TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **A.** Prema definiciji, interval $\langle a, b]$ je skup svih realnih brojeva koji su strogo veći od a, a jednaki ili manji od b. Stoga je interval $\langle -3, 11]$ skup svih realnih brojeva koji su strogo veći od –3, a jednaki ili manji od 11. Tu činjenicu možemo zapisati u obliku sljedeće nejednakosti:

$$-3 < x \leq 11.$$

2. **C.** Od ukupno 112 maturanata njih $\frac{3}{4} \cdot 112 = \frac{336}{4} = 84$ prolazi odličnim uspjehom. Od tih 84–ero maturanata $\frac{1}{4} \cdot 84 = 21$ ima ocjenu *odličan*(5) iz matematike. Stoga ukupno 84 – 21 = 63 maturanta prolazi odličnim uspjehom, ali nema ocjenu *odličan*(5) iz matematike.

3. **B.** Ako je $z = 1 + 4 \cdot i$, onda je $\overline{z} = 1 - 4 \cdot i$, pa imamo redom:

$$\frac{z}{z+\overline{z}} = \frac{1+4\cdot i}{1+4\cdot i+(1-4\cdot i)} = \frac{1+4\cdot i}{1+4\cdot i+1-4\cdot i} = \frac{1+4\cdot i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2}\cdot i = \frac{1}{2} + 2\cdot i\,.$$

Realni dio dobivenoga kompleksnog broja jednak je $\frac{1}{2}$. (***Napomena*:** Može se pokazati da za bilo koji kompleksan broj z vrijedi jednakost: $\mathrm{Re}\left(\frac{z}{z+\overline{z}}\right) = \frac{1}{2}$.)

4. **D**. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su a_1, b_1 i c_1 stranice sličnoga trokuta označene tako da vrijedi nejednakost $a_1 > b_1 > c_1$. Iz podatka da su zadani trokuti slični slijedi da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je $a_1 = 12.5 \cdot k$, $b_1 = 10 \cdot k$ i $c_1 = 8.5 \cdot k$. Iz podatka da razlika najdulje i najkraće stranice sličnoga trokuta iznosi 4.8 cm slijedi:

$$a_1 - c_1 = 4.8$$
$$12.5 \cdot k - 8.5 \cdot k = 4.8$$
$$4 \cdot k = 4.8.$$

Mi tražimo duljinu srednje stranice, tj. duljinu stranice b_1. Ona iznosi $10 \cdot k$. Da dobijemo vrijednost $10 \cdot k$, pomnožimo posljednju jednadžbu s $\frac{10}{4}$, pa dobijemo:

$$10 \cdot k = 12,$$

odnosno $b_1 = 12$ cm.

5. **D**. U rješavanju zadatka primijenit ćemo složeno trojno pravilo. Zadane veličine poredamo u tri stupca: *masa vune*, *duljina tkanine* i *širina tkanine*. Masa vune i duljina tkanine, odnosno masa vune i širina tkanine su upravno razmjerne veličine, dok su duljina tkanine i širina tkanine obrnuto

razmjerne veličine (ako od iste mase tkanine želimo satkati što dulju tkaninu, njezina širina će biti sve manja i manja). Dakle, imamo:

masa vune [kg]	duljina tkanine [m]	širina tkanine [cm]
24	40	120
x	36	160

Sve tri strjelice su postavljene u istom smjeru sukladno napomeni da su masa vune i duljina tkanine, odnosno masa vune i širina tkanine upravno razmjerne veličine. Iz navedene sheme proizlaze sljedeća dva razmjera:

$$x : 24 = 36 : 40$$
$$= 160 : 120,$$

koja prelaze u jednostavni razmjer

$$x : 24 = (36 \cdot 160) : (40 \cdot 120),$$

odnosno

$$x : 24 = 5\,760 : 4\,800$$

Odavde je

$$4\,800 \cdot x = 24 \cdot 5\,760,$$

odnosno

$$4\,800 \cdot x = 138\,240.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 4 800 dobijemo $x = 28.8$. Dakle, tražena masa tkanine je 28.8 kg.

6. **C.** Za $d \notin \{\pm 2, 0\}$ u nazivniku djeljenika izlučimo zajednički faktor $2 \cdot d$, pa imamo:

$$\frac{1}{2 \cdot d \cdot (d^2 - 4)} \cdot \frac{d^2 - 4}{d + 2} = \frac{1}{2 \cdot d \cdot (d + 2)}.$$

7. **D.** Mjera nepoznatoga kuta trokuta je 180° – (36° + 75°) = 180° – 111° = 69°, pa vidimo da najmanji kut trokuta ima mjeru 36°, a a najveći 75°. Nasuprot najmanjega kuta čija je mjera 36° nalazi se najkraća stranica trokuta, tj. stranica duljine 10 cm, a nasuprot najvećega kuta čija je mjera 75° nalazi se najveća stranica trokuta čiju duljinu x tražimo. Primijenimo sinusov poučak, pa dobijemo:

