –2, –1, 0, 1 i 2.

21. 22. Svaku linearnu funkciju možemo zapisati u obliku $f(x) = a \cdot x + b$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$ konstante. Odredimo te konstante u ovom slučaju. Iz tablice je razvidno da je $f(1) = 1$, pa uvrštavanjem tih podataka u izraz $f(x) = a \cdot x + b$ dobivamo:

$$1 = a \cdot 1 + b,$$

odnosno

$$a + b = 1.$$

Nadalje, iz tablice je razvidno da je $f(2) = 4$, pa uvrštavanjem tih podataka u izraz $f(x) = a \cdot x + b$ dobivamo:

$$4 = 2 \cdot a + b,$$

odnosno

$$2 \cdot a + b = 4.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 2 \cdot a + b = 4. \end{cases}$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, odmah dobivamo $a = 3$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi $b = -2$. Dakle, $f(x) = 3 \cdot x - 2$, pa je konačno

$$f(8) = 3 \cdot 8 - 2 = 24 - 2 = 22.$$

22. $0, \frac{5}{2}$. Imamo redom:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x = 0,$$
$$x \cdot (2 \cdot x - 5) = 0.$$

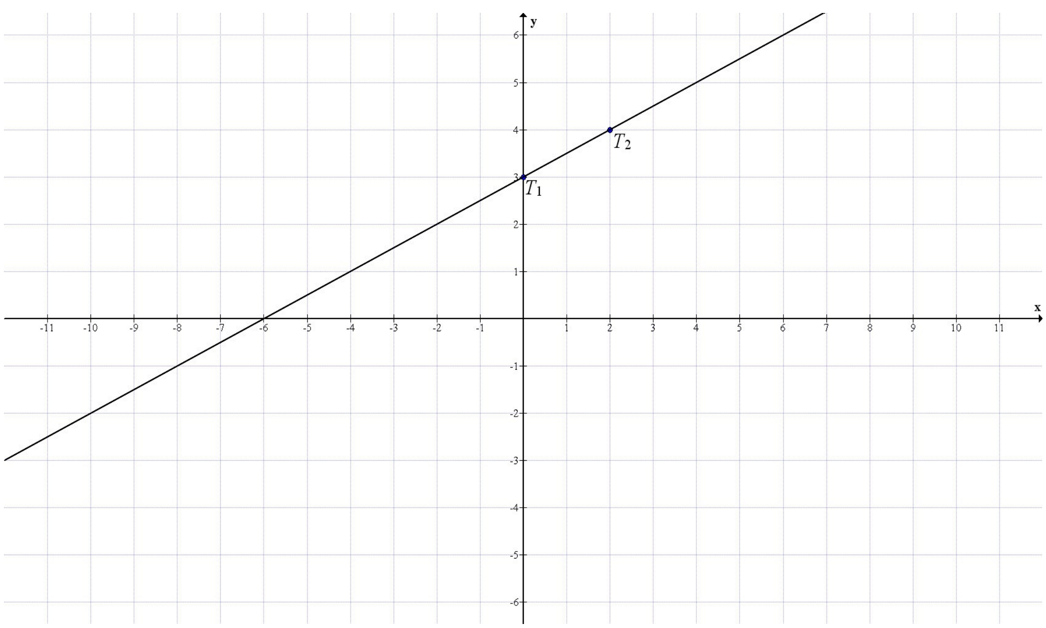
Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je 0 ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak 0.

Tako je ili $x = 0$ ili $2 \cdot x - 5 = 0$, tj. ili $x = 0$ ili $x = \frac{5}{2}$. Stoga su sva rješenja zadane jednadžbe $x =$ $= 0$ i $x = \frac{5}{2}$.

23. Vidjeti Sliku 10. i Sliku 11. Krivulja zadana prvom jednadžbom je pravac. Da bismo ga nacrtali, dovoljno je odrediti neke dvije njegove međusobno različite točke. U jednadžbu pravca uvrstimo npr. $x = 0$ i $x = 2$, pa dobijemo:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Dakle, traženi pravac prolazi točkama $T_1(0, 3)$ i $T_2(1, 4)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojimo ih jednim pravcem. Tako dobijemo sljedeću sliku:



Slika 10.

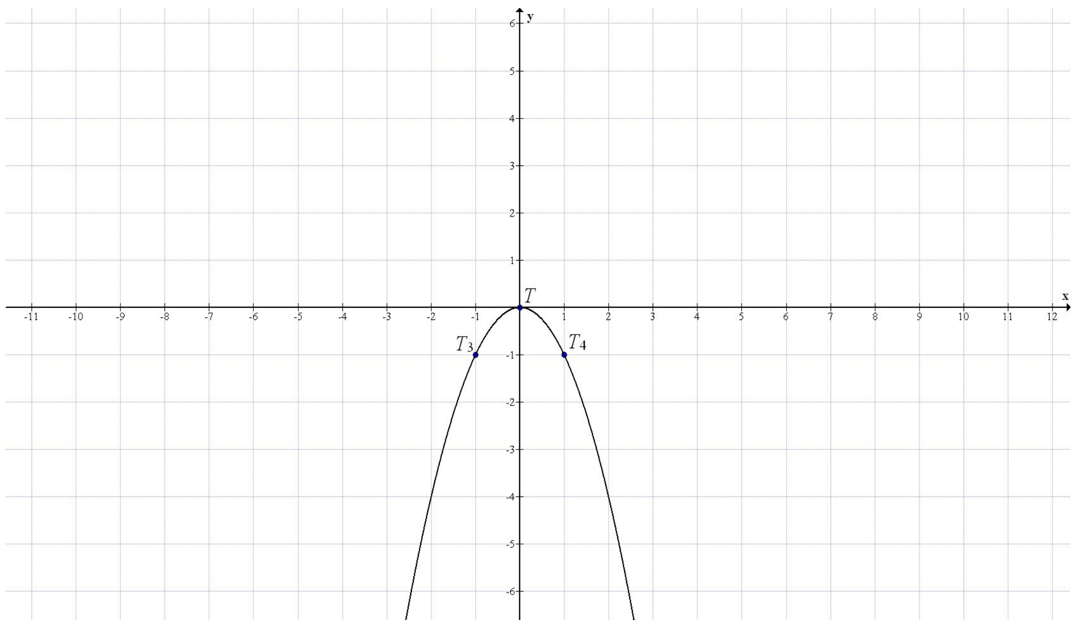
Krivulja zadana drugom jednadžbom je parabola. Svaka je parabola jednoznačno određena zadavanjem bilo kojih triju njezinih međusobno različitih točaka.
Primijetimo da je slobodni član u jednadžbi parabole jednak 0, što znači da parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.
Nadalje, koeficijent uz x u jednadžbi parabole jednak je 0, što znači da parabola ima tjeme u točki čija je apscisa jednaka 0. Već smo utvrdili da parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, pa zaključujemo da je tjeme parabole upravo ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, tj. točka (0, 0).
Koeficijent uz x^2 jednak je –1, pa parabola ima oblik naopakoga slova U, tj. oblik $\cap$.
Tako smo zaključili: parabola ima oblik $\cap$, te siječe os x u svojem tjemenu $T(0, 0)$. Drugih sjecišta s osi x zadana parabola nema, u što se lako možemo uvjeriti riješivši kvadratnu jednadžbu

$$-x^2 = 0$$

po nepoznanici x. Budući da zasad imamo točno jednu točku parabole, preostale dvije točke moramo odrediti sami. Uzmemo npr. $x = -1$ i $x = 1$, pa izračunamo:

$$y_1 = -(-1)^2 = -(1) = -1,$$
$$y_1 = -(1)^2 = -(1) = -1.$$

Dakle, parabola prolazi i točkama $T_4(-1, -1)$ i $T_5(1, -1)$. Ucrtamo točke T, T_4 i T_5 u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo parabolom kao na Slici 11.



Slika 11.

24. 41,2698; 21. Zadatak ćemo riješiti koristeći jednostavno pravilo trojno. Veličine su očito upravno razmjerne, tj. što je veći iznos galona, to je veći i iznos barela. Iz zadanih podataka najprije postavljamo shemu:

↑ 100 galona	↑ 3.1746 barela
1300 galona	x barela

Iz navedene sheme slijedi razmjer:

$$x : 3.1746 = 1300 : 100$$

iz kojega je

$$100 \cdot x = 1300 \cdot 3.1746,$$

odnosno

$$x = \frac{1300 \cdot 3.1746}{100} = 41.2698\,.$$

Dakle, 1300 galona jednako je 41.2698 barela.

Za drugi dio zadatka postavljamo shemu:

$$\begin{array}{ll} \uparrow\; 100 \text{ galona} & \uparrow\; 3.1746 \text{ barela} \\ \;\; y \text{ galona} & \;\; \frac{2}{3} \text{ barela} \end{array}$$

iz koje slijedi razmjer:

$$y : 100 = \frac{2}{3} : 3.1746.$$

Odatle je najprije

$$3.1746 \cdot y = 100 \cdot \frac{2}{3},$$

a potom

$$y = \frac{100 \cdot \frac{2}{3}}{3.1746} = \frac{100 \cdot 2}{3 \cdot 3.1746} = \frac{200}{9.5238} = 21.\overline{000021} \approx 21.$$

Dakle, $\frac{2}{3}$ barela približno iznosi 21 galon.

25. **1.)**. **13.92.** Imamo redom:

$$\frac{m}{0.36} = \frac{10^{-1.3+2}}{0.36} = \frac{10^{0.7}}{0.36} = \frac{5.01187233627272285}{0.36} \approx 13.9218676 \approx 13.92.$$

2.) 1. Ako je $m = 1000 = 10^3$, dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$10^{k+2} = 10^3,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata (jer su baze obiju potencija jednake) slijedi

$$k + 2 = 3,$$

odnosno $k = 1$.

26. Neka je n ukupan broj proizvedenih artikala. Izvedimo formulu koja opisuje zavisnost ukupnih troškova proizvodnje (označimo tu varijablu s t_u) o vrijednosti varijable n. n artikala uzrokuje trošak od $1.50 \cdot n$ kn, pa je ukupni trošak proizvodnje jednak zbroju fiksnoga troška od 300 kn i troškova proizvodnje svih artikala u iznosu od $1.50 \cdot n$ kn. Dakle,

$$t_u = t_u(n) = 300 + 1.50 \cdot n.$$

1.) 1200. U zadanu formulu za t_u uvrstimo $n = 600$. Dobivamo:

$$t_u = 300 + 1.50 \cdot 600 = 300 + 900 = 1200.$$

Dakle, radionica je imala trošak od 1200 kn.

2.) 1734. Tražimo najmanji $n \in \mathbf{N}$ za koji je $t_u \geq 2900$. Uvrštavanjem izraza za t_u u ovu nejednakost dobivamo nejednadžbu

$$300 + 1.50 \cdot n \geq 2900,$$

iz koje lagano slijedi

$$n \geq \frac{2900 - 300}{1.5} = 1733.\dot{3} \ .$$

Najmanji prirodan broj jednak ili veći od $1733.\dot{3}$ jest n_{min} = 1734. Dakle, radionica je proizvela najmanje 1734 artikla.

27. 1.) 115. Tražena vrijednost jednaka je

$$g = \frac{2.16 \cdot 10^6}{\frac{1}{3} \cdot 56542} = \frac{3 \cdot 2.16 \cdot 10^6}{56542} = \frac{6.48 \cdot 10^6}{56542} \approx 114.605072 \approx 115 \text{ stanovnika/km}^2.$$

2.). 143.52. Označimo traženu vrijednost s P. Prema definiciji gustoće naseljenosti mora vrijediti jednakost:

$$2160 = \frac{310000}{P}.$$

Otuda je

$$P = \frac{310000}{2160} \approx 143.5185185 \approx 143.52 \text{ km}^2.$$

3.) 318 431. Gustoća naseljenosti na Grenlandu (označimo je s g_G) jednaka je omjeru broja ukupnoga broja stanovnika na Grenlandu (označimo taj broj s s_G) i površine Grenlanda (označimo taj broj s P_G). U zadatku je navedeno da je s_G = 57 000, P_G = 2 175 600 km^2, pa je gustoća naseljenosti na Grenlandu jednaka

$$g_G = \frac{s_G}{P_G} = \frac{57\,000}{2\,175\,600} \text{ stanovnika/km}^2.$$

Prema podatcima u zadatku, gustoća naseljenosti na Islandu (označimo je s g_I) je 118 puta veća od gustoće naseljenosti na Grenlandu, pa je gustoća naseljenosti na Islandu jednaka

$$g_i = 118 \cdot g_g = 118 \cdot \frac{57000}{2175600} \text{ stanovnika/km}^2.$$

S druge je strane gustoća naseljenosti na Islandu (označimo je s g_I) , opet prema definiciji gustoće naseljenosti, jednaka omjeru ukupnoga broja stanovnika Islanda (označimo taj broj s s_I) i površine Islanda (označimo taj broj s P_I). Prema podatcima iz zadatka je P_I = 103 000 km^2, pa vrijedi jednakost:

$$g_I = \frac{s_I}{P_I} = \frac{s_I}{103\,000} \ .$$

Tako smo dobili dva različita izraza za istu veličinu (g_I). Njihove lijeve strane su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Stoga slijedi da mora vrijediti jednakost

$$\frac{s_I}{103\,000} = 118 \cdot \frac{57\,000}{2\,175\,600}.$$

Odatle je

$$s_I = \frac{118 \cdot 57\,000 \cdot 103\,000}{2\,175\,600} = \frac{118 \cdot 57\,000 \cdot 1\,030}{21\,756} = \frac{118 \cdot 4\,750 \cdot 1\,030}{1813} \approx 318\,430.777716 \approx 318\,431.$$

Dakle, na Islandu živi približno 318 431 stanovnik.

28. Primijetimo da točno jedan pomak u *bilo kojemu* smjeru usporednom s osi potencijala odgovara naponu od 10 V. Naime, jednim pomakom u bilo kojemu smjeru usporednom s osi potencijala dolazimo u točku čiji je potencijal za 10 V manji ili veći u odnosu na potencijal polazne točke. Budući da se napon definira upravo kao razlika potencijala, to znači da jedan pomak u bilo kojemu smjeru usporednom s osi potencijala odgovara razlici potencijala, tj. naponu od 10 V

1.) 30. Da bismo s razine potencijala na kojoj se nalazi točka C došli na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka F, moramo učiniti 3 pomaka prema dolje usporedno s osi potencijala. To znači da je napon između tih dviju točaka jednak 3 · 10 V = 30 V.

2.) A i D. Uočimo da se iz točke F u svaku od točaka C, D, E i G može doći s najviše 5 pomaka usporednih s osi potencijala, pa zaključujemo da napon između bilo kojih dviju različitih točaka iz skupa $\{C, D, E, F, G\}$ nije strogo veći od 5 · 10 = 50 V. Stoga jednu od traženih točaka nužno moramo birati iz skupa $\{A, B\}$.

Lako vidimo da iz točke B s točno 6 pomaka usporednih s osi potencijala prema gore nije moguće doći niti na jednu razinu na kojoj se nalazi barem jedna od svih preostalih točaka. Dakle, napon između točke B i bilo koje točke iz skupa $\{C, D, E, F, G\}$ je strogo veći od 60 V, a lako vidimo da je napon između točaka A i B jednak 20 V. (Trebaju nam točno dva pomaka prema gore usporedno s osi potencijala da s razine potencijala na kojoj se nalazi točka B dođemo na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka A.) Zbog toga niti jedna od traženih točaka ne može biti točka B.

Tako zaključujemo da je jedna od traženih točaka točka A. S točno 6 pomaka prema gore usporedno s osi potencijala dolazimo na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka D. Stoga je napon između tih dviju točaka jednak 60 V.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: KOLOVOZ 2012.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. C. Imamo redom:

$$(-3)^2-4:\frac{0.3}{0.2}=9-4\cdot\frac{0.2}{0.3}=9-4\cdot\frac{2}{3}=9-\frac{8}{3}=\frac{27-8}{3}=\frac{19}{3}.$$

2. B. Imamo redom:

$$\frac{2^0-2^1+2^2-2^3}{(2^0:2^1)\cdot(2^2:2^3)}=\frac{1-2+4-8}{2^{0-1}\cdot 2^{2-3}}=\frac{-5}{2^{0-1+2-3}}=\frac{-5}{2^{-2}}=-5\cdot 2^2=-5\cdot 4=-20.$$

3. A. U intervalu A nalaze se svi cijeli brojevi strogo veći od –10 i strogo manji od –5. To su –9, –8, –7 i –6. Očito ih ima točno četiri.
U intervalu B nalaze se svi cijeli brojevi ne manji od –2 i ne veći od 2. To su –2, –1, 0, 1 i 2. Očito ih ima točno pet.
U intervalu C nalaze se svi cijeli brojevi ne manji od –1 i strogo manji od 2. To su –1, 0 i 1. Očito ih ima točno tri.
U intervalu D nalaze se svi cijeli brojevi strogo veći od 4 i ne veći od 9. To su 5, 6, 7, 8 i 9. Očito ih ima točno 5.
Dakle, točno četiri cijela broja sadrži jedino interval A.

4. C. Ako 100 g kisela vrhnja sadrži 135 kcal, onda 200 g kiseloga vrhnja sadrži dvostruko više kcal, odnosno ukupno 2 · 135 = 270 kcal. Dakle, ako smo pojeli $\frac{2}{3}$ pakiranja od 200 g, onda smo u organizam unijeli ukupno $\frac{2}{3}\cdot 270=\frac{540}{3}=180$ kcal.

5. C. Iz zadane formule izrazimo veličinu p. Imamo redom:

$$n=\frac{(p-307)\cdot 20}{1.76}+d,$$
$$n-d=\frac{(p-307)\cdot 20}{1.76} \quad /\cdot 1.76$$
$$1.76\cdot(n-d)=(p-307)\cdot 20 \quad /:20$$
$$\frac{1.76\cdot(n-d)}{20}=p-307,$$
$$p=\frac{1.76\cdot(n-d)}{20}+307$$

Preostaje nam uvrstiti n = 3417 i p = 42 u posljednju formulu, pa izračunati pripadnu vrijednost veličine p. Dobivamo:

$$p=\frac{1.76\cdot(3417-42)}{20}+307=\frac{1.76\cdot 3375}{20}+307=\frac{5940}{20}+307=297+307=604 \text{ proizvoda.}$$

6. B. Označimo s m broj mladića u toj školi. Prema podatcima u zadatku, broj djevojaka je trostruko veći od broja mladića, pa broj djevojaka iznosi 3 · m. Zbroj broja mladića i broja djevojaka treba biti jednak ukupnom broju maturanata, a taj je jednak 216. Tako dobivamo jednadžbu:

$$m + 3 \cdot m = 216,$$

odnosno

$$4 \cdot m = 216.$$

Odatle dijeljenjem s 4 dobivamo $m = 54$. Traženi broj x jednak je razlici broja djevojaka i broja mladića, pa dobivamo:

$$x = 3 \cdot m - m = 2 \cdot m = 2 \cdot 54 = 108.$$

7. **D.** Označimo traženi broj s x. Prema podatcima u zadatku vrijedi jednakost:

$$\frac{2}{100} \cdot x = 100.$$

Odatle izravno slijedi

$$x = \frac{100 \cdot 100}{2} = \frac{10000}{2} = 5000.$$

8. **D.** Rastavimo brojnik i nazivnik zadanoga razlomka na faktore. Imamo redom:

$2 \cdot a^2 + 4 \cdot a = 2 \cdot a \cdot (a + 2)$;
$a^2 - 4 = a^2 - 2^2$ = prema formuli za razliku kvadrata = $(a - 2) \cdot (a + 2)$.

Stoga je

$$\frac{2 \cdot a^2 + 4 \cdot a}{a^2 - 4} = \frac{2 \cdot a \cdot (a+2)}{(a-2) \cdot (a+2)} = \frac{2 \cdot a}{a-2} .$$

9. **C.** Neka je E nožište visine povučene iz vrha C na stranicu AB. Trokut EBC je pravokutan trokut. Duljine njegovih kateta su $|EB| = 2 \cdot 15$ m $= 30$ m i $|EC| = |AD| = 4 \cdot 15$ m $= 60$ m. Prema Pitagorinu je poučku tada duljina hipotenuze BC jednaka

$$|BC| = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} \approx 67 \text{ m}.$$

Tako je traženi opseg četverokuta $ABCD$ jednak

$$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \approx 8 \cdot 15 + 67 + 6 \cdot 15 + 4 \cdot 15 = 120 + 67 + 90 + 60 = 337 \text{ m}.$$

10. **B**. Grafu funkcije f pripadaju točke $(x, f(x))$. Budući da je f funkcija, za svaki x postoji točno jedna vrijednost $f(x)$. Tako grafu funkcije f ne mogu pripadati točke $(-2, -1)$, $(0, 1)$ i $(2, -1)$ jer je $f(-2) = 0 \neq -1$, $f(0) = 2 \neq 1$ i $f(2) = -2 \neq -1$. Stoga grafu funkcije f pripada jedino točka $T_2(-1, 2)$ jer je $f(-1) = 2$.

11. **C**. Podijelimo 391 s 37:

$$391 : 37 = 10.567567567567\ldots = 10.\overline{567},$$

a potom 104 s duljinom perioda (ukupnim brojem znamenaka koje tvore period), tj. s 3:

$$104 : 3 = 34 \text{ i ostatak } 2.$$

Dakle, imamo ukupno 34 ponavljanja cijeloga perioda $\overline{567}$, te još jedno ponavljanje prvih dviju znamenaka perioda, tj. $\overline{56}$. Stoga se na 104. mjestu nalazi znamenka 6.

12. C. Vrijede jednakosti:

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm} = 10^3 \text{ mm}.$$

Stoga je promjer kuglice iskazan u mm

$$d = 2.2 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3 = 2.2 \cdot 10^{-7} \text{ mm}.$$

Traženi obujam kuglice iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \pi = \frac{d^3}{6} \cdot \pi = \frac{(2.2 \cdot 10^{-7})^3}{6} \cdot \pi = \frac{2.2^3 \cdot (10^{-7})^3}{6} \cdot \pi = \frac{10.648 \cdot 10^{-21}}{6} \cdot \pi \approx$$
$$\approx 5.5752797625706864 \cdot 10^{-21} \approx 5.575 \cdot 10^{-21} \text{ mm}^3.$$

13. B. Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga broja:

$$a = 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^4 \cdot \frac{1^2}{2^2} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4;$$
$$b = \sqrt[3]{27} : \frac{1}{3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9;$$
$$c = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3^2 - 5) = 2 \cdot (9 - 5) = 2 \cdot 4 = 8;$$
$$d = |8| \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| - 1 = 8 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Najmanji od tih brojeva je $d = 3$, a najveći $b = 9$. Njihov je umnožak jednak $3 \cdot 9 = 27$.

14. B. Zadatak ćemo najbrže riješiti korištenjem identiteta:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot x \cdot y = (x + y)^2 - 2 \cdot (x \cdot y).$$

U zadatku je zadano:

$$x + y = 3,$$
$$x \cdot y = 1.$$

Stoga je traženi zbroj kvadrata jednak

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot (x \cdot y) = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7.$$

15. C. Oplošje bazena jednako je zbroju površine dna i površina svih bočnih strana bazena. Stoga je:

$$O = 50 \cdot 25 + 2 \cdot (50 \cdot 2.6 + 25 \cdot 2.6) = 1250 + 2 \cdot (130 + 65) = 1250 + 2 \cdot 195 = 1640 \text{ m}^2.$$

Površina jedne pločice (iskazana u m^2) iznosi:

$$P = (20\ \text{cm})^2 = (20 \cdot 10^{-2}\ \text{m})^2 = (20 \cdot 0.01\ \text{m})^2 = (0.2\ \text{m})^2 = 0.2^2\ \text{m}^2 = 0.04\ \text{m}^2.$$

Stoga je traženi broj pločica jednak

$$n = \frac{O}{P} = \frac{1640}{0.04} = 41000\,.$$

16. **B.** Zadana parabola ima oblik $\cup$, što znači da je $a > 0$. Nadalje, ona siječe os x u točno jednoj točki, što znači da pripadna kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima točno jedno rješenje, odnosno da je diskriminanta te jednadžbe

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0.$$

Iz ove jednakosti slijedi

$$b^2 = 4 \cdot a \cdot c.$$

Lijeva strana ove jednakosti je nenegativan realan broj jer je kvadrat bilo kojega realnoga broja uvijek nenegativan realan broj. Stoga takva mora biti i desna strana. Već smo zaključili da je $a > 0$, pa će umnožak $4 \cdot a \cdot c$ biti nenegativan realan broj ako i samo ako je $c \geq 0$.

Preostaje primijetiti: ako bi bilo $c = 0$, onda iz $b^2 = 4 \cdot a \cdot c$ slijedi $b^2 = 0$, odnosno $b = 0$. Tako bismo u tom slučaju imali kvadratnu funkciju $f(x) = a \cdot x^2$ čiji graf nužno prolazi točkom $(0, 0)$, tj. ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Zadani graf očito ne prolazi točkom $(0, 0)$, pa ne može biti $c = 0$.

Zaključimo: za veličine D, a i c vrijede nejednakosti $D = 0$, $a > 0$ i $c > 0$.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. **4.97.** Ako 200 g sira ribanca kupimo samo u vrećicama po 40 g, kupit ćemo ukupno $n_1 = \dfrac{200}{40} = 5$ vrećica i platiti ih $C_1 = 5 \cdot 6.99 = 34.95$ kn. Kupimo li sir u vrećicama po 100 g, kupit ćemo ukupno $n_2 = \dfrac{200}{100} = 2$ vrećice i platiti ih $C_2 = 2 \cdot 14.99 = 29.98$ kn. Stoga je tražena razlika u cijeni jednaka $\Delta C = C_1 - C_2 = 34.95 - 29.98 = 4.97$ kn.

18. $\dfrac{2}{3} \cdot (1-a) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{3} \cdot a = \dfrac{2 - 2 \cdot a}{3}$ **.** Imamo redom:

$$\frac{3 \cdot b}{2} = 1 - a \ / \cdot 2$$
$$3 \cdot b = 2 \cdot (1-a) \ / : 3$$
$$b = \frac{2}{3} \cdot (1-a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot a = \frac{2 - 2 \cdot a}{3}$$

19. $\boldsymbol{-a^2 - 2 \cdot a - 3}$**.** Imamo redom:

$$(a+3) \cdot (2 \cdot a - 1) - 3 \cdot a \cdot (a+1) = 2 \cdot a^2 + 6 \cdot a - a - 3 - 3 \cdot a^2 - 3 \cdot a = -a^2 + 2 \cdot a - 3\,.$$

20. –1. Pomnožimo zadanu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj. Ti nazivnici su 2 i 3, njihov najmanji zajednički višekratnik jednak je 6, pa zadanu jednadžbu množimo sa 6. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&\frac{x+1}{2}-1=\frac{x-2}{3} \quad /\cdot 6\\&3\cdot(x+1)-6=2\cdot(x-2)\\&3\cdot x+3-6=2\cdot x-4\\&3\cdot x-2\cdot x=-4-3+6\\&x=-1.\end{aligned}$$

21. $x \le -\frac{1}{2}$ ili $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right]$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}&1-7\cdot x \ge 2-5\cdot x\\&-7\cdot x+5\cdot x \ge 2-1\\&-2\cdot x \ge 1\end{aligned}$$

Dijeljenjem s (–2) mijenja se znak nejednakosti, pa slijedi:

$$x \le -\frac{1}{2},$$

odnono, zapisano u obliku intervala,

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right].$$

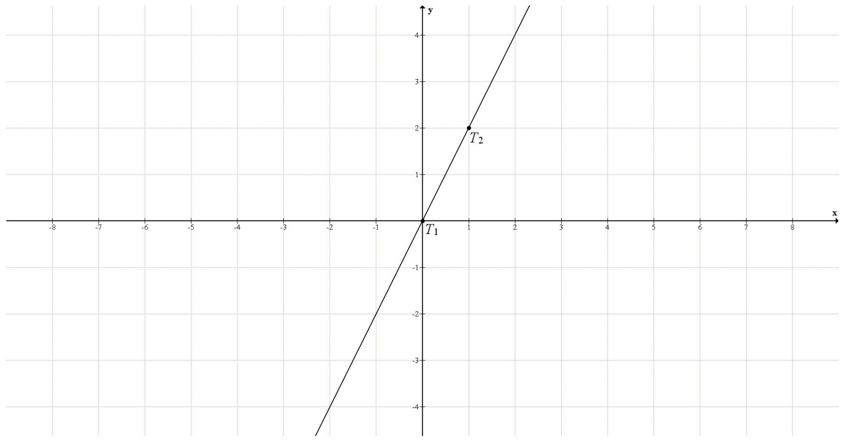
22. –9; 1 ili 1; –9. Budući da vrijede jednakosti $25 = 5^2$ i $25 = (-5)^2$, moguća su točno dva slučaja:

1.) $x + 4 = -5$, a odavde je $x = -5 - 4 = -9$;
2.) $x + 4 = 5$, a odavde je $x = 5 - 4 = 1$.

23. Vidjeti Sliku 12. i Sliku 13. Krivulja zadana prvom jednadžbom je pravac. Da bismo ga nacrtali, dovoljno je odrediti neke dvije njegove međusobno različite točke. U jednadžbu pravca uvrstimo npr. $x = 0$ i $x = 1$, pa dobijemo:

$$\begin{aligned}&y_1 = 2\cdot 0 = 0\\&y_2 = 2\cdot 1 = 2.\end{aligned}$$

Dakle, traženi pravac prolazi točkama $T_1(0,\ 0)$ i $T_2(1,\ 2)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojimo ih jednim pravcem. Tako dobijemo sljedeću sliku:



Slika 12.

Krivulja zadana drugom jednadžbom je parabola. Svaka je parabola jednoznačno određena zadavanjem bilo kojih triju njezinih međusobno različitih točaka. Mi ćemo odrediti nultočke pripadne kvadratne funkcije (tj. sjecišta parabole s osi x) i tjeme parabole.

Riješimo li kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 1 = 0,$$

dobit ćemo $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Dakle, sjecišta parabole s osi x su točke $T_1(-1, 0)$ i $T_2(1, 0)$.

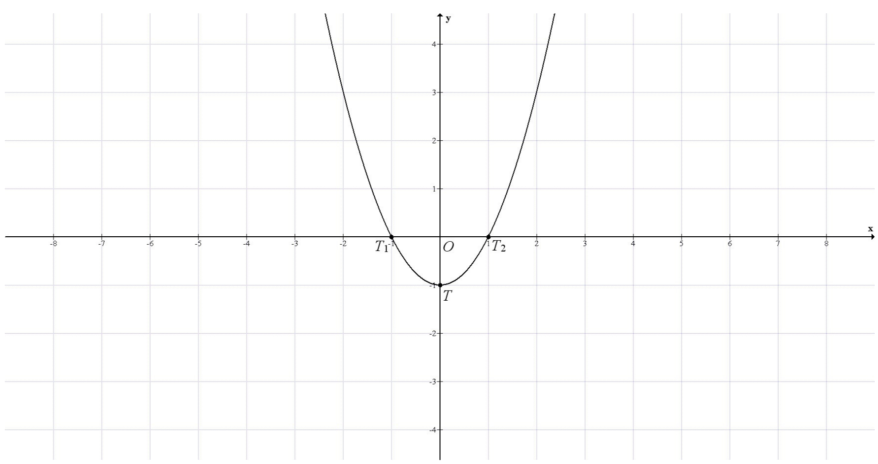
Tjeme parabole odredit ćemo tako da najprije očitamo koeficijente pripadne kvadratne funkcije:

$$a = 1, b = 0, c = -1,$$

pa izračunamo:

$$T\left(-\frac{b}{2\cdot a}, \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}\right) = \left(-\frac{0}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot(-1) - 0^2}{4\cdot 1}\right) = \left(0, \frac{-4-0}{4}\right) = (0, -1)$$

Dakle, parabola prolazi točkama $T(0, -1)$, $T_1(-1, 0)$ i $T_2(1, 0)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo parabolom kao na Slici 13.



Slika 13.

24. 96°46'; ≈8.5. Zbroj mjera svih triju kutova trokuta treba biti jednak 180°. Mjera dvaju od tih triju kutova jednaka je 41°37', pa slijedi:

β = 180° – 2 · 41°37' = 180° – 82°74' = 180° – (82° + 60' + 14') = 180° – (82° + 1° + 14') = 180° – – 83°14' = 179°60' – 83°14' = (179 – 83)° + (60 – 14)' = 96°46'.

Nadalje, površinu jednakostraničnoga trokuta čija stranica ima duljinu a računamo prema formuli:

$$P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \, .$$

Iz te formule izrazimo vrijednost a:

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \quad / \cdot 4 \\ 4 \cdot P &= a^2 \cdot \sqrt{3} \quad / : \sqrt{3} \\ a^2 &= \frac{4 \cdot P}{\sqrt{3}} \quad / \sqrt{\ } \\ a &= \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{P}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{P}}{\sqrt[4]{3}} \end{aligned}$$

U posljednju jednakost uvrstimo P = 31.3, pa dobijemo:

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt{31.3}}{\sqrt[4]{3}} \approx \frac{2 \cdot 5.59464029228}{1.316074013} \approx 8.502014685 \approx 8.5 \text{ cm.}$$

25. 1.) $\frac{4}{7} \cdot a$ **.** Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 5, a drugu s 3:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x - 15 \cdot y &= 5 \cdot a \\ 9 \cdot x + 15 \cdot y &= 3 \cdot a \end{aligned} .$$

Zbrojimo dobivene jednadžbe:

$$14 \cdot x = 8 \cdot a.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 14 dobijemo $x = \frac{8}{14} \cdot a = \frac{4}{7} \cdot a$.

2.) –2. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 10^{1+x} &= 0.3 \ /:3 \\ 10^{1+x} &= 0.1 \\ 10^{1+x} &= \frac{1}{10} \\ 10^{1+x} &= 10^{-1} . \end{aligned}$$

Odatle izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu

$$1 + x = -1,$$

iz koje je izravno $x = -1 - 1 = -2$.

26. 1.) 127.324. U zadanu formulu za g uvrstimo $r = 2$. Dobivamo:

$$g = \frac{200}{\pi} \cdot 2 = \frac{400}{\pi} \approx 127.3239544735 \approx 127.324 \text{ gradi.}$$

2.) $\frac{3}{4} \cdot \pi$. Iz zadane formule izrazimo veličinu r. Imamo:

$$g = \frac{200}{\pi} \cdot r \quad / \cdot \pi$$
$$g \cdot \pi = 200 \cdot r \quad / : 200$$
$$r = \frac{\pi}{200} \cdot g$$

U dobivenu formulu uvrstimo $g = 150$, pa dobijemo:

$$r = \frac{\pi}{200} \cdot 150 = \frac{150}{200} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \pi \text{ radijana}$$

27. 1.) 80. Iz zadanoga grafa slijedi da su količina u mjericama i cijena jagoda upravno razmjerne veličine, te da se za 20 kn mogu kupiti 3 mjerice jagoda. Stoga postavljamo shemu:

$$\begin{array}{l|l} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ \;\; x \text{ kn} & \;\; 12 \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$x : 20 = 12 : 3,$$

iz kojega je

$$3 \cdot x = 20 \cdot 12.$$

Odatle dijeljenjem s 3 dobijemo $x = 80$.

28. 2.) 15. Postavljamo shemu:

$$\begin{array}{l|l} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ \;\; 100 \text{ kn} & \;\; y \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$y : 3 = 100 : 20,$$

iz kojega je

$$20 \cdot y = 100 \cdot 3.$$

Odatle dijeljenjem s 20 dobijemo $y = 15$.

3.) 150. Od 9 kg = 900 dag jagoda može se napraviti $m = \frac{900}{40} = 22.5$ mjerica. Kao u **1.)** postavljamo shemu:

$$\begin{array}{ll} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ z \text{ kn} & 22.5 \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$z : 20 = 22.5 : 3,$$

iz kojega je

$$3 \cdot z = 22.5 \cdot 20.$$

Odatle dijeljenjem s 3 dobijemo $z = 150$.

29. **1.) 153.75.** Cijena prijevoza paketa od 15 kg je 35 kn, a cijena prijevoza jednoga bicikla je 90 kn. Stoga cijena prijevoza paketa i bicikla bez obračunanoga PDV-a iznosi

$$C = 35 + 90 = 125 \text{ kn.}$$

Traženu cijenu dobit ćemo tako da cijenu C povećamo za postotak PDV-a, odnosno za 23% njezine vrijednosti:

$$C_1 = C + \frac{23}{100} \cdot C = \left(1 + \frac{23}{100}\right) \cdot C = (1 + 0.23) \cdot C = 1.23 \cdot C = 1.23 \cdot 125 = 153.75 \text{ kn.}$$

2.) 36.9. Cijena prijevoza paketa mase 52 kg (bez obračunanoga PDV-a) iznosi 60 kn. Na tu cijenu treba obračunati i dodati iznos PDV-a. Analogno kao u **1.)**, dobijemo:

$$C_1 = 1.23 \cdot C = 1.23 \cdot 60 = 73.8 \text{ kn.}$$

Dakle, Ivan je prijevoz platio 73.80 kn. Nadoplata u slučaju vraćanja pošiljke iznosi 50% te vrijednosti, pa je Ivan morao nadoplatiti još

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot C_1 = \frac{1}{2} \cdot 73.8 = 36.9 \text{ kn.}$$

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: STUDENI 2012.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Imamo redom:

$$\frac{9+7\cdot 6}{18-4\cdot 2}=\frac{9+42}{18-8}=\frac{51}{10}=5.1$$

2. **B.** Pomoću kalkulatora nalazimo $2 \cdot 10^{1.5} = 63.2455532$. Četvrta decimala je očito jednaka 5, pa se zaokruživanje vrši tako da se cjelobrojni dio i prve dvije decimale prepišu, a treća decimala poveća za 1. Tako se dobiva broj 63.246.

3. **B.** $-\sqrt{3}$ i $\sqrt{5}$ su iracionalni brojevi, pa nisu cijeli brojevi. $-\frac{1}{3}$ i $\frac{3}{4}$ su racionalni brojevi koji također nisu cijeli brojevi. Stoga zadani skup sadrži točno tri cijela broja: –5, 0 i 6.

4. **A.** Točka A se nalazi u četvrtom kvadrantu, pa je njezina prva koordinata strogo pozitivan realan broj, a druga strogo negativan realan broj. Stoga tvrdnja **A** nije točna. Sve ostale tvrdnje su točne.

5. **D.** Ako je zadana funkcija f, onda njezin graf mora prolaziti točkama $(x, f(x))$, za svaki x iz domene funkcije f. Stoga graf zadane funkcije f mora prolaziti točkama (–3, –3), (–2, –2,), (–1, 0), (0, 2) i (1, 4). Od tih se točaka u ponuđenim odgovorima nalazi jedino posljednja točka.

6. **D.** Razdijelimo broj 168 u omjeru 5 : 7 prema jednostavnom računu diobe. Najprije izračunamo omjerni (diobeni) koeficijent

$$k=\frac{168}{5+7}=\frac{168}{12}=14,$$

pa potom odmah dobivamo da je traženi broj neprodanih ulaznica jednak

$$N = 7 \cdot 14 = 98.$$

7. **C.** Neka je x nepoznata osnovna vrijednost. Koristeći zakon asocijativnosti množenja realnih brojeva imamo redom:

$$\frac{45}{100}\cdot x=\left(\frac{45}{14}\cdot\frac{14}{100}\right)\cdot x=\frac{45}{14}\cdot\left(\frac{14}{100}\cdot x\right)=\frac{45}{14}\cdot 343=\frac{45}{2}\cdot 49=\frac{2205}{2}=1102.5\,.$$

8. **B.** Ako se materijal za jednoga klijenta može spakirati za 3 minute, onda se materijal za 1564 klijenta može spakirati za $1564 \cdot 3 = 4692$ minuta. 8 radnih sati iznosi $8 \cdot 60 = 480$ minuta, pa je traženi broj radnika zapravo najmanji prirodan broj jednak ili veći od $\frac{4692}{480}=\frac{391}{40}=9.775$. Taj je broj jednak 10.

9. **D.** Prema definiciji, interval $\langle a, b\rangle$ sadrži sve realne brojeve strogo veće od a i strogo manje od b. Stoga interval $\langle 1, 4\rangle$ sadrži sve realne brojeve strogo veće od 1 i strogo manje od 4.

10. **A.** U brojniku izlučimo zajednički faktor 2, pa dobivamo:

$$\frac{4+2\cdot\sqrt{a}}{4}=\frac{2\cdot\left(2+\sqrt{a}\right)}{4}=\frac{2+\sqrt{a}}{2}$$

11. **A**. Primjenom formule za razliku kvadrata imamo redom:

$$\frac{2\cdot a+3}{a^2-16}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3}{a^2-4^2}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3}{(a-4)\cdot(a+4)}-\frac{1}{a+4}=\frac{2\cdot a+3-1\cdot(a-4)}{(a-4)\cdot(a+4)}=$$
$$=\frac{2\cdot a+3-a+4}{(a-4)\cdot(a+4)}=\frac{a+7}{(a-4)\cdot(a+4)}=\frac{a+7}{a^2-16}$$

12. **C.** Zemljište možemo podijeliti na kvadrat stranice $a = 4 \cdot 10$ m = 40 m i polukrug polumjera $r =$ $= 2 \cdot 10$ m = 20 m. Stoga je traženi opseg zemljišta jednak zbroju duljina triju stranica kvadrata i duljine polukružnice, tj.

$$O=3\cdot a+\frac{1}{2}\cdot(2\cdot r\cdot\pi)=3\cdot a+r\cdot\pi=3\cdot 40+20\cdot\pi\approx 182.8\approx 183 \text{ m.}$$

13. **D.** Izračunajmo najprije vrijednost svakoga pojedinoga broja. Imamo redom:

$$a=3-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=3-5\cdot\frac{1}{4}=3-\frac{5}{4}=\frac{12-5}{4}=\frac{7}{4},$$
$$b=\sqrt{1.44}:\frac{1}{5}=\sqrt{\frac{144}{100}}\cdot 5=\frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}}\cdot 5=\frac{12}{10}\cdot 5=\frac{6}{5}\cdot 5=6,$$
$$c=\left|4\frac{1}{4}-7\right|=\left|\frac{4\cdot 4+1}{4}-7\right|=\left|\frac{16+1-7\cdot 4}{4}\right|=\left|\frac{17-28}{4}\right|=\left|-\frac{11}{4}\right|=\frac{11}{4},$$
$$d=2^{-1}+6^{-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Tako slijedi:

$$\frac{a+b}{c-d}=\frac{\frac{7}{4}+6}{\frac{11}{4}-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{7+4\cdot 6}{4}}{\frac{11\cdot 3-4\cdot 2}{4\cdot 3}}=\frac{\frac{7+24}{4}}{\frac{33-8}{4\cdot 3}}=\frac{\frac{31}{4}}{\frac{25}{4\cdot 3}}=\frac{31\cdot 4\cdot 3}{25\cdot 4}=\frac{372}{100}=3.72\,.$$

14. **C.** Neka su x ukupan broj novčanica vrijednosti 20 kn i y ukupan broj novčanica vrijednosti 10 kn. Iz podatka da Marko ima ukupno 16 novčanica slijedi jednakost:

$$x + y = 16.$$

Ukupna vrijednost svih novčanica vrijednosti 20 kn iznosi $x \cdot 20$ kn, a ukupna vrijednost svih novčanica vrijednosti 10 kn iznosi $y \cdot 10$ kn. Iz podatka da ukupna vrijednost svih 16 novčanica treba biti jednaka 250 kn slijedi jednakost:

$$20 \cdot x + 10 \cdot y = 250,$$

odnosno, nakon dijeljenja s 10,

$$2 \cdot x + y = 25.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$x + y = 16,$$

$$2 \cdot x + y = 25.$$

Oduzmemo li te dvije jednadžbe, dobit ćemo:

$$-x = -9.$$

Odatle slijedi $x = 9$. Uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava izravno slijedi $y = 7$. Razlika ukupne vrijednosti svih novčanica vrijednosti 20 kn i ukupne vrijednosti svih novčanica vrijednosti 10 kn iznosi $20 \cdot x - 10 \cdot y = 20 \cdot 9 - 10 \cdot 7 = 180 - 7 = 110$ kn.