$$\frac{10}{\sin 36°} = \frac{x}{\sin 75°},$$

otkuda množenjem sa sin 75° slijedi

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

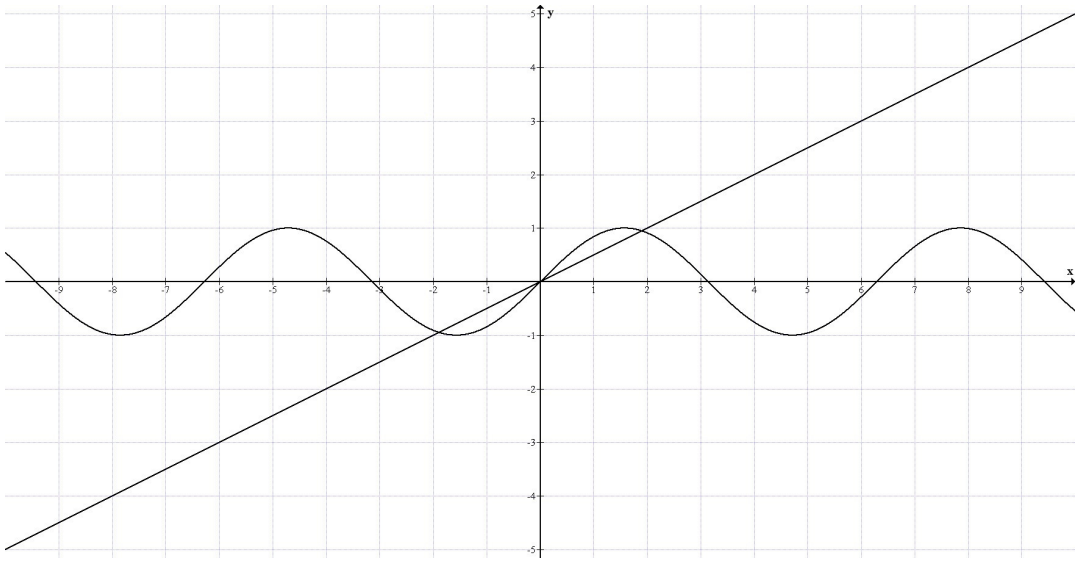
$$x = \frac{\sin 75°}{\sin 36°} \cdot 10 \approx 16.43331 \approx 16.4 \text{ cm}.$$

8. **B.** Funkcija f je strogo padajuća (jer je baza potencije realan broj iz intervala $\langle 0, 1\rangle$), a njezin graf prolazi točkom $A(0, 1)$ (jer je $f(0) = 1$) i ima os x za horizontalnu asimptotu (tj. povećavanjem vrijednosti nezavisne varijable x vrijednosti funkcije f se sve više i više približavaju nuli). Jedini od četiriju grafova koji ima sva tri navedena svojstva je drugi graf.

9. **A.** Iz jednadžbe zadane kružnice očitamo koordinate njezina središta: $S(-2, 5)$. Ta je točka ujedno i središte tražene kružnice. Polumjer tražene kružnice jednak je udaljenosti točaka S i T, a ona je jednaka:

$$r = d(S,T) = \sqrt{[-3-(-2)]^2 + (2-5)^2} = \sqrt{(-3+2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}.$$

10. **B**. U pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini nacrtamo grafove funkcija $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x$. Graf funkcije f je sinusoida s temeljnim periodom $T = 2 \cdot \pi$, dok je graf funkcije g pravac koji prolazi ishodištem i npr. točkom $A(2, 1)$. Dobivamo grafove kao na Slici 1.



Slika 1.

Iz Slike 1. vidimo da se grafovi funkcija f i g sijeku u točno tri točke, pa polazna jednadžba ima točno tri različita rješenja. (Najmanje od njih pripada segmentu $[-2, -1]$, srednje je $x = 0$, a najveće pripada segmentu $[1, 2]$.)

11. **D**. Funkciju $f \circ g$ dobijemo tako da u izrazu za $f(x)$ umjesto x pišemo izraz za $g(x)$, tj. $2 \cdot x - 5$. $f(4)$ dobijemo tako da u izrazu za $f(x)$ umjesto x uvrstimo 4. Dobivamo redom:

$(f \circ g)(x) + f(4) = (2 \cdot x - 5) \cdot [(2 \cdot x - 5) - 2] + 4 \cdot (4 - 2) = (2 \cdot x - 5) \cdot (2 \cdot x - 5 - 2) + 4 \cdot 2 = (2 \cdot \cdot x - 5) \cdot (2 \cdot x - 7) + 8 = 4 \cdot x^2 - 10 \cdot x - 14 \cdot x + 35 + 8 = 4 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 43.$

12. C. Prva jednadžba je kvadratna jednadžba čija je diskriminanta jednaka $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - -8 = -7 < 0$, pa ta jednadžba nema realnih rješenja, pa posebno nema niti jedno rješenje u skupu cijelih brojeva.
Druga jednadžba nema rješenje u skupu cijelih brojeva jer je za bilo koji $x \in \mathbf{Z}$ vrijednost izraza $2 \cdot x - 3$ neparan cijeli broj (umanjenik je uvijek paran cijeli broj, umanjitelj je neparan cijeli broj, pa je razlika parnoga i neparnoga cijeloga broja neparan cijeli broj), što znači da je vrijednost izraza $|2 \cdot x - 3|$ neparan prirodan broj za bilo koji $x \in \mathbf{Z}$, a odatle slijedi da niti za jedan $x \in \mathbf{Z}$ vrijednost izraza $|2 \cdot x - 3|$ ne može biti jednaka 2.
Treću jednadžbu najprije zapišimo u obliku

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2 \cdot x + 5} = \left(\frac{1}{2}\right)^3,$$

pa izjednačavanjem eksponenata dobivamo linearnu jednadžbu

$$2 \cdot x + 5 = 3,$$

odnosno

$$2 \cdot x = 3 - 5,$$

odnosno

$$2 \cdot x = -2.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 2 dobijemo $x = -1$, pa zaključujemo da treća jednadžba ima rješenje u skupu cijelih brojeva (i to rješenje je $x = -1$).
Naposljetku, primjenom ekvivalencije $(\log_a x = b) \Leftrightarrow (x = a^b)$ četvrtu jednadžbu možemo zapisati u ekvivalentnom obliku

$$x = 7^{-1},$$

odnosno

$$x = \frac{1}{7},$$

a taj broj nije cijeli broj.