15. B. Neka su a i b duljine stranica zadanoga pravokutnika. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $a > b$. Iz podatka da se duljine stranica razlikuju za 7 cm slijedi:

$$a - b = 7.$$

Površina zadanoga pravokutnika je $P = a \cdot b$ cm^2. Ako se dulja stranica zadanoga pravokutnika smanji za 2 cm, duljina nove stranice je $a_1 = a - 2$ cm. Ako se kraća stranica zadanoga pravokutnika produlji za 1 cm, duljina nove stranice je $b_1 = b + 1$. Površina tako dobivenoga pravokutnika je

$$P_1 = a_1 \cdot b_1 = (a - 2) \cdot (b + 1) = a \cdot b - 2 \cdot b + a - 2 \text{ cm}^2.$$

Površina novoga pravokutnika mora biti jednaka površini zadanoga pravokutnika, tj. mora vrijediti jednakost $P = P_1$. Tako dobivamo:

$$a \cdot b = a \cdot b - 2 \cdot b + a - 2,$$

odnosno, nakon reduciranja i sređivanja,

$$a - 2 \cdot b = 2.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$a - b = 7,$$
$$a - 2 \cdot b = 2.$$

Oduzimanjem zadanih jednadžbi odmah dobivamo $b = 5$ cm, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu sustava izravno slijedi $a = 12$ cm. Veći opseg ima zadani pravokutnik jer, ako opseg polaznoga pravokutnika označimo s O, a opseg drugoga pravokutnika s O_1, vrijedi jednakost:

$O - O_1 = 2 \cdot (a + b) - 2 \cdot (a_1 + b_1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot a_1 - 2 \cdot b_1 = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot (a - 2) - 2 \cdot (b + 1) = 2 \cdot a + 2 \cdot b - 2 \cdot a + 4 - 2 \cdot b - 2 = 2.$

Stoga je traženi opseg jednak opsegu zadanoga pravokutnika, a taj je jednak

$$O = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (12 + 5) = 2 \cdot 17 = 34 \text{ cm}.$$

16. C. Vidimo da zadana parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava, tj. točkom (0, 0). To znači da je $f(0) = 0$, pa uvrštavanjem $x = 0$ u propis funkcije odmah dobivamo $c = 0$. Nadalje, parabola ima oblik $\cup$, što znači da je vodeći koeficijent pripadne kvadratne funkcije strogo pozitivan. Dakle, vrijedi nejednakost $a > 0$. Napokon, parabola siječe os apscisa u dvije različite točke, što znači da pripadna kvadratna funkcija ima dvije različite realne nultočke. To je moguće ako i samo ako je diskriminanta pripadne kvadratne jednadžbe strogo pozitivan realan broj, tj. $D > 0$. Zaključimo: $D > 0$, $a > 0$ i $c = 0$.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 29.63. Traženi postotak je jednak

$$p = \frac{8}{27} \cdot 100 = \frac{800}{27} \approx 29.6296\% \approx 29.63\% .$$

18. $2 \cdot a + 2 \cdot b$ ili $2 \cdot b + 2 \cdot a$. Pomnožimo zadanu jednakost s 2. Dobivamo:

$$2 \cdot b = c - 2 \cdot a$$
$$c = 2 \cdot a + 2 \cdot b$$

19. $4 \cdot b^2 + 12 \cdot b$. Imamo redom:

$$7 \cdot b^2 + 6 \cdot b - 3 \cdot b \cdot (b-2) = 7 \cdot b^2 + 6 \cdot b - 3 \cdot b^2 + 6 \cdot b = 4 \cdot b^2 + 12 \cdot b.$$

20. $-\frac{7}{2}$. Pomnožimo zadanu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 3 i 5, tj. s 15. Imamo redom:

$$5 \cdot (x-1) + 1 \cdot 15 = 3 \cdot (x+1)$$
$$5 \cdot x - 5 + 15 = 3 \cdot x + 3$$
$$5 \cdot x - 3 \cdot x = 3 + 5 - 15$$
$$2 \cdot x = -7$$

Odavde dijeljenjem s 2 dobivamo $x = -\frac{7}{2}$.

21. $x < -\frac{11}{5}$ ili $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{5} \right\rangle$. Imamo redom:

$$4 \cdot x - 9 \cdot x > 11$$
$$(-5) \cdot x > 11$$

Dijeljenjem s (–5) mijenja se znak nejednakosti, pa slijedi $x < -\frac{11}{5}$, odnosno, ekvivalentno, $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{5} \right\rangle$.

22. 1 726; 6. U zadanu formulu najprije uvrstimo $s = 3$ i $b = 35$, pa dobivamo:

$$C = 342 \cdot 3 + 20 \cdot 35 = 1\,026 + 700 = 1\,726 \text{ kn.}$$

Nadalje, uvrstimo li u zadanu formulu $C = 2\,892$ i $b = 42$, dobit ćemo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$2\,892 = 342 \cdot s + 20 \cdot 42.$$

Riješimo je na uobičajen način:

$$2\,892 = 342 \cdot s + 20 \cdot 42,$$
$$2\,892 = 342 \cdot s + 840,$$

$$342 \cdot s = 2\,892 - 840,$$
$$342 \cdot s = 2\,052.$$

Odatle dijeljenjem s 342 slijedi $s = 6$.

23. –1; 7 ili 7; –1. Broj 16 je kvadrat točno dvaju cijelih brojeva: –4 i 4. Stoga mora vrijediti ili $x - 3 = -4$ ili $x - 3 = 4$. Iz prve se jednadžbe dobije $x = -1$, a iz druge $x = 7$. Dakle, sva rješenja polazne jednadžbe su brojevi –1 i 7.

24. Vidjeti Sliku 14. i Sliku 15. Krivulja $y = -x + 3$ je pravac. Za crtanje bilo kojega pravca dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih dviju različitih točaka toga pravca. Stoga uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 1$, pa izračunajmo pripadne vrijednosti varijable y. Dobivamo:

x	0	1
y	$-0 + 3 = 0 + 3 = 3$	$-1 + 3 = 2$

Dakle, u prvi pravokutni koordinatni sustav treba ucrtati točke $T_1 = (0, 3)$ i $T_2 = (1, 2)$, te ih spojiti jednim pravcem. Dobiva se graf prikazan na Slici 14.

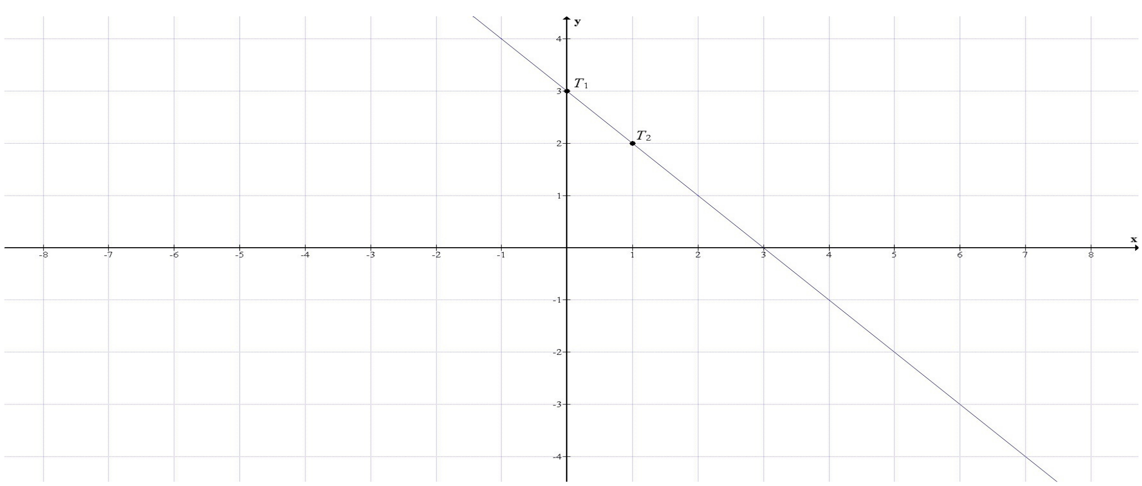
Druga krivulja je parabola. Svaka parabola je jedinstveno određena zadavanjem bilo kojih triju različitih točaka te parabole. Najpodesnije je izabrati sjecišta s osi apscisa, te tjeme parabole. Odredimo zasebno navedene točke.
Sjecišta s osi apscisa dobijemo tako da u jednadžbu parabole uvrstimo $y = 0$, te riješimo dobivenu jednadžbu po nepoznanici x. Imamo:

$$x^2 - 4 = 0,$$
$$x^2 = 4.$$

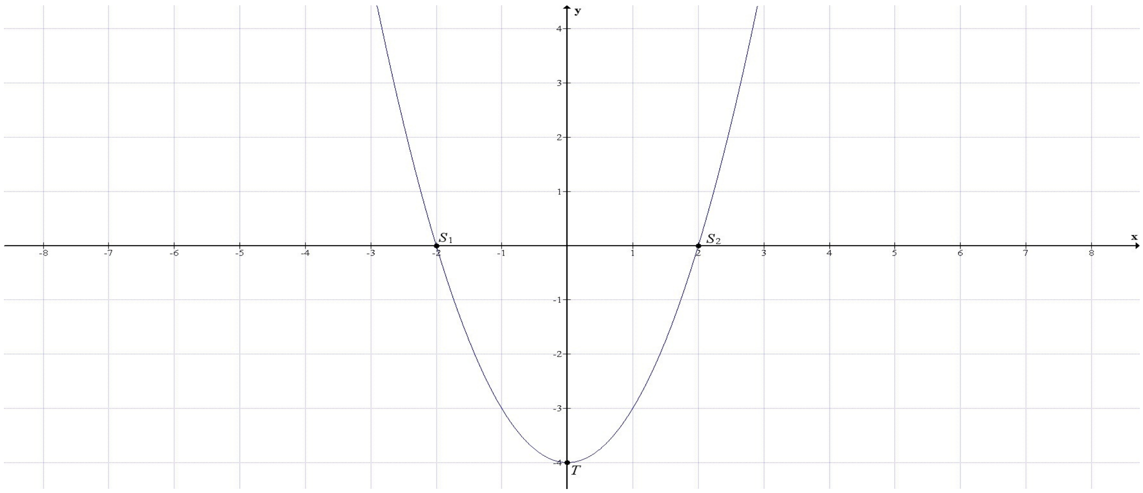
Broj 4 kvadrat je točno dvaju cijelih brojeva: –2 i 2. Stoga jednadžba $x^2 = 4$ ima točno dva različita realna rješenja: $x_1 = -2$ i $x_2 = 2$. Dakle, tražena parabola prolazi točkama $S_1 = (-2, 0)$ i $S_2 = (2, 0)$.

Preostaje odrediti tjeme parabole. U tu svrhu prisjetimo se da svaka parabola čija jednadžba ima oblik $y = a \cdot x^2 + c$ ima tjeme u točki $T = (0, c)$. Stoga je tjeme tražene parabole točka $T = (0, -4)$.

Na taj smo način odredili tri različite točke parabole. Tražena krivulja prikazana je na Slici 15.



Slika 14.



Slika 15.

25. **1.) 35 – 3 · *a* ili –3 · *a* + 35**. Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 5, a drugu s (–3). Dobivamo:

$$\begin{cases} 10 \cdot x + 15 \cdot y = 35 \\ -9 \cdot x - 15 \cdot y = -3 \cdot a \end{cases}$$

Odatle zbrajanjem jednadžbi dobivamo $x = 35 - 3 \cdot a$ ili $x = -3 \cdot a + 35$.

2.) 3. Podijelimo zadanu jednadžbu s 200. Dobivamo:

$$10^{1-x} = \frac{2}{200}$$
$$10^{1-x} = \frac{1}{100}$$
$$10^{1-x} = \frac{1}{10^2}$$
$$10^{1-x} = 10^{-2}$$

Uspoređivanjem eksponenata slijedi $1 - x = -2$, a odatle je $x = 3$.

26. **1.) 53°54'**. Neka je α tražena mjera kuta. Promatrani jednakokračni trokut ima tri kuta. Mjere dvaju od njih (onih uz osnovicu) jednake su α, dok je mjera trećega (kuta nasuprot osnovici) 72°12'. Zbroj svih triju mjera treba biti jednak 180°, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$2 \cdot \alpha + 72°12' = 180°,$$

tj.

$$2 \cdot \alpha = 107°48'.$$

Odatle dijeljenjem s 2 (pri čemu zasebno dijelimo stupnjeve, a zasebno minute) slijedi α = = 53.5°24'' = 53°+ 0.5° + 24' = 53° + (0.5 · 60)' + 24' = 53° + 30' + 24' = 53°54''.

2.) $66 \cdot \sqrt{14}$**.** Izračunajmo najprije duljinu visine povučene na osnovicu. Ako je b = 25 cm, a a = = 22 cm, onda je duljina visine na osnovicu jednaka

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - \left(\frac{22}{2}\right)^2} = \sqrt{25^2 - 11^2} = \sqrt{625 - 121} = \sqrt{504} = \sqrt{36 \cdot 14} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{14} = 6 \cdot \sqrt{14} \text{ cm.}$$

Stoga je tražena površina jednaka:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v = \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 6 \cdot \sqrt{14} = 11 \cdot 6 \cdot \sqrt{14} = 66 \cdot \sqrt{14} \text{ cm}^2.$$

27. 1.) 55.25. 2 dana imaju ukupno 2 · 24 = 48 sati, dok je 15 minuta = $\frac{15}{60} = \frac{1}{4} = 0.25$ sati. Stoga je traženo vrijeme jednako 48 + 7 + 0.25 = 55.25 sati.

2.) 13 000. 1 cm ima 10 mm, pa 1 cm^3 ima 10^3 = 1 000 mm^3. Dakle, 13 cm^3 ima 13 · 1 000 = = 13 000 mm^3.

3.) ≈ 133.91. Preračunajmo najprije zadanu brzinu u brzinu iskazanu u m/s:

$$248 \text{ km/h} = \frac{248\ 000 \text{ m}}{60 \cdot 60 \text{ s}} = \frac{248\ 000 \text{ m}}{3\ 600 \text{ s}} = \frac{620}{9} \text{ m/s.}$$

Brzina iskazana u m/s i brzina iskazana u čvorovima su upravno razmjerne veličine, pa možemo formirati shemu:

$$\begin{array}{ll} \uparrow\ 1 \text{ čvor} & 0.51444 \text{ m/s}\ \uparrow \\ x \text{ čvorova} & \frac{620}{9} \text{ m/s} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga trojnoga pravila dobivamo razmjer:

$$x : 1 = \frac{620}{9} : 0.51444 .$$

Odatle odmah slijedi $x = \frac{620}{9 \cdot 0.51444} = \frac{620}{4.62996} = 133.91044415 \approx 133.91$ čvor.

28. 1.) 50.00. Za knjigu mase 325 g plaća se osnovna cijena od 24.50 kn jer ta masa pripada intervalu ⟨250, 500]. Podijelimo li 325 s 20, dobit ćemo količnik 16 i ostatak 5. To znači da ćemo platiti još 17 dopunskih cijena za Sjevernu Ameriku, odnosno još 17 · 1.5 = 25.50 kn. Dakle, ukupno ćemo platiti 24.50 + 25.50 = 50.00 kn.

2.) 1 120; 1 140. Neka je m masa poslane knjige. Osnovne cijene slanja knjiga su jednake, pa razlika u cijeni nastaje isključivo plaćanjem dopunskih cijena. Na svakih 20 grama mase nastaje razlika u cijeni čiji je iznos 1.70 – 1 = 0.70 kn. Podijelimo li 39.90 s 0.70 dobit ćemo 57 i ostatak 0. Dakle, doplatili smo ukupno 57 dopunskih cijena, što znači da masa m pripada intervalu čije su granice 56 · 20 = 1 120 g (dotična masa se ne uračunava jer za knjigu mase točno 1 120 g plaćamo točno 56 dopunskih cijena) i 57 · 20 = 1 140 g. Dakle, $m \in$ ⟨1 120, 1 140].

visoka poslovna škola par

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: LIPANJ 2013.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **B.** Primijetimo da je $\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$. Stoga se u zadanom intervalu nalaze svi cijeli brojevi strogo veći od –2 i strogo manji od $2\frac{1}{3}$. Ti cijeli brojevi su –1, 0, 1 i 2. Ima ih ukupno 4.

2. **D.** Izračunajmo vrijednost svakoga pojedinoga broja. Imamo redom:

$$K = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$
$$L = -3^{-2} = -(3^{-2}) = -K = -\frac{1}{9};$$
$$M = -3^2 = -(3 \cdot 3) = -9;$$
$$N = (-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9.$$

Očito je $K \neq L$, pa tvrdnja **A** nije istinita. Nadalje, $K = \frac{1}{9} > -9 = M$, pa ni tvrdnja **B** nije istinita. Analogno, $L = -\frac{1}{9} < 9 = N$, pa ni tvrdnja **C** nije istinita. No, $M = -9 \neq 9 = N$, pa je tvrdnja **D** istinita.

3. **D.** Sve točke ravnine koje pripadaju osi apscisa imaju svojstvo da je njihova druga koordinata jednaka nuli. Drugim riječima, točka $T = (x_T, y_T)$ pripada osi apscisa ako i samo ako je $y_T = 0$. Od svih četiriju navedenih točaka ovo svojstvo ima samo točka (3, 0).

4. **B.** Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je a = 10 cm i c = 13 cm. Primijenimo Pitagorin poučak, pa dobijemo:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 10^2} = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69} \approx 8.30662386291807.$$

Zaokruživanjem na tri decimale dobijemo $b \approx 8.307$ cm (znamenka desettisućinki 6 je strogo veća od 5, pa pri zaokruživanju znamenku tisućinki 6 moramo povećati za 1).

5. **C.** Od 18:43 sati do 19:00 sati protekne točno 17 minuta. Od 19:00 sati do ponoći (24.00 sati) protekne točno 5 sati. Od ponoći do 07:54 sati protekne točno 7 sati i 54 minute. Stoga je vrijeme putovanja u odlasku ukupno 17 minuta + 5 sati + 7 sati + 54 minute = 12 sati i 71 minutu = 12 sati i (60 minuta + 11 minuta) = 12 sati i (1 sat i 11 minuta) = 13 sati i 11 minuta. Analogno, od 09:47 sati do 10:00 sati protekne točno 13 minuta, od 10:00 sati do 21:00 sat protekne točno 21 – 10 = 11 sati, a od 21:00 sat do 21:29 sati protekne točno 29 minuta. Stoga je vrijeme putovanja u povratku 13 minuta + 11 sati + 29 minuta = 11 sati i 42 minute. Tražena razlika jednaka je:

Δt = (13 sati i 11 minuta) – (11 sati i 42 minute) = (12 sati + 1 sat + 11 minuta) – (11 sati + 42 minute) = (12 sati + 60 minuta + 11 minuta) – (11 sati + 42 minute) = (12 – 11) sati i (60 + 11 – – 42) minute = 1 sat i 29 minuta.

6. **C.** Dijeljenjem zadanih masa dobijemo:

$$k=\frac{m_p}{m_e}=\frac{1.674\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{9.109\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}=\frac{1.674}{9.109}\cdot 10^{-27-(-31)}=0.18377428916\cdot 10^{-27+31}=$$

$$=0.18377428916\cdot 10^{4}=0.18377428916\cdot 10\,000=1837.7428916\approx 1838$$

Dakle, masa protona je približno 1838 puta veća od mase elektrona.

7. **A.** Pomnožimo prvu jednadžbu s 3, a drugu s 2. Dobijemo:

$$\begin{cases} -6\cdot x+21=9\cdot y \\ 6\cdot x+100=2\cdot y \end{cases}$$

Zbrojimo dobivene jednadžbe, pa dobijemo jednadžbu $11\cdot y=121$. Dijeljenjem s 11 dobivamo $y=11$.

8. **B.** Uočimo da je površina jednoga osjenčanoga kvadratića $P_1=1\cdot 1=1$ kv. jed. Zadanu strelicu tvori ukupno 12 potpuno osjenčanih kvadratića i 4 kvadratića osjenčanih točno do polovice. Površina svakoga od tih četiriju kvadratića jednaka je polovici površine potpuno osjenčanoga kvadratića, tj. $P_2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ kv. jed. Stoga je tražena površina strelice jednaka $P_{\text{strelice}}=12\cdot 1+4\cdot\frac{1}{2}=12+2=14$ kv. jed.

9. **C.** Pomnožimo zadanu jednakost s m. Dobivamo:

$$m\cdot s=h\cdot(t-z)$$
$$m\cdot s=h\cdot t-h\cdot z$$
$$h\cdot z=h\cdot t-m\cdot s$$

Odavde dijeljenjem s h slijedi $z=\frac{h\cdot t-m\cdot s}{h}$.

10. **D**. Graf funkcije f je pravac čija je jednadžba $y=-x+1$. Odredimo njegova sjecišta s koordinatnim osima. Sjecište s osi apscisa dobijemo uvrštavajući $y=0$ i rješavajući pripadnu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom x:

$$0=-x+1,$$
$$x=1.$$

Dakle, graf funkcije f siječe os apscisa u točki $S_1=(1,0)$. Analogno odredimo sjecište toga pravca s osi ordinata uvrštavajući $x=0$:

$$y=-0+1,$$
$$y=1.$$

Dakle, graf funkcije f siječe os ordinata u točki $S_2=(0,1)$. Jedini od četiriju prikazanih pravaca koji prolazi točkama S_1 i S_2 jest pravac prikazan na slici **D**.

11. **C.** U zadanu jednadžbu uvrstimo $x=2$, pa riješimo dobivenu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom m:

$$m - 3 \cdot 2 = \frac{1}{5}$$
$$m - 6 = \frac{1}{5}$$
$$m = \frac{1}{5} + 6 = \frac{1 + 5 \cdot 6}{5} = \frac{1 + 30}{5} = \frac{31}{5}$$

12. A. Uz standardne oznake u pravokutnom trokutu, znamo da je $\gamma = 90°$, a iz podataka iskazanih u zadatku bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijedi jednakost $\alpha = 7 \cdot \beta$. Stoga je mjera najmanjega kuta trokuta jednaka mjeri kuta β. Zbroj svih kuteva u bilo kojem trokutu jednak je 180°, pa imamo:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$
$$7 \cdot \beta + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$
$$8 \cdot \beta = 180^\circ - 90^\circ$$
$$8 \cdot \beta = 90^\circ$$

Odatle dijeljenjem s 8 slijedi:

$$\beta = \left(\frac{90}{8}\right)^\circ = \left(\frac{45}{4}\right)^\circ = 11.25^\circ = 11^\circ + 0.25^\circ = 11^\circ + (0.25 \cdot 60)' = 11^\circ 15'.$$

13. B. Izračunajmo najprije cijenu knjige nakon sniženja od 20%. Ona iznosi:

$$C_1 = 125 - \frac{20}{100} \cdot 125 = \left(1 - \frac{20}{100}\right) \cdot 125 = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot 125 = \left(\frac{5-1}{5}\right) \cdot 125 =$$
$$= \frac{4}{5} \cdot 125 = 4 \cdot \frac{125}{5} = 4 \cdot 25 = 100 \text{ kn}$$

Prema uvjetu zadatka, cijena C_1 snižena je za 30%, pa nova cijena iznosi:

$$C_2 = 100 - \frac{30}{100} \cdot 100 = \left(1 - \frac{30}{100}\right) \cdot 100 = \left(\frac{100 - 30}{100}\right) \cdot 100 = \frac{70}{100} \cdot 100 = 70 \text{ kn}.$$

Dakle, početna cijena knjige je 125 kn, a krajnja 70 kn. Stoga je traženi iznos jednak

$$\Delta C = 125 \text{ kn} - 70 \text{ kn} = 55 \text{ kn}.$$

14. D. Polumjer osnovke valjka jednak je $r = 5 \text{ cm} = \frac{5}{10} \text{ dm} = \frac{1}{2} \text{ dm}$, a tolika je i visina h_1 vode u šalici. Stoga je obujam vode jednak obujmu valjka kojemu su polumjer osnovke i visina jednaki $\frac{1}{2}$ dm, a taj je

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \pi = \frac{1}{8} \cdot \pi \text{ dm}^3.$$

Dakle, u šalici ima $\frac{1}{8}\cdot\pi$ dm^3 $=\frac{1}{8}\cdot\pi$ litara $=\frac{1}{8}\cdot\pi\cdot 10$ decilitara $=\frac{1}{8}\cdot 10\cdot\pi$ decilitara $=\frac{5}{4}\cdot\pi$ decilitara $\approx \frac{5}{4}\cdot 3.14159265358979 \approx 3.9269908$ decilitara ≈ 3.93 dL vode.

15. **A.** Neka su l i d udaljenost središta lijevoga, odnosno središta desnoga kotača od središta kružnoga toka. Put koji prijeđe lijevi kotač jednak je opsegu kruga čiji je polumjer jednak l. Iz uvjeta da taj put mora iznositi 188.50 metara dobivamo jednadžbu:

$$2\cdot l\cdot\pi = 188.50.$$

Odatle dijeljenjem s $2\cdot\pi$ slijedi $l=\frac{188.50}{2\cdot\pi}$ metara. Desni kotač udaljen je od središta kružnoga toga za $l + 1.56$ metara, što znači da je $d = l + 1.56$. Stoga je put koji prijeđe desni kotač jednak opsegu kruga čiji je polumjer jednak d, a taj je:

$$O=2\cdot d\cdot\pi=2\cdot(l+1.56)\cdot\pi=2\cdot\left(\frac{188.50}{2\cdot\pi}+1.56\right)\cdot\pi=\left(\frac{188.50}{2\cdot\pi}+1.56\right)\cdot(2\cdot\pi)=$$
$$=188.50+1.56\cdot 2\cdot\pi=188.50+3.12\cdot\pi \text{ metara}$$

Uvrstimo li u ovu jednakost $\pi \approx 3.14159265358979$, dobit ćemo:

$$O \approx 198.3017690792 \text{ metara} \approx 198.30 \text{ metara}.$$

16. **C.** Koeficijent uz x^2 je strogo pozitivan realan broj $\frac{1}{2}$, pa zadana kvadratna funkcija ima najmanju vrijednost. Očitamo $a=\frac{1}{2},\ b=-3,\ c=6$, pa dobijemo da je tražena najmanja vrijednost (minimum) jednaka $f_{\min}=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\frac{4\cdot\frac{1}{2}\cdot 6-(-3)^2}{4\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\cdot 6-9}{2}=\frac{12-9}{2}=\frac{3}{2}$.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. **1.** Imamo redom:

$$\frac{|4-5|^3-(4-5)^3}{\sqrt{6-2}}=\frac{|-1|^3-(-1)^3}{\sqrt{4}}=\frac{1^3-(-1)}{2}=\frac{1-(-1)}{2}=\frac{1+1}{2}=\frac{2}{2}=1.$$

18. $\boldsymbol{x^2-3\cdot x}$**.** Koristeći formulu za kvadrat razlike binoma, imamo redom:

$$(x-1)^2-x-1=x^2-2\cdot x+1-x-1=x^2-3\cdot x.$$

19. $\boldsymbol{\frac{2}{a}}$**.** Iz članova u brojniku izlučimo 2, a iz članova u nazivniku izlučimo a. Dobijemo:

$$\frac{4-2\cdot a}{2\cdot a-a^2}=\frac{2\cdot(2-a)}{a\cdot(2\cdot -a)}=\frac{2}{a}.$$

20. Vidjeti Sliku 16. Zadana funkcija je kvadratna funkcija. Njezin graf je parabola. Svaka je parabola jednoznačno određena zadavanjem bilo koje tri svoje točke. Uobičajeno je odrediti njezino tjeme i njezina sjecišta s koordinatnim osima. Stoga najprije očitamo:

$$a = -1,\ b = 0,\ c = 1,$$

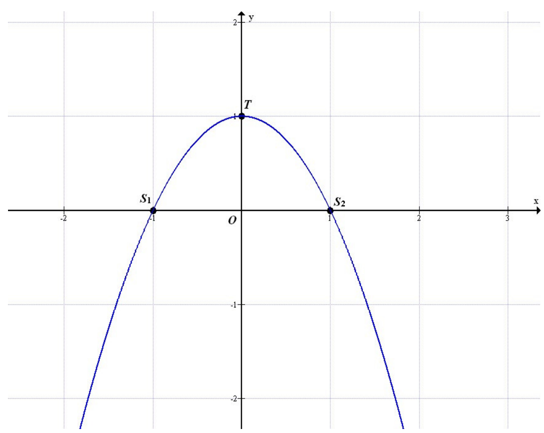
pa računamo koordinate tjemena parabole:

$$T = \left(-\frac{b}{2\cdot a}, \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}\right) = \left(-\frac{0}{2\cdot(-1)}, \frac{4\cdot(-1)\cdot 1 - 0^2}{4\cdot(-1)}\right) = \left(0, \frac{-4-0}{-4}\right) = \left(0, \frac{-4}{-4}\right) = (0,1)$$

Primijetimo da točka T pripada osi ordinata jer joj je prva koordinata jednaka nuli. Dakle, tražena parabola siječe os ordinata u svojemu tjemenu $T = (0, 1)$. Preostaje odrediti sjecišta s osi apscisa. U tu svrhu riješimo jednadžbu $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0$$
$$-x^2 + 1 = 0$$
$$-x^2 = -1$$
$$x^2 = 1$$

Odatle je $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Dakle, tražena parabola siječe os apscisa u točkama $S_1 = (-1, 0)$ i $S_2 = (1, 0)$. Njezin je graf prikazan na Slici 16.



Slika 16.

21. 10.8. U tijelu čovjeka mase 60 kg ima ukupno $\frac{3}{5}\cdot 60 = \frac{180}{5} = 36$ kg vode. Označimo li nepoznatu masu bjelančevina s b, možemo postaviti razmjer:

$$b : 36 = 3 : 10.$$

Umnožak vanjskih članova toga razmjera (b i 10) treba biti jednak umnošku njegovih unutrašnjih članova (36 i 3). Tako redom dobivamo:

$$10\cdot b = 36\cdot 3,$$
$$10\cdot b = 108.$$

Dijeljenjem posljednje jednakosti s 10 slijedi $b = 10.8$ kg.

22. **1.) 0.524.** Veličina iskazana u inčima i veličina iskazana u milimetrima su upravno razmjerne, pa možemo postaviti razmjer:

$$x : 13.3096 = 10 : 254.$$

Analogno kao u rješenju zadatka 21. dobivamo:

$$254 \cdot x = 10 \cdot 13.3096,$$
$$254 \cdot x = 133.096.$$

Odavde dijeljenjem s 254 slijedi $x = 0.524$.

2.) 3 314.7. Analogno kao u **1.)** možemo postaviti razmjer:

$$y : 130.5 = 254 : 10.$$

Analogno kao u rješenju zadatka 21. dobivamo:

$$10 \cdot y = 130.5 \cdot 254,$$
$$10 \cdot y = 33\ 147.$$

Odatle dijeljenjem s 10 slijedi $y = 3\ 314.7$.

23. **1.) 3.1623.** Imamo redom:

$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-1-2)^2 + (6-5)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$
$$\approx 3.16227766 \approx 3.1623$$

(Znamenka 7 na mjestu stotisućinki je strogo veća od 5, pa znamenku 2 na mjestu desettisućinki prigodom zaokruživanja moramo povećati za 1.)

2.) $y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{17}{3}$**.** Koristeći formulu za jednadžbu pravca kroz dvije zadane točke toga pravca dobivamo:

$$y - y_A = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \cdot (x - x_A),$$
$$y - 6 = \frac{5-6}{2-(-1)} \cdot [x - (-1)],$$
$$y - 6 = \frac{-1}{2+1} \cdot (x+1),$$
$$y = -\frac{1}{3} \cdot (x+1) + 6,$$
$$y = -\frac{1}{3} \cdot x - \frac{1}{3} + 6,$$
$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{-1 + 3 \cdot 6}{3},$$
$$y = -\frac{1}{3} \cdot x + \frac{-1+18}{3},$$

$$y=-\frac{1}{3}\cdot x+\frac{17}{3}.$$

24. 1.) 18. Traženi je broj jednak 0.9% broja 2000, tj. $\frac{0.9}{100}\cdot 2000=0.9\cdot 20=18.$

2.) 10 091. Neka je x traženi broj. Izradom x komada vilica dobiva se $\frac{0.9}{100}\cdot x$ vilica s grješkom, pa je broj vilica bez grješke jednak $x-\frac{0.9}{100}\cdot x$. Prema uvjetu zadatka, taj broj mora biti jednak ili veći od 10 000, pa dobivamo nejednadžbu:

$$x-\frac{0.9}{100}\cdot x\geq 10\ 000.$$

Tu nejednadžbu riješimo uobičajenim postupkom:

$$\begin{aligned}&x-\frac{0.9}{100}\cdot x\geq 10\ 000 \quad /\cdot 100,\\&100\cdot x-0.9\cdot x\geq 1\ 000\ 000,\\&99.1\cdot x\geq 1\ 000\ 000.\end{aligned}$$

Dijeljenjem s 99.1 dobivamo $x \geq$ 10 090.817356. Najmanji prirodan broj jednak ili veći od 10 090.817356 je 10 091, pa treba izraditi najmanje 10 091 komada vilica.

25. 1.) $\frac{9}{5}$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}&3\cdot(x-1)-\frac{x+1}{2}=1 \quad /\cdot 2\\&6\cdot(x-1)-(x+1)=2,\\&6\cdot x-6-x-1=2,\\&6\cdot x-x=2+6+1,\\&5\cdot x=9.\end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s 5 dobivamo $x=\frac{9}{5}$.

2.) 3; –12 (ili obratno). Pomnožimo zadanu jednadžbu s (–1), pa dobivamo:

$$x^2+9\cdot x-36=0.$$

Odavde je

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{9^2-4\cdot 1\cdot(-36)}}{2\cdot 1}=\frac{-9\pm\sqrt{81+4\cdot 36}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{81+144}}{2}=\frac{-9\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{-9\pm 15}{2}$$

$$x_1=\frac{-9+15}{2}=\frac{6}{2}=3,\ x_2=\frac{-9-15}{2}=-\frac{24}{2}=-12.$$

26. 1.) $x \ge \frac{1}{5}$ **ili** $x \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right\rangle$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} &4\cdot(2-x)-x-7\le 0,\\ &8-4\cdot x-x-7\le 0,\\ &-5\cdot x\le -8+7,\\ &-5\cdot x\le -1. \end{aligned}$$

Posljednju nejednakost podijelimo s (–5), pri čemu se znak nejednakosti ≤ mijenja u ≥. Tako dobijemo $x \ge \frac{1}{5}$, odnosno ekvivalentno $x \in \left[\frac{1}{5}, +\infty\right\rangle$.

2.) $\frac{1}{4}$**.** Koristeći jednakosti 1000 = 10^3 i 100 = 10^2 zadanu jednadžbu transformiramo ovako:

$$\begin{aligned} &100^{x+1}=1000\cdot 10^{-2\cdot x},\\ &(10^2)^{x+1}=10^3\cdot 10^{-2\cdot x},\\ &10^{2\cdot(x+1)}=10^{3+(-2\cdot x)},\\ &10^{2\cdot x+2}=10^{3-2\cdot x} \end{aligned}$$

Zbog bijektivnosti eksponencijalne funkcije, dvije potencije s istim bazama su međusobno jednake ako i samo ako su im jednaki eksponenti. Tako dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$\begin{aligned} &2\cdot x+2=3-2\cdot x,\\ &2\cdot x+2\cdot x=3-2,\\ &4\cdot x=1. \end{aligned}$$

Dijeljenjem posljednje jednadžbe s 4 slijedi $x = \frac{1}{4}$.

27. Zadani grafikon tablično možemo prikazati ovako:

Broj bodova	⟨10, 20]	⟨20, 30]	⟨30, 40]	⟨40, 50]	⟨50, 60]	⟨60, 70]	⟨70, 80]	⟨80, 90]	⟨90, 100]
Broj učenika	2	5	9	15	20	35	44	16	6

1.) 152. Traženi je broj jednak zbroju svih apsolutnih frekvencija (brojeva učenika koji se odnose na pojedini razred), tj. n = 2 + 5 + 9 + 15 + 20 + 35 + 44 + 16 + 6 = 152.

2.) 51. Formiramo niz kumulativnih apsolutnih frekvencija:

Broj bodova	⟨10, 20]	⟨10, 30]	⟨10, 40]	⟨10, 50]	⟨10, 60]	⟨10, 70]	⟨10, 80]	⟨10, 90]	⟨10, 100]
Kumulativna apsolutna frekvencija	2	2 + 5 = 7	7 + 9 = 16	16 + 15 = 31	31 + 20 = 51	51 + 35 = 86	86 + 44 = 130	130 + 16 = 146	146 + 6 = 152

Donja granica svakoga pojedinoga razreda jednaka je 10, dok gornje redom iznose 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 i 100. Pojedina apsolutna frekvencija označava koliko učenika ima strogo više od 10 bodova, ali ne više od b bodova, gdje je b gornja granica pripadnoga raz-reda. Za svaki $n \in$ {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} n–ti član niza kumulativnih apsolutnih frekvencija jednak je zbroju prethodnoga člana niza i apsolutne frekvencije koja odgovara razredu $\langle 10 \cdot n, 10 \cdot (n + 1)]$. Sada lako vidimo da je četvrti član niza kumulativnih apsolutnih frekvencija jednak 31, što znači da je 31 učenik imao više od 10, ali ne više od 50 bodova. Budući da svi ti učenici nisu dobili pozitivnu ocjenu, zaključujemo da je za pozitivnu ocjenu trebalo skupiti najmanje 51 bod.

3.) 89. Ocjenu *odličan* dobila su ukupno $\frac{12.5}{100} \cdot 32 = \frac{400}{100} = 4$ učenika 4.a razreda. Iz podataka o najboljim rezultatima na ispitu slijedi da su ti učenici upravo oni koji su postigli 89, 90, 92, odnosno 98 bodova. Stoga je za ocjenu *odličan* trebalo skupiti najmanje 89 bodova.

Napomena: U zadatcima 2.) i 3.) pretpostavljamo da niti jedan zadatak na ispitu nije donosio necjelobrojni broj bodova (npr. 0.5 bodova). Bez ove pretpostavke zadatke nije moguće ispravno riješiti.

28. 1.) 900. Neka su A, D i M redom brojevi maraka koje su skupile Ana, Dijana i Marija. Iz zadanih podataka dobivamo sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$A + D + M = 1\,500$$
$$A = 2 \cdot D$$
$$D = 3 \cdot M$$

Iz druge jednadžbe je $D = \frac{1}{2} \cdot A$, pa uvrštavanjem u treću jednadžbu dobivamo $\frac{1}{2} \cdot A = 3 \cdot M$, odnosno, nakon dijeljenja s 3, $M = \frac{\frac{1}{2}}{3} \cdot A = \frac{1}{6} \cdot A$. Preostaje uvrstiti jednakosti $D = \frac{1}{2} \cdot A$ i $M = \frac{1}{6} \cdot A$ u prvu jednadžbu sustava. Tako dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$A + \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{6} \cdot A = 1\,500.$$

Nju riješimo uobičajenim postupkom:

$$A + \frac{1}{2} \cdot A + \frac{1}{6} \cdot A = 1\,500 \;\; / \cdot 6$$
$$6 \cdot A + 3 \cdot A + A = 9\,000,$$
$$10 \cdot A = 9\,000.$$

Odavde dijeljenjem s 10 dobivamo $A = 900$. Dakle, Ana je skupila 900 maraka.

2.) 64. Album bi bio popunjen da su sestre skupile ukupno 1 500 + 4 = 1 504 marke. Neka je s traženi broj stranica. Taj je broj, prema uvjetu zadatka, paran, pa je broj stranica numeriranih neparnim prirodnim brojem jednak broju stranica numeriranih parnim prirodnim brojem. Dakle, u albumu je $\frac{s}{2}$ stranica numeriranih neparnim prirodnim brojem i $\frac{s}{2}$ stranica numeriranih parnim prirodnim brojem. Na svim stranicama numeriranima neparnim prirodnim brojevima ima mjesta za ukupno $17 \cdot \frac{s}{2}$ maraka, dok na svim stranicama numeriranima parnim prirodnim brojevima ima mjesta za ukupno $30 \cdot \frac{s}{2}$ maraka. Ukupan broj svih maraka treba biti jednak 1 504, pa dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$17 \cdot \frac{s}{2} + 30 \cdot \frac{s}{2} = 1\ 504 \quad .$$

Tu jednadžbu riješimo uobičajenim postupkom:

$$\begin{aligned}
&17 \cdot \frac{s}{2} + 30 \cdot \frac{s}{2} = 1\ 504 \quad / \cdot 2 \\
&17 \cdot s + 30 \cdot s = 3\ 008, \\
&47 \cdot s = 3\ 008.
\end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s 47 dobivamo $s = 64$. Dakle, album ima ukupno 64 stranice.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: RUJAN 2013.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **B.** Broj –3 je cijeli broj, tj. pripada skupu cijelih brojeva **Z**. Skup cijelih brojeva **Z** je pravi podskup skupa racionalnih brojeva **Q**, pa je –3 i racionalan broj.

$\frac{19}{4}$ je očito broj oblika $\frac{m}{n}$, pri čemu je m cijeli broj, a n prirodan broj. Svi takvi brojevi pripadaju skupu **Q** prema definiciji toga skupa. (Podsjetimo, $\mathbf{Q} := \{\frac{m}{n} : m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\}$.) Dakle, i $\frac{19}{4}$ je racionalan broj.

Broj 13.5 možemo zapisati u obliku $\frac{135}{10} = \frac{135:5}{10:5} = \frac{27}{2}$. Analogno kao i za broj $\frac{19}{4}$ zaključujemo da je i broj $13.5 = \frac{27}{2}$ racionalan.

Broj $\sqrt{11}$ nije racionalan. Naime, pretpostavimo da je

$$\sqrt{11} = \frac{m}{n},$$

pri čemu su $m \in \mathbf{N}$ i $n \in \mathbf{N}$. (Drugi korijen iz bilo kojega strogo pozitivnoga realnoga broja je opet strogo pozitivan realan broj, pa ni brojnik ni nazivnik razlomka $\frac{m}{n}$ ne mogu biti nepozitivni cijeli brojevi.) Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je razlomak $\frac{m}{n}$ potpuno skraćen, odnosno da je najveći zajednički djelitelj brojeva m i n jednak 1. Kvadriranjem jednakosti

$$\sqrt{11} = \frac{m}{n}$$

dobivamo

$$\frac{m^2}{n^2} = 11,$$

a odavde je

$$m^2 = 11 \cdot n^2.$$

Desna strana ove jednakosti je očito prirodan broj djeljiv s 11, pa takva mora biti i lijeva strana. Odatle slijedi da je prirodan broj m^2 djeljiv s 11. Broj 11 je prost broj, pa je broj m^2 djeljiv s 11 ako i samo ako je broj m djeljiv s 11. (Primijetite da tvrdnja

m^2 je djeljiv s k ako i samo ako je m djeljiv s k.

nije točna ako je k složen broj. Npr. broj $4^2 = 16$ je djeljiv s 8, ali broj 4 nije djeljiv s 8.) To znači da broj m možemo zapisati u obliku $m = 11 \cdot k$, pri čemu je k prirodan broj koji nije djeljiv s 11. Uvrstimo li tu jednakost u jednakost $m^2 = 11 \cdot n^2$, dobit ćemo:

$$(11\cdot k)^2 = 11\cdot n^2,$$
$$11^2\cdot k^2 = 11\cdot n^2, \quad /:11$$
$$n^2 = 11\cdot k^2.$$

Desna strana te jednakosti je djeljiva s 11, pa takva mora biti i lijeva strana. Potpuno analogno kao i za broj m zaključujemo da je i n djeljiv s 11. Dakle, brojevi m i n su djeljivi s 11, što je suprotno pretpostavci da je najveći zajednički djelitelj tih dvaju brojeva jednak 1. Stoga je pretpostavka da je broj $\sqrt{11}$ racionalan broj bila pogrešna, pa zaključujemo da je taj broj iracionalan.

Napomena: U teoriji brojeva može se dokazati sljedeća tvrdnja.

Tvrdnja. Neka je n prirodan broj. Tada je broj $\sqrt{n}$ racionalan ako i samo ako je n potpun kvadrat nekoga cijeloga broja.

U našem slučaju broj 11 nije kvadrat niti jednoga cijeloga broja, pa prema izrečenoj tvrdnji niti broj $\sqrt{11}$ nije racionalan.

2. **D.** Imamo redom:

$$(-0.2)^2-1:\left(7\cdot\frac{3}{2}+1.25\right)=\left(-\frac{2}{10}\right)^2-1:\left(7\cdot\frac{3}{2}+\frac{125}{100}\right)=\left(-\frac{2:2}{10:2}\right)^2-1:\left(7\cdot\frac{3}{2}+\frac{125:25}{100:25}\right)=$$
$$=\left(-\frac{1}{5}\right)^2-1:\left(7\cdot\frac{3}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{25}-1:\left(\frac{7\cdot3}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{25}-1:\left(\frac{21}{2}+\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{25}-1:\left(\frac{21\cdot2+5}{4}\right)=$$
$$=\frac{1}{25}-1:\left(\frac{42+5}{4}\right)=\frac{1}{25}-1:\frac{47}{4}=\frac{1}{25}-\frac{4}{47}=\frac{1\cdot47-4\cdot25}{25\cdot47}=\frac{47-100}{1175}=-\frac{53}{1175}\approx\text{-}0.045106383$$

Zaokružimo li ovaj broj na četiri decimale, dobivamo –0.0451 (znamenka na mjestu stotisućinki jednaka je nuli, pa prve četiri znamenke iza decimalne točke samo prepišemo).

3. **D.** Imamo redom:

$$D=\left(-\frac{2}{3}\right)^2-4\cdot(-2)\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{9}+4\cdot2\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{9}+\frac{8}{4}=\frac{4}{9}+2=\frac{4+2\cdot9}{9}=\frac{4+18}{9}=\frac{22}{9}.$$

4. **D.** Iz zadane jednakosti izrazimo varijablu k. Imamo redom:

$$m=\frac{k}{2}-3\cdot p, \quad /\cdot 2$$
$$2\cdot m=k-2\cdot3\cdot p,$$
$$2\cdot m=k-6\cdot p,$$
$$k=2\cdot m+6\cdot p.$$

5. **A.** Pomnožimo zadane faktore prema pravilu „svaki sa svakim“:

$$a\cdot(a-1)\cdot(a+2)=\left[a\cdot(a-1)\right]\cdot(a+2)=(a\cdot a-1\cdot a)\cdot(a+2)=(a^2-a)\cdot(a+2)=$$
$$=a^2\cdot a-a\cdot a+a^2\cdot2-a\cdot2=a^3-a^2+2\cdot a^2-2\cdot a=a^3+a^2-2\cdot a.$$

6. **B.** Obujam jedne boce iskazan u litrama jednak je

$$V_1=\frac{750}{1000}=\frac{750:250}{1000:250}=\frac{3}{4}\text{ litara.}$$

Obujam ulja u jednoj kutiji je

$$V_2 = 500 \cdot V_1 = 500 \cdot \frac{3}{4} = \frac{500 \cdot 3}{4} = \frac{250 \cdot 3}{2} = \frac{750}{2} \text{ litara.}$$

Obujam ulja u svih 12 kutija jednak je

$$V_3 = 12 \cdot \frac{750}{2} = \frac{12 \cdot 750}{2} = 6 \cdot 750 = 4500 \text{ litara.}$$

Ako bismo svo ulje pretočili u spremnike obujma 1000 litara tako da svaki spremnik bude potpuno ispunjen, ukupan broj spremnika bi morao biti jednak

$$4500 : 1000 = 4.5.$$

To nije moguće jer ukupan broj spremnika mora biti prirodan broj. Zbog toga decimalan broj 4.5 zaokružimo na prvi strogo veći prirodan broj. To je broj 5. Dakle, za pretakanje nam treba najmanje 5 spremnika obujma 1000 litara.