13. A. Ako iz zadane kocke treba izrezati valjak najvećega mogućega obujma, onda je to valjak kojemu je osnovka krug upisan jednoj strani kocke, a duljina visine jednaka duljini brida kocke. Promjer kruga upisanoga jednoj strani kocke jednak je duljini brida kocke, pa je polumjer toga kruga dvostruko manji od duljine brida kocke. Dakle, duljina polumjera osnovke valjka jednaka je

polovici duljine brida kocke, dok je duljina visine valjka jednaka duljini brida kocke. Označimo li duljinu brida kocke s a, slijedi da je obujam valjka jednak:

$$V_{valjka} = B \cdot h = r_{valjka}^2 \cdot \pi \cdot h = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot a = \frac{a^2}{4} \cdot \pi \cdot a = \frac{a^3}{4} \cdot \pi .$$

Iz formule za duljinu prostorne dijagonale kocke $D = a \cdot \sqrt{3}$ slijedi da je duljina brida kocke

$$a = \frac{D}{\sqrt{3}},$$

pa je obujam izrezanoga valjka, iskazan kao funkcija varijable D,

$$V_{valjka} = \frac{a^3}{4} \cdot \pi = \frac{\left(\frac{D}{\sqrt{3}}\right)^3}{4} \cdot \pi = \frac{\frac{D^3}{(\sqrt{3})^3}}{4} \cdot \pi = \frac{\frac{D^3}{(\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}}{4} \cdot \pi = \frac{\frac{D^3}{3 \cdot \sqrt{3}}}{4} \cdot \pi = \frac{D^3}{4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} \cdot \pi = \frac{D^3 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot 3 \cdot 3} \cdot \pi = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \pi \cdot D^3$$

U ovu jednakost uvrstimo $D = 24$, pa konačno dobijemo:

$$V_{valjka} = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \pi \cdot 24^3 = \frac{\sqrt{3}}{36} \cdot \pi \cdot 13\,824 = \frac{13\,824}{36} \cdot \sqrt{3} \cdot \pi = 384 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi \text{ cm}^3 .$$

14. C. Tek kupljena zemlja sadrži 12% vode i 100% – 12% = 88% suhe tvari. Masa suhe tvari u 2 kg zemlje iznosi $m = \frac{88}{100} \cdot 2 = \frac{176}{100} = 1.76$ kg. Tih 1.76 kg treba činiti ukupno 100% – 18% = 82% mase kupljene zemlje zajedno s ulivenom vodom. Označimo li s m_1 masu kupljene zemlje zajedno s ulivenom vodom, zaključujemo da vrijedi jednakost:

$$\frac{82}{100} \cdot m_1 = 1.76 .$$

Odavde je

$$m_1 = 1.76 : \frac{82}{100} = 1.76 \cdot \frac{100}{82} = \frac{176}{82} = \frac{88}{41} \text{ kg},$$

pa je masa vode koju treba doliti

$$\Delta m = \frac{88}{41} - 2 = \frac{88-82}{41} = \frac{6}{41} \approx 0.14634 \text{ kg} = 0.14634 \cdot 1\,000 \text{ g} = 146.34 \text{ g}.$$

Dakle, treba doliti približno 146 g vode, odnosno 1.46 dl vode (jer iz činjenice da 1 kg = 1 000 g vode ima obujam 1 litra = 10 dl slijedi da 1 g vode ima obujam 0.01 dl, pa 146 g vode ima obujam 146 · 0.01 dl = 1.46 dl.)

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

15. B. ***Napomena*****: Na temelju zadanih podataka zadatak nema jednoznačno rješenje. Da bi se dobilo službeno rješenje, drugu rečenicu zadatka treba preformulirati u „*Dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ su osnovice jednakokračnih trokutova ACD i CBG.*“ Stoga će zadatak biti riješen uz tu preformulaciju.**

Iz podatka da je *C* polovište dužine $\overline{AB}$ proizlazi

$$\left|\overline{AC}\right| = \left|\overline{BC}\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{2}\cdot 80 = 40\,\text{cm}.$$

Neka su *E* nožište visine povučene iz vrha *D* na stranicu $\overline{AC}$ i *F* nožište visine povučene iz vrha *G* na stranicu $\overline{BC}$. Prema podatcima iz zadatka, vrijede jednakosti $\left|\overline{DE}\right| = 30\,\text{cm}$ i $\left|\overline{FG}\right| = 21\,\text{cm}$. Iz podatka da su dužine $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ osnovice jednakokračnih trokutova *ACD* i *CBG*, slijedi da je točka *E* polovište dužine $\overline{AC}$, te da je točka *F* polovište dužine $\overline{BC}$. To znači da vrijede jednakosti:

$$\left|\overline{CE}\right| = \left|\overline{CF}\right| = \frac{1}{4}\cdot\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{4}\cdot 80 = 20\text{ cm}.$$

Iz pravokutnoga trokuta *CDE* primjenom Pitagorina poučka slijedi:

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{\left|\overline{DE}\right|^2 + \left|\overline{CE}\right|^2} = \sqrt{30^2 + 20^2} = \sqrt{900+400} = \sqrt{1\,300} = \sqrt{100\cdot 13} = \sqrt{100}\cdot\sqrt{13} = 10\cdot\sqrt{13}\text{ cm}.$$

Analogno, iz pravokutnoga trokuta *CFG* primjenom Pitagorina poučka dobivamo:

$$\left|\overline{CG}\right| = \sqrt{\left|\overline{CF}\right|^2 + \left|\overline{FG}\right|^2} = \sqrt{20^2 + 21^2} = \sqrt{400+441} = \sqrt{841} = 29\,\text{cm}.$$

Povucimo sada točkom *G* usporednicu (paralelu) s pravcem *AB* i neka ta usporednica siječe dužinu $\overline{DE}$ u točki *H*. Prema konstrukciji, vrijedi $\left|\overline{HE}\right| = \left|\overline{FG}\right| = 21\,\text{cm}$, te je četverokut *EFGH* pravokutnik (ima dvije usporedne stranice $\overline{GH}$ i $\overline{EF}$, te dva prava kuta kod vrhova *E* i *F*). Nadalje, trokut *DHG* je pravokutan s pravim kutom u vrhu *H* (to slijedi iz činjenice da je dužina $\overline{DE}$ okomita na dužinu $\overline{AB}$, pa time i na svaki pravac usporedan s pravcem *AB*). Duljine kateta trokuta *DHG* su:

$$\left|\overline{DH}\right| = \left|\overline{DE}\right| - \left|\overline{HE}\right| = 30 - 21 = 9\,\text{cm},$$
$$\left|\overline{GH}\right| = \left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{CE}\right| + \left|\overline{CF}\right| = 20 + 20 = 40\,\text{cm},$$

pa primjenom Pitagorina poučka dobijemo

$$\left|\overline{DG}\right| = \sqrt{\left|\overline{DH}\right|^2 + \left|\overline{GG}\right|^2} = \sqrt{9^2 + 40^2} = \sqrt{81 + 1\,600} = \sqrt{1\,681} = 41\,\text{cm}.$$

Stoga je traženi opseg trokuta *GDC* jednak

$$O = \left|\overline{CD}\right| + \left|\overline{DG}\right| + \left|\overline{CG}\right| = 10 \cdot \sqrt{13} + 41 + 29 = 70 + 10 \cdot \sqrt{13} \text{ cm.}$$

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $\frac{8}{9}$ **.** Koristeći jednakosti $4 = 2^2$ i $27 = 3^3$ imamo redom:

$$\left(2^2\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left[\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-2} = 2^{2\cdot\frac{3}{2}} \cdot 3^{3\cdot\frac{1}{3}\cdot(-2)} = 2^3 \cdot 3^{-2} = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$$

17. 115. Prvi član aritmetičkoga niza je $a_1 = 11$, a razlika niza je $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = 4$. Stoga je 27. član niza jednak $a_{27} = 11 + (27 - 1) \cdot 4 = 11 + 26 \cdot 4 = 11 + 104 = 115$.

18. 1.) 126. Za potrebe domaćinstva ostavljeno je 12.5% uroda, pa je preostalo ukupno 100% – 12.5% = 87.5% uroda, odnosno ukupno $\frac{87.5}{100} \cdot 960 = \frac{84\ 000}{100} = 840\,\text{kg}$ jabuka. Od tih 840 kg jabuka 15% darovano je domu za nezbrinutu djecu, pa je tražena masa $\frac{15}{100} \cdot 840 = \frac{12\ 600}{100} = 126\,\text{kg}$.

2.) 3 570. Od 840 kg jabuka, 126 kg darovano je domu za nezbrinutu djecu, pa je za prodaju preostalo ukupno 840 – 126 = 714 kg jabuka. Budući da je cijena 1 kg jabuka 5 kn, slijedi da je za prodane jabuke dobiveno ukupno 714 · 5 = 3 570 kn.

19. 1.) –21. Pomnožimo zadanu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s *NZV*(3,2) = 6. Dobijemo:

$$\begin{aligned} 2 \cdot x &= 5 \cdot 6 + 3 \cdot (x - 3), \\ 2 \cdot x &= 30 + 3 \cdot x - 9, \\ 2 \cdot x - 3 \cdot x &= 30 - 9, \\ (-1) \cdot x &= 21. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = (-21)$.

2.) *–a* + 2 ili 2 – *a*. Pomnožimo drugu jednadžbu s (–2) i pribrojimo je prvoj jednadžbi sustava. Dobit ćemo:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - 4 \cdot x + 2 &= a + 0, \\ (-1) \cdot x &= a - 2. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = -a + 2$ ili $x = 2 - a$.

20. 1.) [–2, +∞⟩. Da bi funkcija drugoga korijena bila definirana, izraz pod drugim korijenom mora biti nenegativan. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$x + 2 \geq 0,$$

odnosno

$$x \geq -2.$$

Stoga domenu zadane funkcije tvore svi realni brojevi jednaki ili veći od –2. Njih možemo zapisati u obliku intervala $[-2, +\infty\rangle$.