Napomena: Ukupni obujam svih spremnika mora biti jednak ili veći od 4500 litara jer će u suprotnom postojati obujam ulja kojega nećemo moći pretočiti ni u jedan od spremnika.

7. **C.** Traženi postotak je jednak

$$\frac{7.532619 - 7.500981}{7.532619} \cdot 100 = \frac{0.031638}{7.532619} \cdot 100 = \frac{3.1638}{7.532619} \approx 0.42001327825\% \approx 0.420\%.$$

8. **C.** Označimo nepoznate kutove četverokuta s α i β. Zbroj tih dvaju kutova četverokuta jednak je

$$360° - (82° + 114°) = 360° - 196° = 164°.$$

Iz podatka da se nepoznati kutovi odnose kao 1 : 2 slijedi

$$\alpha : \beta = 1 : 2,$$
$$\alpha \cdot 2 = \beta \cdot 1,$$
$$\beta = 2 \cdot \alpha.$$

Stoga je zbroj nepoznatih kutova, s druge strane, jednak

$$\alpha + \beta = \alpha + 2 \cdot \alpha = 3 \cdot \alpha.$$

Ta vrijednost treba biti jednaka 164°, pa dobivamo jednadžbu:

$$3 \cdot \alpha = 164°$$

Dijeljenjem te jednadžbe s 3 slijedi:

$$\alpha = \left(\frac{164}{3}\right)^{\circ} = \left(\frac{163+2}{3}\right)^{\circ} = \left(\frac{162}{3}\right)^{\circ} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\circ} = 54^{\circ} + \left(\frac{2}{3}\right)^{\circ} = 54^{\circ} + \frac{2}{3} \cdot 60' = 54^{\circ} + 2 \cdot 20' = 54^{\circ}40'$$

9. **C.** Tražena je udaljenost jednaka

$$d = \sqrt{(x_K - x_L)^2 + (y_K - y_L)^2} = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(-7)^2 + 2^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53} \text{ jed.}$$

10. **B**. Izrazimo polumjer osnovke (označimo ga s r) u dm. Imamo:

$$2 \cdot r = 9 \text{ cm}$$

$$2 \cdot r = \frac{9}{10} \text{ dm} \quad / : 2$$

$$r = \frac{\frac{9}{10}}{2} = \frac{9}{10 \cdot 2} = \frac{9}{20} \text{ dm.}$$

Visina valjka (označimo je s h) iskazana u dm iznosi:

$$h = \frac{15}{10} = \frac{15:5}{10:5} = \frac{3}{2} \text{ dm} \ .$$

Stoga je obujam valjka jednak

$$V = B \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h = \left(\frac{9}{20}\right)^2 \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{400} \cdot \pi \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{400} \cdot \frac{3}{2} \cdot \pi = \frac{81 \cdot 3}{400 \cdot 2} \cdot \pi = \frac{243}{800} \cdot \pi \text{ dm}^3.$$

Budući da je 1 litra = 1 dm^3, konačno dobivamo:

$$V = \frac{243}{800} \cdot \pi \approx 0.9542587685279 \text{ litara} \approx 0.954 \text{ litre.}$$

11. **B**. Obje površine jednake su polovici umnoška duljine stranice AB i duljine visine na tu stranicu. Ta je duljina jednaka udaljenosti usporednih pravaca p i q, pa ona ne ovisi o izboru točaka C i D. Zbog toga su navedene površine međusobno jednake.

12. **A.** Graf funkcije f je parabola jer je graf bilo koje kvadratne funkcije parabola. Zbog toga u obzir dolaze jedino slike A i C. Budući da je $f(0) = 0^2 + 1 = 0 + 1 = 1$, graf funkcije f mora prolaziti točkom $T = (0, 1)$. To svojstvo ima jedino krivulja na slici A i ona je rješenje zadatka.

13. **C.** Prema jednostavnom računu smjese, tražena cijena je jednaka

$$\bar{c} = \frac{7 \cdot 220 + 10 \cdot 330}{220 + 330} = \frac{1540 + 3300}{550} = \frac{4840}{550} = \frac{4840 : 110}{550 : 110} = \frac{44}{5} = 8.8 \text{ kn.}$$

14. **B.** Duljina dijagonale pravokutnika čije su stranice duge 50 m i 30 m iznosi

$$d = \sqrt{50^2 + 30^2} = \sqrt{2500 + 900} = \sqrt{3400} = \sqrt{34 \cdot 100} = \sqrt{34} \cdot \sqrt{100} = \sqrt{34} \cdot 10 = 10 \cdot \sqrt{34} \text{ m.}$$

Duljina prijeđenoga puta i vrijeme su upravno razmjerne veličine. Drugim riječima, koliko se puta poveća vrijeme trčanja, toliko se puta poveća i duljina prijeđenoga puta (jer je prosječna brzina – kao omjer duljine prijeđenoga puta i vremena – ista prema pretpostavci zadatka). Dakle, ako za 4 minute dječak pretrči dijagonalu 7 puta, onda će za 45 minuta pretrčati dijagonalu $\frac{45}{4}$ puta više negoli u 4 minute, tj. ukupno $\frac{45}{4} \cdot 7 = \frac{45 \cdot 7}{4} = \frac{315}{4}$ puta. Prema tome, traženi put jednak je

$$s = \frac{315}{4} \cdot 10 \cdot \sqrt{34} = \frac{315}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{34} = \frac{315 \cdot 5}{2} \cdot \sqrt{34} = \frac{1575}{2} \cdot \sqrt{34} \approx 4591.87461719067 \text{ metara.}$$

Zaokružimo ovaj broj na najbliži prirodan broj, pa dobijemo $s \approx 4592$ m.

15. C. Površina koju treba obojati jednaka je zbroju površina pravokutnika kojima je širina jednaka visini prostorije (označimo je s h). Uočimo da je opseg lika prikazanoga na tlocrtu jednak $2 \cdot (a + b)$, pa je površina koju treba obojati jednaka

$$P = 2 \cdot (a + b) \cdot h = 2 \cdot (12 + 7) \cdot 2.7 = 2 \cdot 19 \cdot 2.7 = 102.6 \text{ m}^2.$$

Tako dobivamo da je tražena cijena jednaka

$$c = P \cdot 10 = 1026 \text{ kn}.$$

Napomena: Veličina x nije bila značajna za rješavanje zadatka jer opseg prikazanoga lika ne ovisi o vrijednosti varijable x. Da smo npr. računali obujam zraka u zadanoj prostoriji, vrijednost veličine x bila bi značajna jer bismo tražili površinu cijeloga prikazanoga lika, a ona ovisi o vrijednosti veličine x. Preciznije, nije teško provjeriti da je površina prikazanoga lika jednaka $P_1 = a \cdot b - 3 \cdot x^2$.

16. B. U zadanu jednadžbu uvrstimo $x = 3$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned} &m \cdot 3^2 - 5 \cdot 3 - (m+1) = 0, \\ &m \cdot 9 - 15 - m - 1 = 0, \\ &9 \cdot m - m = 15 + 1, \\ &8 \cdot m = 16. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 8 slijedi $m = 2$. Stoga polazna kvadratna jednadžba zapravo glasi:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - (2 + 1) = 0,$$
$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 3 = 0.$$

Prema Vièteovim formulama, umnožak njezinih rješenja jednak je $\frac{-3}{2} = -\frac{3}{2}$. Budući da je jedno rješenje jednako 3, preostalo drugo rješenje jednako je

$$-\frac{3}{2} : 3 = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}.$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 51; 80. 7 kg jabuka košta $\frac{7}{2.5} = \frac{70}{25} = \frac{70:5}{25:5} = \frac{14}{5}$ puta više nego 2.5 kg jabuka, tj. ukupno

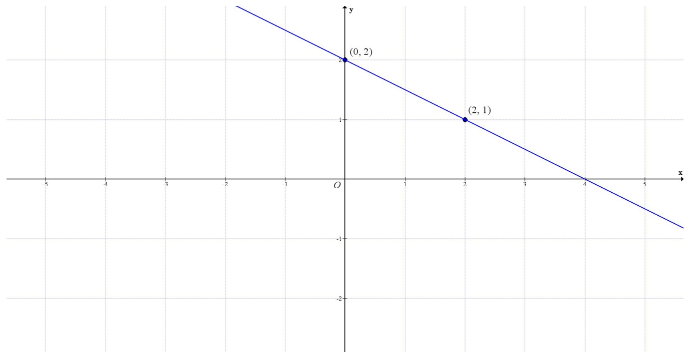
$$C = \frac{14}{5} \cdot 18.5 = \frac{14}{5} \cdot \frac{185}{10} = \frac{7}{1} \cdot \frac{37}{5} = \frac{7 \cdot 37}{5} = \frac{259}{5} = 51.8 \text{ kn} = 51 \text{ kn i } 80 \text{ lp}.$$

18. (2, 0) i (0, –3) (ili obratno). Iz slike očitamo ga pravac siječe os apscisa u točki čija je prva koordinata 2 (od 0 idemo za dvije jedinice udesno i dođemo u točku čija je prva koordinata 2), dok os ordinata siječe u točki čija je druga koordinata jednaka –3 (od 0 idemo za tri jedinice nadolje i dođemo u točku čija je druga koordinata jednaka –3). Svaka točka na osi apscisa ima drugu koordinatu jednaku 0, a svaka točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku 0. Stoga su tražene točke (2, 0) i (0, –3).

19. Vidjeti Sliku 17. Bilo koji pravac jednoznačno je određen s bilo koje dvije različite točke toga pravca. Za $x = 0$ lagano dobivamo $y = 2$, dok za $x = 2$ dobivamo

$$y = -\frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = -1 + 2 = 1.$$

Dakle, traženi pravac prolazi točkama (0, 2) i (2, 1). Ucrtamo te točke u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 17.



Slika 17.

20. 132 000. Znamo da 1 kg ima 1000 g i da 1 m ima 100 cm. Odatle slijede jednakosti:

$$1\text{ g} = \frac{1}{1000}\text{ kg} = \frac{1}{10^3}\text{ kg } = 10^{-3}\text{kg},$$
$$1\text{ cm} = \frac{1}{100}\text{ m} = \frac{1}{10^2}\text{ m } = 10^{-2}\text{m},$$
$$1\text{ cm}^3 = (10^{-2}\text{m})^3 = (10^{-2})^3\text{ m}^3 = 10^{-2\cdot 3}\text{ m}^3 = 10^{-6}\text{ m}^3.$$

Stoga redom imamo:

$$132\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 132\cdot\frac{10^{-3}\text{ kg}}{10^{-6}\text{ m}^3} = 132\cdot 10^{-3-(-6)}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 132\cdot 10^{-3+6}\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 132\cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 132\cdot 1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 132\ 000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

21. $\frac{a+3}{a}$ **.** Uočimo da vrijede jednakosti:

$$a^2 + 6\cdot a + 9 = a^2 + 2\cdot a\cdot 3 + 3^2 = (a+3)^2,$$
$$a^2 + 3\cdot a = a\cdot(a+3).$$

Stoga je zadani algebrski razlomak jednak

$$\frac{a^2+6\cdot a+9}{a^2+3\cdot a} = \frac{(a+3)^2}{a\cdot(a+3)} = \frac{(a+3)\cdot(a+3)}{a\cdot(a+3)} = \frac{a+3}{a}.$$

22. –8; $-\frac{13}{8}$ **; 4.** Za $x = -2$ imamo:

$$f(-2) = 3\cdot(-2) - 2 = -6 - 2 = -8.$$

Stoga u prazan pravokutnik ispod broja –2 upisujemo –8. Za $x = \frac{1}{8}$ analogno imamo:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = 3\cdot\frac{1}{8} - 2 = \frac{3}{8} - 2 = \frac{3-8\cdot 2}{8} = \frac{3-16}{8} = -\frac{13}{8}.$$

Stoga u prazan pravokutnik ispod broja $\frac{1}{8}$ upisujemo $-\frac{13}{8}$. Preostaje odrediti x takav da je $f(x) =$ = 10. Imamo redom:

$$\begin{aligned} f(x) &= 10, \\ 3 \cdot x - 2 &= 10, \\ 3 \cdot x &= 10 + 2, \\ 3 \cdot x &= 12. \end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s 3 slijedi $x = 4$. Stoga u prazan pravokutnik iznad broja 10 upisujemo 4.

23. 1.) 13 857.14. Traženi prosječan prihod po jednom danu jednak je:

$$\overline{p} = \frac{12000 + 7000 + 0 + 30000 + 15000 + 23000 + 10000}{7} = \frac{97000}{7} \approx 13857.14 \text{ kn.}$$

Dobiveni rezultat moramo zaokružiti na točno dvije decimale jer ne postoji tisućiti, desettisućiti itd. dio kune.

2.) 12.37. Traženi postotak je jednak

$$p = \frac{12000}{97000} \cdot 100 = \frac{12}{97} \cdot 100 = \frac{1200}{97} \approx 12.371134 \text{ \%} \approx 12.37\%.$$

24. 0; 0; 54; 18. Uvrstimo prvu jednadžbu sustava u drugu, pa dobijemo:

$$\begin{aligned} y^2 &= 6 \cdot (3 \cdot y), \\ y^2 &= 18 \cdot y, \\ y^2 - 18 \cdot y &= 0, \\ y \cdot (y - 18) &= 0. \end{aligned}$$

Umnožak dvaju brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli.
Za $y = 0$ iz prve jednadžbe sustava odmah slijedi $x = 0$.
Za $y - 18 = 0$ slijedi $y = 18$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo $x = 3 \cdot 18 = 54$.
Dakle, sva rješenja sustava su $(x, y) \in \{(0, 0), (54, 18)\}$.

25. 1.) 3 osobe. Točka koja odgovara 1990. godini je polovište dužine određene točkama koje odgovaraju 1980., odnosno 2000. godini. Tom točkom povučemo pravac usporedan s osi imena osoba (tj. pravac okomit na os godina). Taj pravac siječe zadani grafikon u točno tri točke. Stoga su 1990. godine bile zaposlene točno tri osobe, i to su Dragica, Ena i Filip.

2.) 10. Mjerna jedinica za vrijeme na vodoravnoj osi je $\frac{20}{4} =$ 5 godina. Iz grafikona očitamo da je Ava bila zaposlena ukupno $5 \cdot 5 = 25$ godina, dok je Boris bio zaposlen ukupno $3 \cdot 5 = 15$ godina. Razlika tih dvaju brojeva jednaka je $25 - 15 = 10$. Dakle, Ava je bila zaposlena 10 godina dulje od Borisa.

26. 1.) ≈ 0.34037. Možemo postaviti shemu:

↑ 1 aroba	↑ 14.69 kg
x aroba	5 kg

Veličine su očito upravno razmjerne („što više kilograma, to više aroba“). Primjenom jednostavnoga trojnoga pravila dobivamo razmjer:

$$x : 1 = 5 : 14.69.$$

Odavde je

$$x = \frac{5}{14.69} = \frac{500}{1469} \approx 0.340367597 \approx 0.34037.$$

2.) ≈ 518.16578. Ovaj zadatak najlakše je riješiti primjenom verižnoga računa, odnosno verižnika jer su sve veličine upravno razmjerne. Imamo redom:

x unča	1 portugalska aroba
1 portugalska aroba	14.69 kg
1 kg	1000 g
28.35 g	1 unča

Verižnik je zatvoren jer je veličina na kraju posljednjega retka jednaka veličini na početku prvoga retka. Tako sada lagano dobijemo:

$$x = \frac{1 \cdot 14.69 \cdot 1000 \cdot 1}{1 \cdot 1 \cdot 28.35} = \frac{14690}{28.35} = \frac{1469000}{2835} = \frac{1469000 : 5}{2835 : 5} = \frac{293800}{567} \approx 518.165784832 \approx 518.16578.$$

27. 1.) $-\frac{1}{20}$ **= –0.05**. Imamo redom:

$$5 \cdot (2 \cdot x + 1) - 3 = \frac{3}{2},$$
$$10 \cdot x + 5 - 3 = \frac{3}{2},$$
$$10 \cdot x = \frac{3}{2} - 5 + 3,$$
$$10 \cdot x = \frac{3}{2} - 2,$$
$$10 \cdot x = \frac{3 - 2 \cdot 2}{2},$$
$$10 \cdot x = \frac{3 - 4}{2},$$
$$10 \cdot x = -\frac{1}{2}, \quad / : 10$$
$$x = \frac{-\frac{1}{2}}{10} = -\frac{1}{2 \cdot 10} = -\frac{1}{20}.$$

Dobiveno rješenje zapisano kao decimalan broj je $x = -0.05$.

2.) 2. Prisjetimo se da je $0.1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$. Tako odmah dobivamo:

$$10^{1-x} = 0.1,$$
$$10^{1-x} = 10^{-1},$$
$$1 - x = -1,$$
$$-x = -1 - 1,$$
$$-x = -2.$$

Odatle dijeljenjem s (–1) dobivamo $x = 2$.

3.) $x > \frac{3}{5}$ **ili** $x \in \left\langle \frac{3}{5}, +\infty \right\rangle$**.** Imamo redom:

$$x \cdot (4 - x) > 3 - (x + x^2),$$
$$4 \cdot x - x^2 > 3 - x - x^2,$$
$$4 \cdot x - x^2 + x + x^2 > 3,$$
$$5 \cdot x > 3.$$

Odatle dijeljenjem s 5, pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja, slijedi $x > \frac{3}{5}$. Ovo rješenje možemo zapisati u obliku $x \in \left\langle \frac{3}{5}, +\infty \right\rangle$.

28. 1.) 97. Cijena Ivine narudžbe iznosi

$$I = 35.00 + 5.00 + 8.00 = 48.00 \text{ kn},$$

a cijena Matejeve narudžbe iznosi

$$M = 32.00 + 10.00 + 13.00 = 55.00 \text{ kn}.$$

Stoga je traženi iznos jednak

$$o = 200 - (48.00 + 55.00) = 200 - 103 = 97 \text{ kn}.$$

2.) $4 \cdot \sqrt{30}$ **≈ 21.91 cm.** Označimo s m polumjer male pizze, a s j polumjer jumbo-pizze. Površina male pizze jednaka je

$$P_m = m^2 \cdot \pi,$$

a površina jumbo-pizze jednaka je

$$P_j = j^2 \cdot \pi.$$

Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost

$$\frac{3}{5} \cdot P_m = \frac{1}{8} \cdot P_j.$$

Uvrštavanjem izraza za P_m i P_j u gornju jednakost dobivamo:

$$\frac{3}{5}\cdot m^2\cdot\pi=\frac{1}{8}\cdot j^2\cdot\pi,\quad /:\pi$$
$$\frac{3}{5}\cdot m^2=\frac{1}{8}\cdot j^2\quad /\cdot 8$$
$$j^2=\frac{24}{5}\cdot m^2\quad /\sqrt{\ }$$
$$j=\sqrt{\frac{24}{5}\cdot m^2}=\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{m^2}=\frac{\sqrt{4\cdot 6}}{\sqrt{5}}\cdot m=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\cdot m=\frac{2\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{5}}\cdot m=\frac{2\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\cdot m=\frac{2\cdot\sqrt{6\cdot 5}}{5}\cdot m,$$
$$j=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{30}\cdot m.$$

U posljednju jednakost uvrstimo $m = 10$. Tako konačno dobivamo:

$$j=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{30}\cdot 10=\frac{2}{5}\cdot 10\cdot\sqrt{30}=2\cdot 2\cdot\sqrt{30}=4\cdot\sqrt{30}\approx 21.9089023\text{ cm}\approx 21.91\text{ cm}.$$

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: SVIBANJ 2014.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **B.** Podsjetimo da oznaka $\langle$ uz točku na brojevnom pravcu pridruženu realnom broju a znači da broj a ne pripada istaknutom podskupu skupa realnih brojeva, a da oznaka [uz istu točku znači da broj a pripada spomenutom podskupu. Skup svih realnih brojeva koji su istodobni jednaki ili veći od 2 i manji od 7 je poluzatvoreni interval $[2, 7\rangle$. Stoga tražimo grafički prikaz koji će obuhvatiti sve realne brojeve između 2 i 7 uključujući 2, a isključujući 7. Taj grafički prikaz naveden je pod slovom **B**.

Primijetimo da grafički prikaz **A** predstavlja poluotvoreni interval $\langle 2, 7]$, grafički prikaz **C** predstavlja skup $\mathbf{R} \setminus [2, 7\rangle = \langle -\infty, 2\rangle \cup [7, +\infty\rangle$, a grafički prikaz **D** predstavlja skup $\mathbf{R} \setminus \langle 2, 7] = \langle -\infty, 2] \cup \langle 7, +\infty\rangle$.

2. **D.** Prva nejednakost je netočna jer iz nejednakosti $-1 > -2$ dijeljenjem s 2 dobijemo $-\frac{1}{2} > -\frac{2}{2} = -1$.

Druga nejednakost je netočna zbog činjenice da ako dva strogo pozitivna razlomka imaju jednake brojnike, onda je veći onaj koji ima manji nazivnik. Drugim riječima, ako su $a, b \in \mathbf{R}$ takvi da vrijedi nejednakost $0 < a < b$, onda vrijedi nejednakost $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$. Primijetimo da je ovdje nužna pretpostavka o strogoj pozitivnosti brojeva a i b jer npr. iz nejednakosti $-1 < 2$ ne slijedi nejednakost $-1 = \frac{1}{-1} > \frac{1}{2}$.

Treća nejednakost je netočna jer vrijedi jednakost $0.5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

Četvrta nejednakost je točna zbog $1.3 = \frac{13}{10} = \frac{13 \cdot 3}{10 \cdot 3} = \frac{39}{30} > \frac{10}{30} = \frac{10:10}{30:10} = \frac{1}{3}$.