2.) $[-2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ ili $[-2, +\infty\rangle \setminus \{0, 1\}$. U podzadatku **1.** vidjeli smo da je domena funkcije $\sqrt{x+2}$ jednaka intervalu $[-2, +\infty\rangle$. Iz toga skupa još treba ukloniti one vrijednosti x (ako postoje) za koje je izraz $x^2 - x$ jednak nuli jer prava racionalna funkcija $\frac{5}{x^2 - x}$ nije definirana za one vrijednosti varijable x za koje je izraz u nazivniku jednak nuli. Izjednačavanjem izraza $x^2 - x$ s nulom dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$x^2 - x = 0,$$

odnosno

$$x \cdot (x - 1) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Stoga mora biti ili $x = 0$ ili $x - 1 = 0$, pa dobivamo dva rješenja: $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$. Oba ta rješenja pripadaju skupu $[-2, +\infty\rangle$, pa domenu funkcije g dobijemo tako da iz skupa $[-2, +\infty\rangle$ uklonimo brojeve 0 i 1. Dobiveni skup možemo zapisati kao $[-2, +\infty\rangle \setminus \{0, 1\}$, odnosno kao uniju triju intervala $[-2, 0\rangle \cup \langle 0, 1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$.

21. 1.) $\langle 2, 3\rangle$. Riješimo najprije kvadratnu jednadžbu $x^2 - 5 \cdot x + 6 = 0$. Nju najbrže možemo riješiti koristeći Viète ove formule: pitamo se koja dva realna broja zbrojena daju 5, a pomnožena 6. Ti su brojevi očito 2 i 3, pa su rješenja navedene kvadratne jednadžbe $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$. Preostaje nam prisjetiti se da kvadratna funkcija čiji je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) strogo pozitivan poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu kojega određuju realne nultočke te funkcije. Stoga je rješenje polazne nejednadžbe interval $\langle 2, 3\rangle$.

2.) $\left[\frac{3}{5}, +\infty\right\rangle$. Eksponencijalna funkcija $f(x) = 0.1^{5 \cdot x - 3}$ ima bazu (0.1) strogo manju od 1. To znači da je ta funkcija strogo padajuća. Zbog toga pri usporedbi eksponenata na lijevoj i na desnoj strani nejednadžbe moramo promijeniti znak nejednakosti. Koristeći identitet $1 = 0.1^0$ imamo redom:

$$0.1^{5 \cdot x - 3} \leq 0.1^0,$$
$$5 \cdot x - 3 \geq 0,$$
$$5 \cdot x \geq 3.$$

Odatle dijeljenjem nejednadžbe s 5, pri čemu se znak nejednakosti neće promijeniti, dobivamo:

$$x \geq \frac{3}{5},$$

odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \left[\frac{3}{5}, +\infty\right\rangle$.

22. 1.) $\frac{4 \cdot R \cdot P}{a \cdot c}$. Pomnožimo zadanu jednakost s $4 \cdot R$, pa dobijemo:

$$4 \cdot R \cdot P = a \cdot b \cdot c.$$

Odatle dijeljenjem s $a \cdot c$ slijedi:

$$b = \frac{4 \cdot R \cdot P}{a \cdot c}.$$

2.). $x_1 = -3$, $x_2 = 3$. Primijetimo najprije da za bilo koji $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $|x| \geq 0$. U našem slučaju ne može biti $|x| = 0$ jer tada razlomak na desnoj strani jednadžbe ne bi bio definiran. Stoga smijemo pomnožiti jednadžbu sa strogo pozitivnim brojem $|x|$, pa dobijemo:

$$|x|^2 - 2 \cdot |x| = 3,$$

odnosno

$$|x|^2 - 2 \cdot |x| - 3 = 0.$$

Uvedimo zamjenu $t := |x|$, pa dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$t^2 - 2 \cdot t - 3 = 0.$$

Nju možemo riješiti i napamet koristeći Viète ove formule: pitamo se koja dva realna broja zbrojena daju 2, a pomnožena –3. Ti realni brojevi su –1 i 3, tj. rješenja dobivene kvadratne jednadžbe su $t_1 = -1$ i $t_2 = 3$. Tako smo dobili dvije nove jednadžbe:

$$|x| = -1 \text{ i } |x| = 3.$$

Zbog već istaknute nejednakosti $|x| \geq 0$, za svaki $x \in \mathbf{R}$, ne može biti $|x| = -1$. Stoga je jedini mogući slučaj $|x| = 3$. Postoje točno dva realna broja čija je apsolutna vrijednost jednaka 3: to su $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$, i to su sva realna rješenja polazne jednadžbe.

***<u>Napomena</u>*: Sva gornja argumentacija vrijedi i uz slabiju pretpostavku $x \in \mathbf{C}$, tj. ako je x kompleksan broj. Tada iz $|x| = 3$ slijedi da su rješenja jednadžbe svi kompleksni brojevi x koji u kompleksnoj ravnini tvore kružnicu sa središtem u ishodištu kompleksne ravnine i polumjerom $r = 3$. Opći oblik takvih brojeva je $x = 3 \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, gdje je $\varphi \in [0, 2 \cdot \pi\rangle$.**

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

23. 1.) $y = -\frac{7}{4} \cdot x + \frac{17}{2}$ **.** Odmah imamo:

$$p \ldots y - 5 = \frac{-2-5}{6-2} \cdot (x-2)$$
$$p \ldots y = -\frac{7}{4} \cdot (x-2) + 5$$
$$p \ldots y = -\frac{7}{4} \cdot x + \frac{7}{2} + 5 \quad .$$
$$p \ldots y = -\frac{7}{4} \cdot x + \frac{7+10}{2}$$
$$p \ldots y = -\frac{7}{4} \cdot x + \frac{17}{2}$$

2.) 37°52'30'' ≈ 0.661043 radijana. Jednadžbu drugoga pravca prevedemo iz implicitnoga u eksplicitni oblik:

$$p_2 \ldots (-3) \cdot y = (-2) \cdot x - 4 \quad / : (-3)$$
$$p_2 \ldots y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{3}$$

Očitamo koeficijente smjera prvoga i drugoga pravca:

$$k_1 = 3,\ k_2 = \frac{2}{3},$$

pa računamo tangens traženoga kuta:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} \right| = \left| \frac{\frac{2}{3} - 3}{1 + \frac{2}{3} \cdot 3} \right| = \left| \frac{\frac{2-9}{3}}{1+2} \right| = \left| \frac{-\frac{7}{3}}{3} \right| = \left| -\frac{7}{9} \right| = \frac{7}{9}.$$

Stoga je φ = arctg $\frac{7}{9}$ ≈ 37.87498365° = 37°52'30'' ≈ 0.661043 radijana.