3. **D.** Neka su j, l i n redom količine jabuke, limuna i naranče u miješanom voćnom soku. Iz podatka da je $j : n = 1 : 4$ primjenom pravila za rješavanje razmjera („vanjski puta vanjski jednako je unutrašnji puta unutrašnji“) slijedi $4 \cdot j = 1 \cdot n$, odnosno $n = 4 \cdot j$.
Iz podatka da je $l : n = 2 : 5$ primjenom pravila za rješavanje razmjera slijedi $5 \cdot l = 2 \cdot n$. U ovu jednakost uvrstimo jednakost $n = 4 \cdot j$, pa slijedi:

$$5 \cdot l = 2 \cdot (4 \cdot j),$$
$$5 \cdot l = 8 \cdot j.$$

Dijeljenjem ove jednakosti izrazom $8 \cdot l$ dobijemo:

$$\frac{5}{8} = \frac{j}{l}.$$

Ovu jednakost zapišemo kao razmjer i dobivamo traženi omjer:

$$j : l = 5 : 8.$$

4. **A.** Imamo redom:

$$2\cdot a=\frac{3\cdot a-11}{5} \quad /\cdot 5$$
$$10\cdot a=3\cdot a-11,$$
$$10\cdot a-3\cdot a=-11,$$
$$7\cdot a=-11 \quad /:7$$
$$a=-\frac{11}{7}.$$

5. **D.** Zadanu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$2\cdot x\cdot(x-2)=3\cdot(x+3),$$
$$2\cdot x^2-4\cdot x=3\cdot x+9,$$
$$2\cdot x^2-4\cdot x-3\cdot x-9=0,$$
$$2\cdot x^2-7\cdot x-9=0 \quad /:2$$
$$x^2-\frac{7}{2}\cdot x-\frac{9}{2}=0.$$

Vièteove formule tvrde da je zbroj svih rješenja gornje kvadratne jednadžbe jednak suprotnoj vrijednosti koeficijenta uz x u toj jednadžbi. Koeficijent uz x jednak je $-\frac{7}{2}$, pa je traženi zbroj jednak $\frac{7}{2}$.

6. **A.** Za svaku pojedinu funkciju treba izračunati $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i utvrditi koja od navedenih funkcija ima svojstvo $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. (To svojstvo, prema definiciji nultočke, znači da je $\frac{1}{2}$ nultočka funkcije f.) Imamo redom:

A. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{1}{2}-1=1-1=0.$

B. $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=2\cdot\frac{1}{4}-1=\frac{2}{4}-1=\frac{2}{4}-\frac{4}{4}=\frac{2-4}{4}=-\frac{2}{4}=-\frac{2:2}{4:2}=-\frac{1}{2}.$

C. $f\left(\frac{1}{2}\right)=10^{2\cdot\frac{1}{2}}=10^1=10.$

D. $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{4}+1-1=-\frac{1}{4}.$

Jedina funkcija koja ima svojstvo $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ je funkcija $f(x)=2\cdot x-1$.

7. **B.** Primijetimo da je funkcija f polinom 2. stupnja, odnosno kvadratna funkcija oblika $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Iz podatka da ta funkcija ima najmanju vrijednost zaključujemo da je $a > 0$. Znamo da najmanja vrijednost u tom slučaju iznosi $f_{\min} = \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}$ i da se postiže za $x_{\min} = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$.

U zadatku je zadano $x_{min} = 2$, $b = -3$ i $c = \dfrac{1}{2}$, pa uvrštavanjem $x_{min} = 2$, $b = -3$ u jednakost $x_{\min} = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$ dobivamo jednadžbu:

$$2 = \frac{3}{2 \cdot a}.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$2 = \frac{3}{2 \cdot a} \quad / \cdot a$$
$$2 \cdot a = \frac{3}{2} \quad / : 2$$
$$a = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}.$$

U izraz za f_{min} uvrstimo $a = \dfrac{3}{4}$, $b = -3$ i $c = \dfrac{1}{2}$, pa dobijemo:

$$f_{\min} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - (-3)^2}{4 \cdot \frac{3}{4}} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2} - 9}{3} = \frac{\frac{3}{2} - 9}{3} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{18}{2}}{3} = \frac{-\frac{15}{2}}{3} = -\frac{15}{2 \cdot 3} = -\frac{5}{2}.$$

Dakle, tražena najmanja vrijednost iznosi $-\dfrac{5}{2}$.

8. **C.** Koeficijent smjera pravca p_1 jednak je koeficijentu uz x u zadanoj (eksplicitnoj) jednadžbi toga pravca. Stoga je $k_1 = -3$. Analogno zaključujemo da je koeficijent smjera pravca p_2 jednak $k_2 = 3$, a koeficijent smjera pravca p_3 jednak $k_3 = 3$. Očito je $k_2 = k_3 = 3$, pa su pravci p_2 i p_3 usporedni. (Pravci u ravnini su usporedni ako i samo ako imaju jednake koeficijente smjerova.)
Primijetimo da pravac p_1 nije usporedan s pravcima p_2 i p_3. To znači da pravac p_1 siječe svaki od pravaca p_2 i p_3 u točno jednoj točki.

9. **B.** Dokažimo najprije pomoćnu tvrdnju.

Tvrdnja 1. Parabola $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, gdje su $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, ima tjeme u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini ako i samo ako je $b = c = 0$.

Dokaz Tvrdnje 1.: Znamo da su koordinate tjemena T zadane parabole u općem slučaju određene s $T = \left(-\dfrac{b}{2 \cdot a}, \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right)$. Ako je $T = (0, 0)$, onda istodobno moraju vrijediti jednakosti

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2 \cdot a} = 0, \\ \dfrac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = 0. \end{cases}$$

Množenjem tih jednakosti s $2 \cdot a$, odnosno $4 \cdot a$ (ti brojevi su različiti od nule jer je, prema pretpostavci, $a \neq 0$) dobivamo:

$$\begin{cases} -b = 0, \\ 4 \cdot a \cdot c - b^2 = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe je $b = 0$.
Uvrštavanjem $b = 0$ u drugu jednadžbu dobijemo $4 \cdot a \cdot c = 0$, pa dijeljenjem te jednakosti s $4 \cdot a \neq 0$ slijedi $c = 0$. Time je dokazan smjer $\Rightarrow$ Tvrdnje 1.

Da dokažemo smjer $\Leftarrow$, u formulu za koordinate točke T uvrstimo $b = 0$ i $c = 0$. Imamo:

$$T = \left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right) = \left(-\frac{0}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot 0 - 0^2}{4 \cdot a}\right) = \left(0, \frac{0-0}{4 \cdot a}\right) = (0,0),$$

pa je tjeme parabole doista ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. ■

Odredimo najprije jednadžbu parabole sa slike. Tražimo je u obliku $y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$. Iz slike se vidi da ta parabola ima tjeme u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Prema Tvrdnji 1. to znači da je $b = c = 0$, pa se jednadžba parabole svodi na $y = a \cdot x^2$. Iz slike možemo „očitati“ da parabola prolazi točkom $S_1 = (2, -4)$.Točnije, ta je točka sjecište nacrtanoga pravca i parabole u četvrtom kvadrantu pravokutnoga koordinat-noga sustava u ravnini. Uvrštavanjem $x = 2$ i $y = -4$ u jednakost $y = a \cdot x^2$ dobivamo:

$$\begin{gathered} (-4) = a \cdot 2^2, \\ (-4) = a \cdot 4 \quad /:4 \\ a = -1. \end{gathered}$$

Dakle, jednadžba parabole glasi: $y = (-1) \cdot x^2$, odnosno $y = -x^2$.

Odredimo jednadžbu pravca (u eksplicitnom obliku, tj. u obliku $y = k \cdot x + l$, gdje su $k, l \in \mathbf{R}$). Već smo uočili da pravac prolazi točkom $S_1 = (2, -4)$. Iz slike vidimo da pravac siječe os ordinata (os y) u točki $S = (0, -3)$. To znači da je $l = -3$. Zbog toga se jednadžba pravca svodi na $y = k \cdot x + (-3)$, odnosno $y = k \cdot x - 3$. Uvrštavanjem $x = 2$ i $y = -4$ u jednakost $y = k \cdot x - 3$ dobivamo:

$$\begin{gathered} -4 = k \cdot 2 - 3, \\ (-2) \cdot k = -3 + 4, \\ (-2) \cdot k = 1. \end{gathered}$$

Odavde dijeljenjem s (-2) slijedi $k = -\dfrac{1}{2}$. Dakle, jednadžba pravca glasi: $y = -\dfrac{1}{2} \cdot x - 3$.
Prevedimo tu jednadžbu u implicitni oblik:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot x - 3 \quad / \cdot 2$$
$$2 \cdot y = -x - 6,$$
$$x + 2 \cdot y = -6.$$

Stoga je rješenje zadatka sustav:

$$\begin{cases} x + 2 \cdot y = -6, \\ y = -x^2. \end{cases}$$

10. B. Označimo duljinu kraka promatranoga trokuta s b, duljinu osnovice s a, a duljinu visine povučene na osnovicu s v. Iz podatka da je duljina osnovice kraća od duljine kraka za četvrtinu duljine kraka slijedi:

$$a = b - \frac{1}{4} \cdot b = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot b = \left(\frac{4}{4} - \frac{1}{4}\right) \cdot b = \frac{4-1}{4} \cdot b = \frac{3}{4} \cdot b.$$

U jednakokračnom trokutu visina povučena na osnovicu, krak trokuta i dužina određena nožištem visine povučene na osnovicu i jednim vrhom trokuta tvore pravokutan trokut. Duljine kateta toga trokuta su v i $\frac{1}{2} \cdot a$ jer se nožište visine povučene na osnovicu jednakokračnoga trokuta podudara s polovištem te osnovice. Duljina hipotenuze jednaka je duljini kraka b. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$v = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} \ .$$

U ovu jednakost uvrstimo jednakost $a = \frac{3}{4} \cdot b$, pa imamo:

$$v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(\frac{3}{4} \cdot b\right)^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot b^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{\frac{9}{16} \cdot b^2}{4}} = \sqrt{b^2 - \frac{9}{16 \cdot 4} \cdot b^2} =$$
$$= \sqrt{b^2 - \frac{9}{64} \cdot b^2} \sqrt{\left(1 - \frac{9}{64}\right) \cdot b^2} = \sqrt{\left(\frac{64}{64} - \frac{9}{64}\right) \cdot b^2} = \sqrt{\frac{64-9}{64} \cdot b^2} = \sqrt{\frac{55}{64} \cdot b^2} = \frac{\sqrt{55}}{\sqrt{64}} \cdot \sqrt{b^2} = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot |b|.$$

Budući da je prema prirodi zadatka $b > 0$, to je $|b| = b$, pa zaključujemo da je:

$$v = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot b.$$

U ovu jednakost uvrstimo $b = 24$, pa konačno dobivamo:

$$v = \frac{\sqrt{55}}{8} \cdot 24 = 3 \cdot \sqrt{55} \approx 22.24859546 \approx 22.25 \text{ cm}.$$

11. B. Tražena površina jednaka je zbroju površina trokuta *AFD* i usporednika *FBCD*. Prema pretpostavci su stranice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ usporedne, pa je duljina visine na stranicu $\overline{AF}$ trokuta *AFD* jednaka duljini visine na stranicu *FB* usporednika *FBCD*. Potonja visina je dužina $\overrightarrow{FC}$ čija je duljina $\left|\overline{FC}\right| = 2 \cdot \left|\overline{FB}\right| = 2 \cdot 1.3 = 2.6$ cm.

Nadalje, duljina stranice $\overline{AF}$ trokuta *AFD* jednaka je $\left|\overline{AF}\right| = \left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{FB}\right| = 4.5 - 1.3 = 3.2$ cm. Tako konačno dobivamo:

$$P = P_{AFD} + P_{FBCD} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AF}\right| \cdot \left|\overline{FC}\right| + \left|\overline{FB}\right| \cdot \left|\overline{FC}\right| = \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{FB}\right|\right) \cdot \left|\overline{FC}\right| = \left(\frac{1}{2} \cdot 3.2 + 1.3\right) \cdot 2.6 =$$
$$= (1.6 + 1.3) \cdot 2.6 = 2.9 \cdot 2.6 = 7.54 \text{ cm}^2$$

12. A. Osjenčano tijelo *ABCDP* je kosa četverostrana piramida. Osnovka te piramide je pravokutnik *ABCD*. Njegova je površina

$$B = \left|\overline{AB}\right| \cdot \left|\overline{BC}\right| = 4.2 \cdot 2 = 8.4 \text{ cm}^2.$$

Duljina visine *h* piramide *ABCDP* jednaka je duljini brida *DP* jer je brid *DH* kvadra *ABCDEFGH* okomit na ravninu u kojoj se nalazi pravokutnik *ABCD*. Prema pretpostavci, *P* je polovište brida *DH*, pa je $\left|\overline{DP}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{DH}\right|$. Budući da je *ABCDEFGH* kvadar, slijedi da je $\left|\overline{DH}\right| = \left|\overline{CG}\right| = 3.8$ cm. Stoga je

$$h = \left|\overline{DP}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{DH}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{CG}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3.8 = 1.9 \text{ cm}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$V_{ABCDP} = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 8.4 \cdot 1.9 = 2.8 \cdot 1.9 = 5.32 \text{ cm}^3.$$

13. C. Pojednostavnimo zadani izraz na sljedeći način:

$$\frac{1}{2 \cdot x - 1} \cdot \frac{x - 2 \cdot x^2}{x^2} + \frac{3}{x-3} = \frac{1}{2 \cdot x - 1} \cdot \frac{(-x) \cdot (-1 + 2 \cdot x)}{x^2} + \frac{3}{x-3} = \frac{(-1) \cdot x \cdot (2 \cdot x - 1)}{x^2 \cdot (2 \cdot x - 1)} + \frac{3}{x-3} =$$
$$= \frac{-1}{x} + \frac{3}{x-3} = \frac{(-1) \cdot (x-3) + 3 \cdot x}{x \cdot (x-3)} = \frac{-x + 3 + 3 \cdot x}{x \cdot (x-3)} = \frac{2 \cdot x + 3}{x \cdot (x-3)}$$

Brojnik ovoga izraza jednak je $2 \cdot x + 3$.

14. B. Na početku školske godine u zbor je bilo učlanjeno ukupno $z_0 = \frac{24}{100} \cdot 225 = 54$ učenika. Kad se u školu upisalo 15 novih učenika, novi ukupan broj učenika u školi iznosio je $u_1 = 225 + 15 = 240$. Od tih 15 novih učenika, 4 su se upisala u zbor, pa je u zboru bilo ukupno $z_1 = 54 + 4 = 58$ učenika. Potom se iz zbora isčlanilo 12 učenika, pa je u zboru na kraju godine bilo ukupno $z_2 = 58 - 12 = 46$ učenika. Da se dobije traženi postotak, treba izračunati koliko postotaka iznosi broj 46 u odnosu na broj 240:

$$p = \frac{100 \cdot 46}{240} = \frac{5 \cdot 46}{12} = \frac{5 \cdot 23}{6} = \frac{115}{6} \approx 19.1666667 \approx 19.17\% \cdot$$

15. B. Izračunajmo cijenu jedne litre goriva prije pojeftinjenja. Ako se za 473.72 kn moglo kupiti 45.55 litara goriva, onda je cijena jedne litre goriva 473.72 : 45.55 = 10.4 kn. Nakon pojeftinjenja od 10 lipa = 0.1 kn, cijena goriva iznosi 10.4 – 0.1 = 10.3 kn. Stoga se za 473.72 kn može kupiti ukupno 473.72 : 10.3 ≈ 45.992233 ≈ 45.99 litara goriva.

(*Napomena*: Dobiveni rezultat treba zaokružiti na 45.99, a ne na 46 litara jer 46 litara goriva nakon pojeftinjenja stoji ukupno 46 · 10.3 = 473.8 kn, što je veće od iznosa koji nam je na raspolaganju.)

16. D. Neka je s tražena udaljenost. Ukupno vrijeme t_b koje je za prelazak te udaljenosti utrošio biciklist jednako je količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine biciklista, pa je

$$t_b = \frac{s}{12}.$$

Analogno, ukupno vrijeme t_a koje je za prelazak iste udaljenosti utrošio automobilist jednako je količniku prijeđenoga puta i prosječne brzine automobilista, pa je:

$$t_a = \frac{s}{64}.$$

Biciklist je ukupno vozio 2 sata i 10 minuta dulje od automobilista. Izrazimo to vrijeme u satima jer je brzina obojice ljudi iskazana u km/h:

$$\text{2 sata i 10 minuta} = 2 \text{ sata} + \frac{10}{60} \text{ sati} = 2 \text{ sata} + \frac{1}{6} \text{ sata} = 2 + \frac{1}{6} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{12+1}{6} = \frac{13}{6} \text{ sati.}$$

To znači da mora vrijediti jednakost:

$$t_b - t_a = \frac{13}{6}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $t_b = \frac{s}{12}$ i $t_a = \frac{s}{64}$, pa dobivamo:

$$\frac{s}{12} - \frac{s}{64} = \frac{13}{6} \quad / \cdot 192$$
$$16 \cdot s - 3 \cdot s = 416,$$
$$13 \cdot s = 416.$$

Odatle dijeljenjem s 13 slijedi s = 32 km.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. $\left(m - \frac{1}{2}\right)^2$**.** Prvi član binoma očito mora biti m. Dvostruki umnožak prvoga i drugoga člana binoma mora biti jednak $-m$, pa zaključujemo da je drugi član binoma jednak $\frac{-m}{2 \cdot m} = -\frac{1}{2}$. Doista,

$$\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = m^2 - m + \frac{1}{4}.$$

18. 2500. Prisjetimo se da je 1 km = 1000 m. Stoga je 1 km^2 = 1000^2 m^2 = 1000000 m^2, pa je $\frac{1}{4}$ km^2 =

$= \frac{1}{4} \cdot 1000000 = 250000$ m^2. Da bismo ovu površinu iskazali u arima, moramo je podijeliti sa 100. Tako se dobije P = 250000 : 100 = 2500 ara.

19. 9. Neka je x broj plesača, a y broj plesačica u tom društvu. Iz podatka da će u slučaju plesanja u mješovitim parovima četiri plesačice biti bez svojega para zaključujemo da plesačica ima za 4 više nego plesača, odnosno da vrijedi jednakost:

$$y = x + 4.$$

Ukupan broj članova folklornoga društva jednak je $x + y$. S druge strane, iz podatka da svi članovi društva tvore ukupno 7 parova zaključujemo da je ukupan broj članova društva jednak $2 \cdot 7 = 14$ jer svaki par tvori dvoje ljudi. Stoga mora vrijediti jednakost:

$$x + y = 14.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = x + 4, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Taj sustav možemo zapisati u obliku

$$\begin{cases} -x + y = 4, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Zbrajanjem posebno lijevih, a posebno desnih strana tih jednadžbi dobivamo

$$2 \cdot y = 18.$$

Odatle dijeljenjem s 2 slijedi $y = 9$. Dakle, u društvu ima 9 plesačica.

<u>**Napomena**</u>**: U formulaciji zadatka nedostaje riječ *točno*. Preciznije, drugi dio druge rečenice treba glasiti: *Od ukupnoga broja plesača i plesačica moguće je napraviti točno 7 parova*.**

20. 47°. Označimo s A, B i C vrhove trokuta čiji je jedan kut φ. Oznake postavimo tako da je A vrh kuta φ, a B vrh kuta čija je mjera 101°. Kut pri vrhu B trokuta ABC i kut čija je mjera 101° su komplementarni kutovi, pa je kut pri vrhu B trokuta ABC jednak:

$$\angle B = 180° - 101° = 79°.$$

Nadalje, budući da su pravci b i c prema pretpostavci usporedni, mjera kuta pri vrhu C trokuta ABC jednaka je 54° (šiljasti kutovi uz presječnicu a su međusobno jednaki), tj. vrijedi jednakost:

$$\angle C = 54°.$$

Traženi kut φ izračunat ćemo iz činjenice da zbroj mjera kutova u trokutu ABC mora biti jednak 180°:

$$\varphi + \angle B + \angle C = 180°,$$

$$\varphi + 79° + 54° = 180°,$$
$$\varphi = 180° - (79° + 54°),$$
$$\varphi = 180° - 133°,$$
$$\varphi = 47°.$$

21. 25.13. Svaka se traka sastoji od ravnoga dijela i od kružnice koju tvore dvije sukladne polukružnice na različitim stranama staze. Duljina ravnoga dijela svake trake jednaka je 110 metara, pa nju ne moramo uzimati u obzir prigodom računanja tražene razlike duljina. „Spojimo“ polukružne dijelove traka tako da dobijemo ukupno šest kružnica. Trkač koji trči unutrašnjim dijelom najkraće trake prevali put jednak opsegu prve kružnice. Trkač koji trči unutrašnjim dijelom najdulje trake prevali put jednak opsegu pete kružnice.

Uočimo da svaka od navedenih šest kružnica, osim prve kružnice, ima za 2 metra veći promjer od neposredno prethodne kružnice (na promjer neposredno prethodne kružnice treba dodati 1 metar širine na „sjevernoj“ i 1 metar širine na „južnoj“ strani promjera). Stoga promjeri tih šest kružnica tvore aritmetički niz d_1, $d_1 + 2$, $d_1 + 4$, $d_1 + 6$, $d_1 + 8$ i $d_1 + + 10$ pri čemu je $d_1 = 70$ metara.

Tražena razlika putova jednaka je razlici opsega pete kružnice i opsega prve kružnice, pa odmah imamo:

$$\Delta d = (d_1 + 8) \cdot \pi - d_1 \cdot \pi = d_1 \cdot \pi + 8 \cdot \pi - d_1 \cdot \pi = 8 \cdot \pi \approx 25.132741 \approx 25.13 \text{ m.}$$

22. 1.) 0.3927. Imamo:

$$\frac{\pi}{8} \approx 0.392699081698724.$$

Zaokruživanjem ovoga broja na 4 decimale dobijemo 0.3927 (peta decimala je 9, pa prigodom zaokruživanja četvrtu decimalu moramo uvećati za 1).