24. 1.) $24 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}$ **.** Komponenta koja skalarno množi radijvektor $\vec{i}$ jednaka je razlici apscisâ početne i krajnje točke vektora, dok je komponenta koja skalarno množi radijvektor $\vec{j}$ jednaka razlici ordinata početne i krajnje točke vektora. Tako odmah dobijemo:

$$\overrightarrow{AB} = (26-2) \cdot \vec{i} + (10-1) \cdot \vec{j} = 24 \cdot \vec{i} + 9 \cdot \vec{j}$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

2.) (10, 4). Zadanu dužinu dijelimo u omjeru 1 : 2 računajući od točke *A*. To znači da je pripadni omjerni koeficijent jednak $k = \frac{1}{2}$. Tako su koordinate tražene točke:

$$C\left(\frac{x_A + k \cdot x_B}{1+k}, \frac{y_A + k \cdot y_B}{1+k}\right) = \left(\frac{2+\frac{1}{2}\cdot 26}{1+\frac{1}{2}}, \frac{1+\frac{1}{2}\cdot 10}{1+\frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{2+13}{\frac{2+1}{2}}, \frac{1+5}{\frac{2+1}{2}}\right) = \left(\frac{15}{\frac{3}{2}}, \frac{6}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{30}{3}, \frac{12}{3}\right) = (10,4)$$

25. 1.) 0.8 = $\frac{4}{5}$**.** Sinus kuta α jednak je drugoj koordinati presjecišta kraka kuta α i središnje jedinične kružnice. Stoga je sin α = 0.8.

2.) $\frac{\pi}{2}$. Sa slike očitamo da između točaka $x = 0$ i $x = \pi$ imamo točno dva „brijega“ iznad osi x i točno dva „dola“ ispod osi x. Budući da se u jednom temeljnom periodu funkcije f uvijek pojavljuje točno jedan „brijeg“ i točno jedan „dol“, temeljni period T dobit ćemo tako da broj $\pi - 0 = \pi$ podijelimo s 2. Dakle, $T = \frac{\pi}{2}$. (Isti zaključak dobije se ako se funkcija promatra između točaka $x = \pi$ i $x = 2 \cdot \pi$.)

3.) $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{\pi}{2}$**.** Koristit ćemo identitet $\sin(2 \cdot x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$. Tako redom dobivamo:

$$\begin{gathered} 2 \cdot \cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad /:2, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \cos x, \\ \cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0, \\ \cos x \cdot (\cos x - \sin x) = 0. \end{gathered}$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli. Stoga su moguća dva različita slučaja:

a) $\cos x = 0$. U intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$ ova jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = \frac{\pi}{2}$.

b) $\cos x - \sin x = 0$. Za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right]$ vrijedi nejednakost $\sin x > 0$, pa dijeljenjem naznačene jednadžbe sa $\sin x$ dobivamo:

$$\frac{\cos x}{\sin x} - 1 = 0,$$

odnosno

$$\operatorname{ctg} x = 1.$$

U intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right]$ ova jednadžba ima točno jedno rješenje: $x = \frac{\pi}{4}$.

Stoga su tražena rješenja polazne jednadžbe $x_1 = \frac{\pi}{4}$ i $x_2 = \frac{\pi}{2}$

26. $\mathbf{5 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 225}$ **ili** $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1$**; 12.** U osni oblik jednadžbe elipse

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

uvrstimo $x = 6$, $y = 5$ i $a = 9$. Dobijemo:

$$\begin{gathered} b^2 \cdot 6^2 + 9^2 \cdot 5^2 = 9^2 \cdot b^2, \\ 36 \cdot b^2 + 9^2 \cdot 5^2 = 81 \cdot b^2, \\ 36 \cdot b^2 - 81 \cdot b^2 = -9^2 \cdot 5^2, \\ (-45) \cdot b^2 = -9^2 \cdot 5^2, \\ b^2 = \frac{-9^2 \cdot 5^2}{(-45)} = \frac{9^2 \cdot 5^2}{9 \cdot 5} = 9 \cdot 5 = 45 . \end{gathered}$$

Dakle, tražena jednadžba elipse je:

$$\begin{gathered} 45 \cdot x^2 + 9^2 \cdot y^2 = 9^2 \cdot 45 \quad /:9 \\ 5 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 9 \cdot 45, \\ 5 \cdot x^2 + 9 \cdot y^2 = 225, \end{gathered}$$

odnosno, u kanonskom obliku,

$$\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{45} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{45} = 1 .$$

Udaljenost između žarišta elipse je dvostruko veća od linearnoga ekscentriciteta elipse. Linearni ekscentricitet elipse jednak je:

$$e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9^2 - 45} = \sqrt{81 - 45} = \sqrt{36} = 6 ,$$

pa je udaljenost između žarišta elipse jednaka

$$d = 2 \cdot e = 2 \cdot 6 = 12.$$

27. (približno) 16°39'57"; 4.39. Radi jednostavnosti, pretpostavljamo da su sve oznake u trokutu standardne, tj. da se nasuprot stranice $a = \overline{BC}$ nalazi vrh A i kut α itd.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

Iz podataka u zadatku slijedi:

$$c = 12 \text{ cm},$$
$$\alpha = 35°,$$
$$a = 2 \cdot b.$$

Prema sinusovu poučku vrijedi jednakost:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta},$$

odnosno

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

U tu jednakost uvrstimo $\alpha = 35°$ i $a = 2 \cdot b$, pa dobijemo:

$$\frac{2 \cdot b}{b} = \frac{\sin 35°}{\sin\beta},$$
$$2 = \frac{\sin 35°}{\sin\beta}.$$

Odavde je

$$\sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \sin 35°,$$
$$\sin\beta \approx 0.286788218175523,$$
$$\beta \approx 16.665768674° = 16°39'57''.$$

(Rješenje $\beta_1 = 180° - \beta = 180° - 16°39'57'' = 163°20'3''$ ne dolazi u obzir jer bi tada zbroj dvaju kutova trokuta (α i β) bio strogo veći od 180°, što je nemoguće.)

Za izračun duljine stranice $b = \overline{AC}$ iskoristit ćemo sinusov poučak zapisan u obliku:

$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

U svakom trokutu vrijedi jednakost

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°,$$

iz koje je

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (35° + 16°39'57'') = 128°20'3''.$$

Tako konačno imamo:

$$\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{b}{\sin\beta} \quad /\cdot\sin\beta$$

$$b=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}\cdot c=\frac{\sin 16°39'57''}{\sin 128°20'3''}\cdot 12\approx 4.3873565\approx 4.39\text{ cm}$$

28. 1.) 13 650 stanovnika. U formulu za $S(t)$ uvrstimo $t = 1958$, pa dobijemo traženi broj:

$$S(1958)=12\ 500\cdot 2^{0.01587\cdot(1958-1950)}=12\ 500\cdot 2^{0.01587\cdot 8}=12\ 500\cdot 2^{0.12696}\approx 13\ 649.878\approx 13\ 650\,.$$

(Dobiveni rezultat zaokružujemo na najbliži prirodan broj jer je ionako riječ o procjenjivanju broja stanovnika, a ne o preciznom izračunu stvarnoga broja stanovnika.)

2.) 1967. godine. Tražimo najmanji prirodan broj t takav da je $S(t) \geq 15\ 000$. U formulu za $S(t)$ uvrstimo $S(t) = 15\ 000$, pa dobijemo:

$$15\ 000=12\ 500\cdot 2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)} \quad /:12\ 500$$

$$\frac{15\ 000}{12\ 500}=2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)}$$

$$\frac{6}{5}=2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)} \quad /\log$$

$$\log\frac{6}{5}=\log\left[2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)}\right]$$

$$\log\frac{6}{5}=0.01587\cdot(t-1\ 950)\cdot\log 2 \quad /\,0.01587\cdot\log 2$$

$$\frac{\log\frac{6}{5}}{0.01587\cdot\log 2}=t-1\ 950$$

$$t=\frac{\log\frac{6}{5}}{0.01587\cdot\log 2}+1\ 950=1\ 966.574$$

Dobiveni rezultat zaokružimo na prvi strogo veći prirodan broj, pa dobijemo da je tražena godina 1967.

3.) 2050. godine. 1950. godine broj stanovnika u gradu bio je jednak

$$S(1\ 950)=12\ 500\cdot 2^{0.01587\cdot(1\ 950-1\ 950)}=12\ 500\cdot 2^{0.01587\cdot 0}=12\ 500\cdot 2^{0}=12\ 500\cdot 1=12\ 500\,.$$

Tražimo najmanji prirodan broj t takav da je $S(t) \geq 3 \cdot 12\ 500$, tj. $S(t) \geq 37\ 500$. U formulu za $S(t)$ uvrstimo $S(t) = 37\ 500$, pa dobijemo:

$$37\ 500 = 12\ 500 \cdot 2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)} \quad /:12\ 500$$
$$\frac{37\ 500}{12\ 500} = 2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)}$$
$$3 = 2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)} \quad /\log$$
$$\log 3 = \log\left[2^{0.01587\cdot(t-1\ 950)}\right]$$
$$\log 3 = 0.01587\cdot(t-1\ 950)\cdot\log 2 \quad /0.01587\cdot\log 2$$
$$\frac{\log 3}{0.01587\cdot\log 2} = t - 1\ 950$$
$$t = \frac{\log 3}{0.01587\cdot\log 2} + 1\ 950 = 2\ 049.87$$

Dobiveni rezultat zaokružimo na prvi strogo veći prirodan broj, pa dobijemo da je tražena godina 2050.