2.) $-\frac{1}{4}$ **.** Primijetimo da vrijedi nejednakost $\sqrt{2} > 1$, odnosno $1 - \sqrt{2} < 0$. Zo znači da je $\left|1-\sqrt{2}\right| = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$. Tako imamo:

$$\frac{3-\left|1-\sqrt{2}\right|-2^2}{2\cdot\sqrt{8}} = \frac{3-\left(\sqrt{2}-1\right)-4}{2\cdot\sqrt{4\cdot 2}} = \frac{3-\sqrt{2}+1-4}{2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

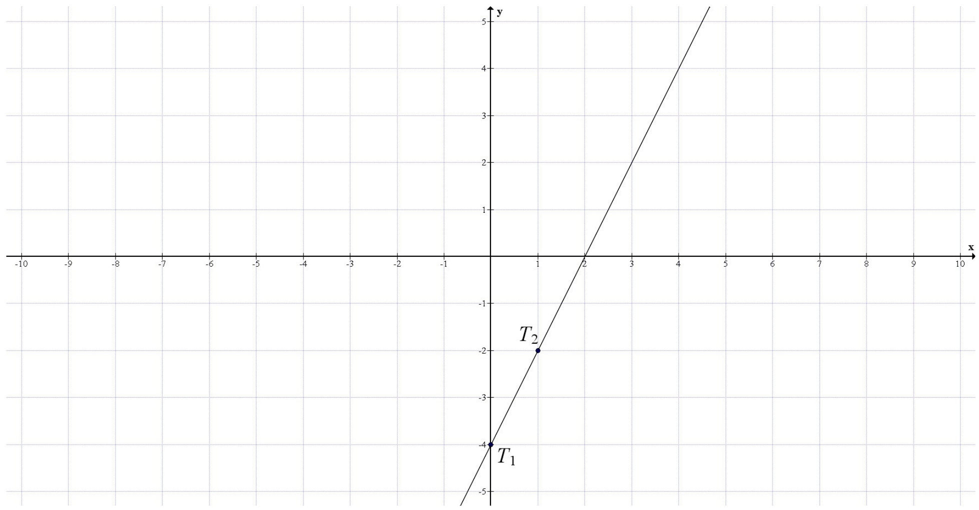
23. 1.) Vidjeti Sliku 18. Funkcija f je polinom 1. stupnja (linearna funkcija). Njezin graf je pravac čija je jednadžba $y = 2 \cdot x - 4$. Da bismo nacrtali taj pravac, dovoljno je odrediti bilo koje dvije njegove točke. Za vrijednosti varijable x uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 1$. Izračunamo:

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 4 = 0 - 4 = -4,$$
$$f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2,$$

Formiramo tablicu:

x	0	1
y	–4	–2

U zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke $T_1 = (0, -4)$ i $T_2 = (1, -2)$, pa ih spojimo jednim pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 18.



Slika 18.

2.) **95.** Imamo redom:

$$\frac{1}{2}\cdot f(100)+f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot(2\cdot 100-4)+\left(2\cdot\frac{1}{2}-4\right)=\frac{1}{2}\cdot(200-4)+(1-4)=\frac{1}{2}\cdot 196+(-3)=98-3=95\ .$$

24. **1.**) **8.1.** Traženu promjenu računamo prema formuli $R=100\cdot\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{p_2}{100}\right)-100$. U tu formulu uvrstimo p_1 = +15 i p_2 = –6. (+15 označava povećanje osnovne veličine za 15%, a –6 smanjenje osnovne veličine za 6%.) Dobijemo:

$$R=100\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1+\frac{-6}{100}\right)-100=100\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right)\cdot\left(1-\frac{6}{100}\right)-100=$$
$$=100\cdot 1.15\cdot 0.94-100=108.1-100=8.1$$

Predznak + ukazuje na to da je krajnja plaća veća od početne. Stoga zaključujemo da je zaposlenikova plaća u lipnju za 8.1% veća od zaposlenikove plaće u travnju.

2.) **4536.42.** Neka je x tražena plaća. Iz podzadatka **1.**) znamo da se uvećanjem te plaće za 8.1% njezina iznosa dobije plaća u lipnju. Stoga možemo postaviti jednadžbu:

$$x+\frac{8.1}{100}\cdot x=4903.87\ .$$

Riješimo tu jednadžbu standardnim postupkom:

$$x+\frac{8.1}{100}\cdot x=4903.87 \quad /\cdot 100$$
$$100\cdot x+8.1\cdot x=490387,$$
$$108.1\cdot x=490387.$$

Odavde dijeljenjem s 108.1 dobivamo $x\approx 4536.419981$. Taj rezultat treba zaokružiti na dvije decimale jer ne postoji tisućiti (ili manji) dio novčane jedinice od 1 kn. Zaokruživanjem dobijemo $x\approx 4536.42$ kn.

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

25. 1.) $\mathbf{y = -2 \cdot x + 3}$**.** Neka je $y = k \cdot x + l$ tražena jednadžba. Iz slike vidimo da zadani pravac prolazi točkom $C = (0, 3)$. To znači da je $l = 3$. Također, iz slike vidimo da zadani pravac prolazi točkom $B = (-1, 5)$. To znači da koordinate te točke moraju zadovoljavati jednadžbu pravca. U jednadžbu pravca uvrstimo $x = -1$, $y = 5$ i dobiveni rezultat $l = 3$:

$$\begin{aligned} 5 &= k \cdot (-1) + 3, \\ k &= 3 - 5, \\ k &= -2. \end{aligned}$$

Dakle, tražena jednadžba (u eksplicitnom obliku) glasi: $y = -2 \cdot x + 3$.

2.) (3, –3). Da dođemo od ishodišta (točke (0, 0)) do točke D, moramo se pomaknuti za 3 jedinične dužine udesno i 3 jedinične dužine prema dolje. Pomicanjem udesno dolazimo u točku (3, 0). Pomicanjem prema dolje dolazimo u točku (3, –3) i to su tražene koordinate.

26. 1.) 450; 30. Primijetimo da pomak za jedan kvadratić u smjeru osi apscisa odgovara pomaku od 50 km (jer pomak za dva kvadratića u smjeru osi apscisa odgovara pomaku od 100 km), te da pomak za jedan kvadratić u smjeru osi ordinata odgovara pomaku za 5 litara (jer pomak za dva kvadratića u smjeru osi ordinata odgovara pomaku za 10 litara).

U zadatku se zapravo traži određivanje sjecišta zadanih pravaca. Lako očitamo da se radi o točki $S = (450, 30)$. To znači da će oba automobila nakon prijeđenih 450 km (prva koordinata točke S) imati točno 30 litara goriva (druga koordinata točke S) u spremniku .

2.) $\mathbf{\frac{13}{9}}$**.** Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 24, a drugu s $3 - y$. Dobivamo:

$$\begin{cases} 3 \cdot (x - 3 \cdot y) = 1 \cdot 8, \\ 2 \cdot x = 9 \cdot (3 - y). \end{cases}$$

Podijelimo drugu jednadžbu s 2:

$$\begin{cases} 3 \cdot (x - 3 \cdot y) = 1 \cdot 8, \\ x = \frac{9}{2} \cdot (3 - y). \end{cases}$$

Uvrstimo drugu jednadžbu u prvu jednadžbu:

$$\begin{aligned} &3 \cdot \left[\frac{9}{2} \cdot (3 - y) - 3 \cdot y\right] = 8, \\ &3 \cdot \left(\frac{27}{2} - \frac{9}{2} \cdot y - 3 \cdot y\right) = 8, \\ &\frac{81}{2} - \frac{27}{2} \cdot y - 9 \cdot y = 8 \quad / \cdot 2 \\ &81 - 27 \cdot y - 18 \cdot y = 16, \\ &-27 \cdot y - 18 \cdot y = 16 - 81, \\ &-45 \cdot y = -65 \quad / : (-45) \\ &y = \frac{-65}{-45} = \frac{65 : 5}{45 : 5} = \frac{13}{9}. \end{aligned}$$

27.

1.) $\boldsymbol{x < 7}$ **ili** $\boldsymbol{x \in \langle -\infty, 7\rangle}$**.** Pomnožimo zadanu nejednadžbu sa 6. Dobivamo:

$$\begin{gathered}3 \cdot (x + 3) + 2 \cdot (x + 2) > 6 \cdot (x + 1),\\ 3 \cdot x + 9 + 2 \cdot x + 4 > 6 \cdot x + 6,\\ 3 \cdot x + 2 \cdot x - 6 \cdot x > 6 - 9 - 4,\\ (-1) \cdot x > -7.\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–1), uz obaveznu promjenu znaka nejednakosti, slijedi $x < 7$. Dakle, sva rješenja zadane nejednadžbe tvore skup $\langle -\infty, 7\rangle$.

2.) $\boldsymbol{\frac{1}{2}}$**.** Pomnožimo zadanu jednadžbu s 2. Dobijemo:

$$10 \cdot 100^{1-x} = 10^{6 \cdot x - 1}.$$

Budući da je $100 = 10^2$, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s bazom 10 primjenjujući pravilo za potenciranje potencije i pravilo za množenje potencija s jednakim bazama:

$$\begin{gathered}10 \cdot (10^2)^{1-x} = 10^{6 \cdot x - 1},\\ 10 \cdot 10^{2 \cdot 1 - 2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1},\\ 10^{1+2-2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1},\\ 10^{3-2 \cdot x} = 10^{6 \cdot x - 1}.\end{gathered}$$

Izjednačavanjem eksponenata slijedi:

$$\begin{gathered}3 - 2 \cdot x = 6 \cdot x - 1,\\ -2 \cdot x - 6 \cdot x = -1 - 3,\\ (-8) \cdot x = -4.\end{gathered}$$

Odatle dijeljenjem s (–8) dobivamo $x = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{4:4}{8:4} = \frac{1}{2}$.

3.) **32.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}&6 \cdot (x^3 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot x) - (2 \cdot x^2 + 8 \cdot x) \cdot (3 - 7 \cdot x) =\\ &= 6 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 30 \cdot x - (6 \cdot x^2 + 24 \cdot x - 14 \cdot x^3 - 56 \cdot x^2) =\\ &= 6 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 6 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 14 \cdot x^3 + 56 \cdot x^2 =\\ &= 20 \cdot x^3 + 32 \cdot x^2 + 6 \cdot x\end{aligned}$$

Član koji sadrži x^2 jednak je $32 \cdot x^2$.

28. 1.) 142. Neka je z indeks zagađenja (iskazan u broju čestica na milijun čestica zraka), a t vrijeme iskazano u satima. Iz podataka u zadatku slijedi da je $z(t) = 25 + 13 \cdot t$, pri čemu vrijednosti varijable t nužno pripadaju skupu $[9]_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots, 7, 8, 9\}$. Drugim riječima, domena funkcije z je skup $[9]_0$. Traženo zagađenje jednako je $z(9)$, tj.

$$z(9) = 25 + 13 \cdot 9 = 25 + 117 = 142.$$

Dakle, indeks zagađenja u 16 sati iznosi 142 čestice na milijun čestica zraka.

2.) **21**. Najveća vrijednost indeksa zagađenja zraka, prema **1.**), iznosi 142 čestice na milijun čestica zraka. Od 16 sati poslijepodne do 7 sati ujutro prođe ukupno 8 + 7 = 15 sati. U tih 15 sati indeks zagađenja se smanjio za 142 – 25 = 117 čestica na milijun čestica zraka. To znači da se u jednom satu indeks zagađenja smanjio za $\frac{117}{15}=\frac{117:3}{15:3}=\frac{39}{5}$ čestica na milijun čestica zraka. Stoga je funkcija zavisnosti indeksa zagađenja o vremenu dana s $z(t)=142-\frac{39}{5}\cdot t$, gdje je $t \in [0, 15]$.

Preostaje odrediti $t_0 \in [0, 15]$ takav da je $z(t_0) = 103$. Dobivamo jednadžbu:

$$142-\frac{39}{5}\cdot t_0=103.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&142-\frac{39}{5}\cdot t_0=103,\\
&-\frac{39}{5}\cdot t_0=103-142,\\
&-\frac{39}{5}\cdot t_0=-39 \quad / :\left(-\frac{39}{5}\right)\\
&t_0=5
\end{aligned}$$

Dakle, nakon $t_0 = 5$ sati (računajući od 16 sati), tj u 16 + 5 = 21 sat indeks zagađenja iznosit će 103 čestice na milijun čestica zraka.

visoka poslovna škola par

RJEŠENJA ISPITNIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNIM MATURAMA OD 2010. DO 2014. GODINE (OSNOVNA (B) RAZINA)

ISPITNI ROK: RUJAN 2014.

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Podsjetimo da oznaka $\langle$ uz točku na brojevnom pravcu pridruženu realnom broju a znači da broj a ne pripada istaknutom podskupu skupa realnih brojeva, a da oznaka [uz istu točku znači da broj a pripada spomenutom podskupu. Stoga zadani grafički prikaz predstavlja interval $\langle -1, 5]$. Taj interval je skup svih realnih brojeva koji su istodobno strogo veći od –1 i jednaki ili manji od 5.

Primijetimo da je u **A** naveden opis otvorena intervala $\langle -1, 5\rangle$, u **B** opis poluzatvorena intervala $[-1, 5\rangle$, a u **D** opis segmenta $[-1, 5]$.

2. **A.** Iz podatka da je Jelena 12 cm niža od Vlaste izravno slijedi da je Vlasta 12 cm viša od Jelene. Iz podatka da je Marija 7 cm viša od Jelene i prethodne rečenice ovoga rješenja slijedi da je Vlasta 12 – 7 = 5 cm viša od Marije. Iz podatka da je Branka 8 cm viša od Marije i prethodne rečenice ovoga rješenja slijedi da je Branka 8 – 5 = 3 cm viša od Vlaste. Stoga zaključujemo da je Branka 3 cm viša od Vlaste, 8 cm viša od Marije i 12 + 3 = 15 cm viša od Jelene. Poredane silazno po visini, djevojke tvore niz Branka, Vlasta, Marija, jelena. Dakle, najviša među njima je Branka.

3. **C.** Izrazimo vrijeme od 14 dana i 4 sata u satima. Prisjetimo se da jedan dan ima 24 sata, pa je vrijeme od 14 dana i 4 sata jednako vremenu od $14 \cdot 24 + 4 = 340$ sati.

Označimo traženo vrijeme s t. Napomenimo da je vrijeme t izraženo u minutama. Budući da su duljina vremena i duljina kašnjenja sata upravno razmjerne veličine, možemo postaviti razmjer:

$$t : 340 = 5 : 8.5.$$

Riješimo ovaj razmjer uobičajenim načinom:

$$8.5 \cdot t = 340 \cdot 5,$$
$$8.5 \cdot t = 1700.$$

Odatle dijeljenjem s 8.5 slijedi $t = 200$. Dakle, sat će kasniti ukupno 200 minuta.

4. **D.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} &1 - p = \frac{2-p}{3} \quad / \cdot 3 \\ &3 - 3 \cdot p = 2 - p, \\ &-3 \cdot p + p = 2 - 3, \\ &(-2) \cdot p = -1 \quad / : (-2) \\ &a = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. **D.** Zadatak je ekvivalentan rješavanju jednadžbe $\frac{1}{3} \cdot x - 6 = 0$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \cdot x - 6 = 0 \quad / \cdot 3 \\ &x - 18 = 0, \\ &x = 18. \end{aligned}$$

6. **B.** Iz podatka da kvadratna funkcija ima najveću vrijednost zaključujemo da je $a < 0$. Dotična najveća vrijednost računa se iz izraza

$$M = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}.$$

Iz podatka da je $M = 0$ slijedi da brojnik gornjega razlomka mora biti jednak nuli, tj. da mora vrijediti jednakost

$$4 \cdot a \cdot c - b^2 = 0.$$

Pomnožimo tu jednakost s (–1) i zamijenimo poredak članova na njezinoj lijevoj strani. Dobit ćemo:

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0.$$

Pripadna diskriminanta kvadratne funkcije je dana izrazom

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c,$$

što znači da je jednakost

$$b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$$

ekvivalentna jednakosti

$$D = 0.$$

Tako zaključujemo da istodobno moraju vrijediti relacije

$$a < 0 \text{ i } D = 0.$$

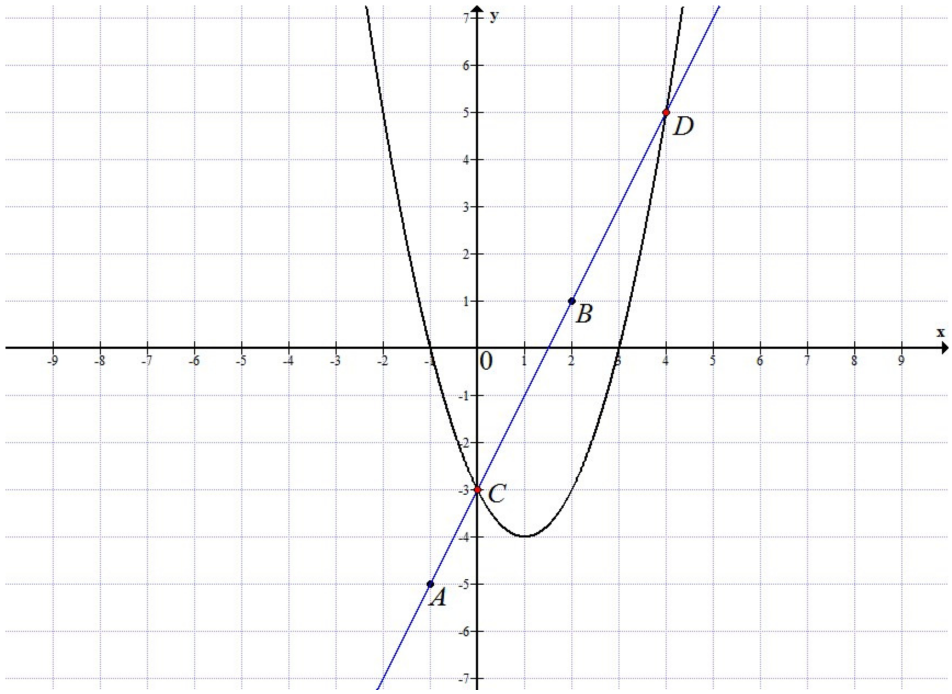
Jedina od četiriju navedenih funkcija koja ima oba svojstva je funkcija navedena pod **B**.

(*Napomena*: Skup svih mogućih rješenja zadatka tvore svi polinomi 2. stupnja kojima je vodeći koeficijent strogo manji od nule, a diskriminanta jednaka nuli.)

7. **D.** Povucimo pravac kroz točke A i B, pa sa dobivene slike očitajmo njegova sjecišta sa zadanom parabolom. Vidjeti Sliku 19.

Tražena sjecišta su točke C i D. Odmah vidimo da je $C = (0, -3)$ jer iz ishodišta zadanoga pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini do točke C dođemo tako da se spustimo tri jedinice duljine prema dolje. Iz ishodišta do točke D dođemo tako da se najprije pomaknemo za 4 jedinice duljine udesno, a potom za 5 jedinica duljine prema gore. Stoga je $D = (4, 5)$.

Dakle, tražena sjecišta su točke (0, –3) i (4, 5).



Slika 19.

8. **D.** Riješimo zadanu kvadratnu jednadžbu uobičajenim načinom. Imamo redom:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3}}{2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-6}}{1}=-b\pm\sqrt{b^2-6}\Rightarrow$$
$$x_1=-b-\sqrt{b^2-6},\ \ x_2=-b+\sqrt{b^2-6}.$$

Rješenje x_2 navedeno je pod slovom **D**.

9. **D.** Podsjetimo se da su pravci $p_1 \ldots A_1 \cdot x + B_1 \cdot y + C_1 = 0$ i $p_2 \ldots A_2 \cdot x + B_2 \cdot y + C_2 = 0$ usporedni ako i samo ako istodobno vrijede jednakosti $A_1 = A_2$ i $B_1 = B_2$.
U slučaju **A** nije istinita jednakost $A_1 = A_2$ jer je $A_1 = 1 \neq 2 = A_2$.
U slučajevima **B** i **C** nije istinita jednakost $B_1 = B_2$ jer je $B_1 = -1 \neq 1 = B_2$.
U slučaju **D** vrijede jednakosti $A_1 = A_2 = 2$ i $B_1 = B_2 = -1$, pa je pripadni par pravaca ujedno i rješenje zadatka.

10. **C**. Traženu površinu izračunat ćemo tako da od površine pravokutnika oduzmemo zbroj površina dvaju neosjenčanih pravokutnih trokutova. Duljine kateta manjega od tih dvaju trokutova su $\frac{1}{3}\cdot a$ i $\frac{1}{3}\cdot b$, a duljine kateta većega od tih dvaju trokutova su $\frac{2}{3}\cdot a$ i $\frac{2}{3}\cdot b$. Stoga imamo:

$$P=a\cdot b-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot b\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot a\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot b\right)=a\cdot b-\frac{a\cdot b}{18}-\frac{4\cdot a\cdot b}{18}=$$
$$=\frac{18\cdot a\cdot b-a\cdot b-4\cdot a\cdot b}{18}=\frac{13}{18}\cdot a\cdot b$$

Preostaje uvrstiti $a = 21$ i $b = 9$. Dobit ćemo:

$$P = \frac{13}{18} \cdot 21 \cdot 9 = \frac{13 \cdot 21}{2} = \frac{273}{2} = 136.5 \text{ cm}^2.$$

11. A. Izračunajmo najprije kut kod vrha C u trokutu ABC. Imamo:

$$\angle ACB = \angle BCD - \angle ACD = 150° - 60° = 90°.$$

Dakle, ABC je pravokutan trokut s pravim kutom kod vrha C. Njegove katete su dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, a hipotenuza je dužina $\overline{AB}$. Primjenom Pitagorina poučka odmah dobivamo:

$$|AC| = \sqrt{|AB|^2 - |BC|^2} = \sqrt{4^2 - 2.2^2} = \sqrt{16 - 4.84} = \sqrt{11.16} \approx 3.3406586 \text{ cm}.$$

Zaokruživanjem ovoga rezultata na jednu decimalu dobivamo $|AC| = 3.3$ cm. (Druga znamenka iza decimalne točke jednaka je 4, pa nju zanemarujemo, a prvu znamenku iza decimalne točke prepisujemo.)

12. B. Osnovka piramide je kvadrat čija stranica ima duljinu a = 12 cm. Stoga je površina osnovke piramide jednaka

$$B = a^2 = 12^2 = 144 \text{ cm}^2.$$

Duljina visine piramide povučene iz vrha piramide na osnovku piramide, duljina visine pobočke piramide i polovica duljine osnovnoga brida piramide tvore duljine stranica pravokutnoga trokuta. Hipotenuza toga trokuta je visina pobočke piramide. Primjenom Pitagorina poučka dobivamo duljinu h visine piramide:

$$h = \sqrt{v_p^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}.$$

Stoga je traženi obujam piramide jednak

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8 = 48 \cdot 8 = 384 \text{ cm}^3.$$

13. C. Iz podatka da je dobit podijeljena u omjeru 5 : 6 : 9 zaključujemo da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da dobiti iznose $5 \cdot k$, $6 \cdot k$ i $9 \cdot k$. Budući da je $k > 0$, najveća od tih triju dobiti iznosi $9 \cdot k$ kn, a najmanja $5 \cdot k$ kn. Njihova je razlika jednaka

$$\Delta = 9 \cdot k - 5 \cdot k = 4 \cdot k.$$

Prema zadatku, taj iznos mora biti jednak 2540 kn. Tako dobivamo linearnu jednadžbu 1. stupnja s jednom nepoznanicom:

$$4 \cdot k = 2540.$$

Odatle dijeljenjem s 4 slijedi $k = 635$. Tražena ukupna dobit iznosi:

$$D = 5 \cdot k + 6 \cdot k + 9 \cdot k = 20 \cdot k = 20 \cdot 635 = 12700 \text{ kn}.$$

14. D. Žicu možemo zamišljati kao uspravni kružni valjak. Polumjer osnovke valjka iznosi $r = \frac{3}{2} = 1.5$ mm $= 1.5 \cdot 10^{-3}$ m. Obujam valjka jednak je $V = B \cdot h = r^2 \cdot \pi \cdot h$, gdje je h duljina žice. Ovaj izraz uvrstimo u formulu za gustoću:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{r^2 \cdot \pi \cdot h},$$

pa iz dobivene jednakosti izrazimo veličinu h:

$$\rho = \frac{m}{r^2 \cdot \pi \cdot h} \quad / \cdot \frac{h}{\rho}$$

$$h = \frac{m}{r^2 \cdot \pi \cdot \rho}.$$

U ovaj izraz uvrstimo $m = 4.85$ kg, $r = 1.5 \cdot 10^{-3}$ m i $\rho = 8900$. Dobit ćemo:

$$h = \frac{4.85}{(1.5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot \pi \cdot 8900} = .\frac{4.85}{1.5^2 \cdot 10^{-6} \cdot \pi \cdot 8.9 \cdot 10^3} = \frac{4.85}{2.25 \cdot 8.9 \cdot \pi \cdot 10^{-3}} =$$

$$= \frac{4.85 \cdot 10^3}{20.025 \cdot \pi} = \frac{4850}{20.025 \cdot \pi} \approx 77.09378 \approx 77.1 \text{ m}$$

15. B. Nazivnik prvoga razlomka rastavimo prema formuli za razliku kvadrata. Imamo redom:

$$\frac{2 \cdot a}{a^2 - 4} + \frac{1}{2-a} = \frac{2 \cdot a}{a^2 - 2^2} + \frac{1}{2-a} = \frac{2 \cdot a}{(a-2) \cdot (a+2)} + \frac{1}{2-a} = \frac{2 \cdot a}{(a-2) \cdot (a+2)} + \frac{1}{(-1) \cdot (a-2)} =$$

$$= \frac{2 \cdot a}{(a-2) \cdot (a+2)} - \frac{1}{a-2} = \frac{2 \cdot a - 1 \cdot (a+2)}{(a-2) \cdot (a+2)} = \frac{2 \cdot a - a - 2}{(a-2) \cdot (a+2)} = \frac{a-2}{(a-2) \cdot (a+2)} = \frac{1}{a+2}.$$

Brojnik ovoga izraza jednak je 1, a nazivnik $a + 2$.

16. B. Osoba B zaradila je dvostruko više od osobe A, tj. $2 \cdot x$ kn. osoba C zaradila je tri četvrtine zarade osobe B, tj. $\frac{3}{4} \cdot (2 \cdot x) = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot x = \frac{3}{2} \cdot x$. Zaključujemo da je osoba C zaradila $\frac{3}{2} \cdot x - x = x \cdot \left(\frac{3}{2} - 1\right) = x \cdot \left(\frac{3-2}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot x$ kn više od osobe A, odnosno za $\frac{\frac{1}{2} \cdot x}{x} \cdot 100 = \frac{1}{2} \cdot 100 = 50\%$ više od osobe A.

Nadalje, osoba C je zaradila $2 \cdot x - \frac{3}{2} \cdot x = x \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right) = x \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 - 3}{2}\right) = x \cdot \left(\frac{4-3}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot x$ manje od osobe B, odnosno $\frac{\frac{1}{2} \cdot x}{2 \cdot x} \cdot 100 = \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25\%$ manje od osobe B.

Tvrdnja **A** je točna jer smo zaključili da je osoba C zaradila 50% više od osobe A.

Tvrdnja **B** nije točna jer smo zaključili da je osoba C zaradila $\frac{1}{2} \cdot x$ kn više od osobe A, a ne $\frac{3}{2} \cdot x$ kn više kako stoji u tvrdnji.

Tvrdnja **C** je točna jer smo zaključili da je osoba C zaradila $\frac{1}{2}\cdot x$ kn manje od osobe B.

Tvrdnja **D** je točna jer smo zaključili da je osoba C zaradila 25% manje od osobe B.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 102. Najprije izrazimo duljinu cijeloga štapa u cm. Prisjetimo se da vrijede jednakosti 1 m = 100 cm i 1 cm = 10 mm. Stoga imamo:

$$2\text{ m i }40\text{ mm} = \left(2\cdot 100+\frac{40}{10}\right)\text{ cm} = (200+4)\text{ cm} = 204\text{ cm.}$$

Stoga je duljina polovice štapa iskazana u cm

$$d=\frac{204}{2}=102\text{ cm.}$$

18. $\frac{3}{32}=0.09375$**.** Imamo redom:

$$\frac{\left|\sqrt{a}+2\cdot b\right|}{\left(\frac{1}{a}\cdot b\right)^2}=\frac{\left|\sqrt{\frac{1}{4}}+2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right|}{\left[\frac{1}{\frac{1}{4}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2}=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right|}{\left[4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\right]^2}=\frac{\left|\frac{3-4}{6}\right|}{\left(-\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\left|-\frac{1}{6}\right|}{\frac{16}{9}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{16}{9}}=\frac{1\cdot 9}{6\cdot 16}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 16}=\frac{3}{32}.$$

19. 60. Luka je ostvario 20% više bodova od Ivana, pa je Lukin broj bodova jednak

$$L=45+\frac{20}{100}\cdot 45=45+\frac{1}{5}\cdot 45=45+9=54.$$

Lukin broj bodova iznosi 90% od ukupnoga broja bodova. Označimo li s b ukupan broj bodova, možemo napisati jednadžbu:

$$\frac{90}{100}\cdot b=54.$$

Dijeljenjem lijeve i desne strane jednadžbe s $\frac{90}{100}=0.9$ dobivamo b = 60. Dakle, na ispitu je bilo moguće ostvariti ukupno 60 bodova.

20. 648. Udio broja učenika koji se bave nekom slobodnom aktivnosti u ukupnom broju učenika te škole jednak je:

$$\frac{1}{3}+\frac{12.5}{100}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{125}{1000}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{8+3+6}{24}=\frac{17}{24}.$$

Stoga je udio broja učenika koji se ne bave nijednom slobodnom aktivnošću u ukupnom broju učenika te škole jednak

$$1-\frac{17}{24}=\frac{24-17}{24}=\frac{7}{24}.$$

Označimo li s u traženi ukupan broj učenika, onda iz jednadžbe

$$\frac{7}{24}\cdot u=189$$

dijeljenjem s $\frac{7}{24}$ dobivamo:

$$u=189\cdot\frac{24}{7}=648.$$

Dakle, škola ima ukupno 648 učenika.

21. 35°. Koristit ćemo činjenicu da je zbroj mjera kutova u bilo kojem četverokutu jednak 360°. Primijenimo je na četverokut $ABCD$:

$$\angle BAC + \angle ABD + \angle ACD + \angle BDC = 360°.$$

Pogledajmo koju od tih mjera možemo odmah izračunati. Mjeru kuta $\angle BAC$ tražimo i nju zasad još ne možemo izračunati. Prema uvjetu zadatka, mjera kuta $\angle ABD$ jednaka je mjeri kuta $\angle BCD$. Budući da mjera kuta $\angle BCD$ i mjera kuta $\angle ACD$ zbrojene daju mjeru kuta $\angle BCA$, a ova je jednaka 50°, zaključujemo da je:

$$\angle BCD = 50° - \angle ACD,$$

odnosno, zbog jednakosti $\angle ABD = \angle BCD$,

$$\angle ABD = 50° - \angle ACD.$$

Nadalje, budući da je mjera kuta $\angle BDC$ trokuta BCD jednaka 85°, mjera kuta $\angle BDC$ u četverokutu $ABCD$ dobije se kao razlika 360° i 85°:

$$\angle BDC = 360° - 85°.$$

Uvrstimo dvije dobivene jednakosti u jednakost $\angle BAC + \angle ABD + \angle ACD + \angle BDC = 360°$. Dobivamo:

$$\angle BAC + (50° - \angle ACD) + \angle ACD + (360° - 85°) = 360°.$$

Pojednostavnimo dobiveni izraz:

$$\begin{gathered}\angle BAC + 50° - \angle ACD + \angle ACD + 360° - 85° = 360°,\\ \angle BAC + 50° + 360° - 85° = 360°,\\ \angle BAC = 360° - (50° + 360° - 85°),\\ \angle BAC = 360° - 50° - 360° + 85°,\\ \angle BAC = 85° - 50°,\\ \angle BAC = 35°.\end{gathered}$$

22. 1.) 655.61. Imamo:

$$P = 14.446^2 \cdot \pi = 208.686916 \cdot \pi \approx 655.60928220591..$$

Zaokruživanjem ovoga broja na dvije decimale dobijemo 655.61 (treća decimala je 9, pa prigodom zaokruživanja drugu decimalu moramo uvećati za 1).

2.) $\sqrt{\frac{P}{\pi}}$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned} &P = r^2 \cdot \pi \quad /:\pi \\ &r^2 = \frac{P}{\pi} \quad /\sqrt{} \\ &r = \sqrt{\frac{P}{\pi}}. \end{aligned}$$

(*Napomena*: Rješenje $r = -\sqrt{\frac{P}{\pi}}$ ne dolazi u obzir jer duljina polumjera kruga r ne može biti strogo negativan realan broj.)

23. 1.) $x^2 + \frac{624}{25} \cdot x \cdot y - y^2$**.** Imamo redom:

$$\left(5 \cdot x - \frac{y}{5}\right) \cdot \left(5 \cdot y + \frac{x}{5}\right) = 5 \cdot x \cdot 5 \cdot y - \frac{y}{5} \cdot 5 \cdot y + 5 \cdot x \cdot \frac{x}{5} - \frac{y}{5} \cdot \frac{x}{5} = 25 \cdot x \cdot y - y^2 + x^2 - \frac{x \cdot y}{25} =$$

$$= x^2 + \left(25 - \frac{1}{25}\right) \cdot x \cdot y - y^2 = x^2 + \left(\frac{25 \cdot 25 - 1}{25}\right) \cdot x \cdot y - y^2 = x^2 + \left(\frac{625 - 1}{25}\right) \cdot x \cdot y - y^2 =$$

$$= x^2 + \frac{624}{25} \cdot x \cdot y - y^2.$$

2.) $\frac{c-3}{c+3}$**.** Koristimo formule za kvadrat binoma i razliku kvadrata. Imamo redom:

$$\frac{c^2 - 6 \cdot c + 9}{c^2 - 9} = \frac{c^2 - 2 \cdot 3 \cdot c + 3^2}{c^2 - 3^2} = \frac{(c-3)^2}{(c-3) \cdot (c+3)} = \frac{c-3}{c+3}.$$

24. $-\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$. Oduzimanjem druge jednadžbe od prve jednadžbe zadanoga sustava dobijemo:

$$\begin{aligned} &\frac{5}{2} \cdot x + 2 - \left(-\frac{3}{2} \cdot x - 1\right) = 0, \\ &\frac{5}{2} \cdot x + 2 + \frac{3}{2} \cdot x + 1 = 0, \\ &\frac{8}{2} \cdot x = -2 - 1, \\ &4 \cdot x = -3. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 4 slijedi $x=-\frac{3}{4}$. Uvrstimo dobiveni rezultat npr. u prvu jednadžbu zadanoga sustava. Dobivamo:

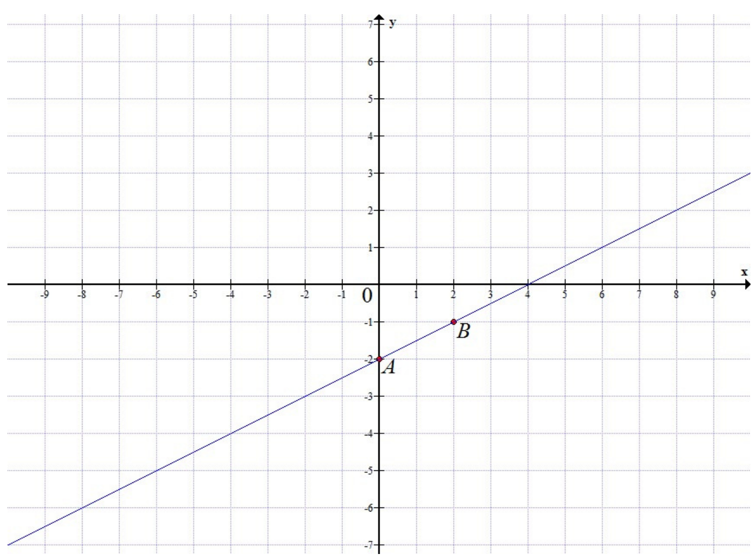
$$y=\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)+2=-\frac{15}{8}+2=\frac{-15+2\cdot 8}{8}=\frac{-15+16}{8}=\frac{1}{8}.$$

Dakle, rješenje zadanoga sustava je $(x, y)=\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right)$.

25. **1.) Vidjeti Sliku 20.** Primijetimo da je zadana funkcija linearna funkcija. Njezin graf je pravac. Da bismo nacrtali bilo koji pravac, moramo zadati neke dvije njegove različite točke. Stoga uzmimo npr. $x = 0$ i $x = 2$, pa izračunajmo $f(0)$ i $f(2)$:

$$f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0-2=0-2=-2,$$
$$f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2-2=1-2=-1.$$

Stoga u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtajmo točke $A = (0, -2)$ i $B = (2, -1)$, pa ih spojimo jednim pravcem. Dobivamo graf prikazan na Slici 20.



Slika 20.

2.) –98. Već smo izračunali $f(0) = -2$. Analogno računamo $f(100)$:

$$f(100)=\frac{1}{2}\cdot 100-2=50-2=48.$$

Stoga je

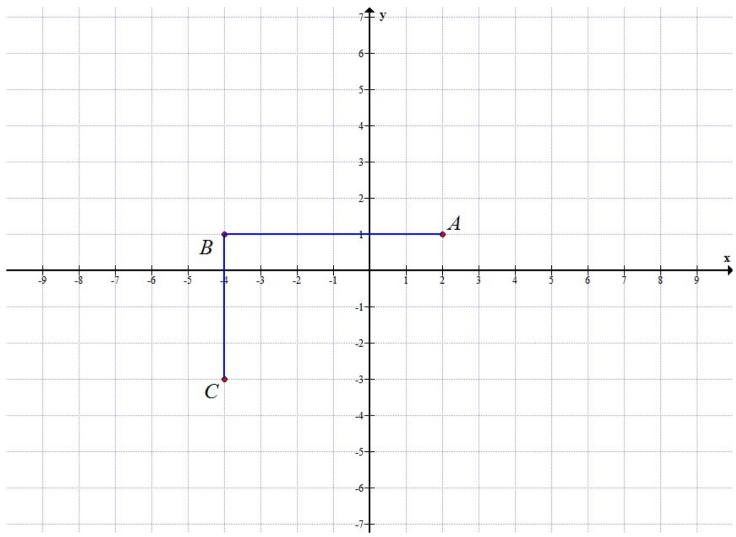
$$f(0)-2\cdot f(100)=-2-2\cdot 48=-2-96=-98.$$

26. 1.) (2, –3). Zadatak se može riješiti na nekoliko različitih načina, pa ćemo ovdje navesti najjednostavniji i najbrži način (sugeriran i popratnom slikom u zadatku). Ucrtajmo sve zadane točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa spojimo točke A i B, odnosno A i C jednim pravcem. Dobivamo Sliku 21.

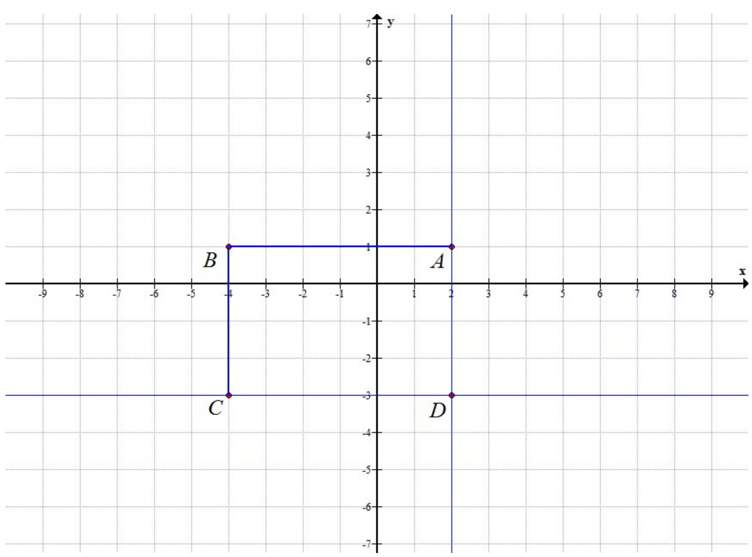
Povucimo točkom C pravac usporedan s pravcem kroz točke A i B, a točkom A pravac usporedan s pravcem kroz točke B i C. Te je pravce lako povući jer je prvi usporedan s osi apscisa (osi x), a drugi usporedan s osi ordinata (osi y). Povučeni pravci će se sjeći u traženom četvrtom vrhu pravokutnika. Dobivamo Sliku 22.

Sa Slike 22. lagano očitamo: $D = (2, -3)$ i to je traženi četvrti vrh pravokutnika.

2.) $y = 1$ ili $y - 1 = 0$. Iz Slike 21. ili Slike 22. vidimo da je pravac kroz točke A i B usporedan s osi apscisa (osi x). Stoga on ima jednadžbu oblika $y = a$. Realan broj a „očitamo“ kao drugu koordinatu točke A ili točke B. Očito je $a = 1$, pa je traženi pravac $p\ldots\ y = 1$ ili $p\ldots\ y - 1 = 0$.



Slika 21.



Slika 22.

27.

1.) $x \geq -\frac{1}{9}$ **ili** $x \in \left[-\frac{1}{9}, +\infty\right\rangle$**.** Pomnožimo zadanu nejednadžbu sa 20 jer je 20 najmanji zajednički višekratnik brojeva 5 i 4. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&0.25 \cdot 20 - 4 \cdot (x+2) \leq 5 \cdot (x-1) + 0.15 \cdot 20, \\
&5 - 4 \cdot x - 8 \leq 5 \cdot x - 5 + 3, \\
&-4 \cdot x - 5 \cdot x \leq -5 + 3 - 5 + 8, \\
&-9 \cdot x \leq 1.
\end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (–9) uz promjenu znaka nejednakosti iz $\leq$ u $\geq$ dobivamo $x \geq -\frac{1}{9}$. Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe jednak je skupu svih realnih brojeva koji nisu strogo manji od $-\frac{1}{9}$. Ti brojevi tvore poluzatvoreni interval $x \in \left[-\frac{1}{9}, +\infty\right\rangle$**.**

2.) **90.** Pomnožimo zadanu jednadžbu s 2. Dobijemo:

$$10^{x-89} = 10.$$

Budući da je $10 = 10^1$, zapišimo lijevu i desnu stranu jednadžbe kao potencije s bazom 10:

$$10^{x-89} = 10^1.$$

Izjednačavanjem eksponenata slijedi:

$$\begin{aligned}
x - 89 &= 1, \\
x &= 89 + 1, \\
x &= 90.
\end{aligned}$$

3.) **3.** U Zadatku 26.2. ustvrdili smo da pravac usporedan s osi ordinata ima jednadžbu oblika $y = a$. Stoga pravac kroz ishodište i točku A može biti jedino p… $y = 2 \cdot x$. Druga koordinata točke A jednaka je 3 jer od osi apscisa (osi x) do točke A moramo doći krećući se 3 jedinice duljine prema gore (i određeni broj jedinica duljine udesno, ali taj broj ne možemo precizno očitati sa slike). Stoga pravac koji prolazi točkom A usporedno s osi apscisa (osi x) ima jednadžbu $y = 3$. Taj pravac je grafički prikaz druge jednadžbe zadanoga sustava. Stoga mora biti $p = 3$.

28. **1.) 855; 70**. Za 4 sata svojega rada vodoinstalater je naplatio točno $4 \cdot 105 = 420$ kn. Stoga je za svoj dolazak i rad vodoinstalater naplatio ukupno 50 + 520 = 470 kn. Ostatak naplaćenoga iznosa otpada na cijenu utrošenoga materijala. Ta je cijena jednaka:

$$1325.7 - 470 = 855.7 \text{ kn.}$$

Dakle, cijena utrošenoga materijala je 855.7 kn = 855 kn i 70 lp.

2.) 4. Površina poda kupaonice jednaka je $P_{pod} = 260 \cdot 200 = 52000$ cm^2, a površina jedne pločice $P_{pločica} = 25 \cdot 50 = 1250$ cm^2. Stoga je za popločavanje poda kupaonice potrebno teorijski ukupno $n = \frac{P_{pod}}{P_{pločica}} = \frac{52000}{1250} = 41.6$ pločica. Zbog loma pločica, ovaj broj treba uvećati za 10%:

$$n_1 = 41.6 + \frac{10}{100} \cdot 41.6 = 41.6 + \frac{1}{10} \cdot 41.6 = 41.6 + 4.16 = 45.76\,.$$

Budući da ukupan broj pločica nužno mora biti prirodan broj, broj n_1 zaokružujemo naviše (jer zaokruživanje naniže daje nedostatan broj pločica), pa dobivamo $n_2 = 46$. U jednoj kutiji ima točno 14 pločica, pa za popločavanje teorijski treba ukupno $k = \frac{46}{14} = 3.28571$ kutija. Budući da i broj kupljenih kutija mora biti prirodan broj, dobivenu vrijednost k zaokružujemo naviše, pa slijedi da vlasnik mora kupiti ukupno 4 kutije pločica.

<u>*Napomena*</u>: Ako su P_{pod} površina poda, $P_{\text{pločica}}$ površina jedne pločice, p postotak koji otpada na lom pločica i k broj pločica u jednoj kutiji, onda se rješenje zadatka može izravno izračunati koristeći izraz

$$n = \left\lfloor \frac{100 + p}{100 \cdot k} \cdot \left\lfloor \frac{P_{\text{pod}}}{P_{\text{pločica}}} \right\rfloor \right\rfloor,$$

pri čemu je s $\lfloor\ \rfloor$ označena funkcija *pod* (engleski: *ceil*) koja svakom realnom broju x pridružuje najmanji cijeli broj jednak ili veći od x. (Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3.14 \rfloor = 4$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -3$ itd.) Uvrstimo li u ovaj izraz $P_{\text{pod}} = 52000$, $P_{\text{pločica}} = 1250$, $p = 10$ i $k = 14$, dobit ćemo:

$$n = \left\lfloor \frac{100+10}{100 \cdot 14} \cdot \left\lfloor \frac{52000}{1250} \right\rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{110}{1400} \cdot \lfloor 41.6 \rfloor \right\rfloor = \left\lfloor \frac{11}{140} \cdot 42 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{462}{140} \right\rfloor = \lfloor 3.3 \rfloor = 4.$$