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) $S_1\left(-2\cdot\sqrt{6},0\right)$, $S_2\left(2\cdot\sqrt{6},0\right)$ i $S_3(3,0)$**.** Apscise svih sjecišta grafa zadane funkcije s osi apscisa su realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$f(x) = 0$$
$$\frac{1}{8}\cdot(x-3)\cdot(x^2-24) = 0 \quad /\cdot 8$$
$$(x-3)\cdot(x^2-24) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Iz $x - 3 = 0$ slijedi $x_1 = 3$. Iz $x^2 - 24 = 0$ slijedi $x^2 = 24$, odnosno $x_{2,3} = \pm\sqrt{24} = \pm\sqrt{4\cdot 6} = = \pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{6} = \pm 2\cdot\sqrt{6}$. Stoga su tražena sjecišta $S_1\left(-2\cdot\sqrt{6},0\right)$, $S_2\left(2\cdot\sqrt{6},0\right)$ i $S_3(3,0)$

2.) $f'(x) = \frac{3}{8}\cdot x^2 - \frac{3}{4}\cdot x - 3.$**.** Zadanu funkciju deriviramo prema pravilu za deriviranje umnoška dviju funkcija i zbroja funkcija (konstantu $\frac{1}{8}$ samo prepisujemo):

$$f'(x) = \frac{1}{8}\cdot\left[(x-3)'\cdot(x^2-24) + (x-3)\cdot(x^2-24)'\right]$$
$$f'(x) = \frac{1}{8}\cdot\left\{\left[(x)'-(3)'\right]\cdot(x^2-24) + (x-3)\cdot\left[(x^2)'-(24)'\right]\right\}$$
$$f'(x) = \frac{1}{8}\cdot\left[(1-0)\cdot(x^2-24) + (x-3)\cdot(2\cdot x^{2-1}-0)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{8}\cdot\left[1\cdot(x^2-24)+(x-3)\cdot 2\cdot x\right],$$
$$f'(x)=\frac{1}{8}\cdot(x^2-24+2\cdot x^2-6\cdot x),$$
$$f'(x)=\frac{1}{8}\cdot(3\cdot x^2-6\cdot x-24),$$
$$f'(x)=\frac{3}{8}\cdot x^2-\frac{6}{8}\cdot x-\frac{24}{8},$$
$$f'(x)=\frac{3}{8}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x-3.$$

3.) strogi lokalni minimum –1 za x = 4; strogi lokalni maksimum $\frac{25}{2}$ za x = –2. Kandidati za lokalne ekstreme su sva realna rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$, odnosno jednadžbe $\frac{3}{8}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x-3 =$ $= 0$. Tu jednadžbu pomnožimo s 8, pa dobijemo:

$$3\cdot x^2-6\cdot x-24=0,$$

odnosno, nakon dijeljenja jednadžbe s 3,

$$x^2-2\cdot x-8=0.$$

Rješenja te jednadžbe najlakše i najbrže odredimo pomoću Viète ovih formula: tražimo dva realna broja čiji je zbroj 2, a umnožak (–8). To su brojevi $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$, i te dvije vrijednosti su ujedno i kandidati za lokalne ekstreme.

Nadalje, računamo drugu derivaciju funkcije f:

$$f''(x)=\left[f'(x)\right]'=\left(\frac{3}{8}\cdot x^2-\frac{3}{4}\cdot x-3\right)'=\frac{3}{8}\cdot(x^2)'-\frac{3}{4}\cdot(x)'-(3')=\frac{3}{8}\cdot 2\cdot x^{2-1}-\frac{3}{4}\cdot 1-0=\frac{3}{4}\cdot x-\frac{3}{4}=\frac{3}{4}\cdot(x-1)$$

Računamo predznak $f''(x)$ za $x = -2$ i $x = 4$. Taj predznak jednak je predznaku izraza $x - 1$ za $x =$ $= -2$ i $x = 4$. Za $x = -2$ predznak izraza $x - 1$ je –, a za $x = 4$ predznak izraza $x - 1$ je +. Prema tome, vrijede nejednakosti:

$$f''(-2) < 0,$$
$$f''(4) > 0.$$

Iz dobivenih rezultata zaključujemo:

– za $x = -2$ funkcija f poprima strogi lokalni maksimum. Taj maksimum je jednak:

$$f(-2) = \frac{1}{8}\cdot(-2-3)\cdot\left[(-2)^2-24)\right] = \frac{1}{8}\cdot(-5)\cdot(4-24) = \frac{1}{8}\cdot(-5)\cdot(-20) = \frac{100}{8} = \frac{25}{2}$$

– za $x = 4$ funkcija f poprima strogi lokalni minimum. Taj minimum je jednak:

$$f(4) = \frac{1}{8}\cdot(4-3)\cdot(4^2-24) = \frac{1}{8}\cdot 1\cdot(16-24) = \frac{1}{8}\cdot(-8) = -1$$

Grubo (i neprecizno) govoreći, možemo reći da f ima strogi lokalni minimum u točki $m(4, -1)$, a strogi lokalni maksimum u točki $M\left(-2,\ \frac{25}{2}\right)$.

4.) ***t*… *y* = 6 · *x* + 31.** Odredimo najprije ordinatu točke grafa funkcije f čija je apscisa –4. Ta je ordinata jednaka $f(-4)$, pa računamo $f(-4)$:

$$f(-4) = \frac{1}{8}\cdot(-4-3)\cdot\left[(-4)^2-24\right] = \frac{1}{8}\cdot(-7)\cdot(16-24) = \frac{1}{8}\cdot(-7)\cdot(-8) = \frac{56}{8} = 7$$

Dakle, tangentu na graf zadane funkcije povlačimo u točki $T(-4, 7)$. Koeficijent smjera te tangente jednak je vrijednosti prve derivacije funkcije f za $x = -4$. Prvu derivaciju funkcije f već smo izračunali u podzadatku **2.** i dobili:

$$f'(x) = \frac{3}{8}\cdot x^2 - \frac{3}{4}\cdot x - 3.$$

Stoga je $f'(-4)$ jednako:

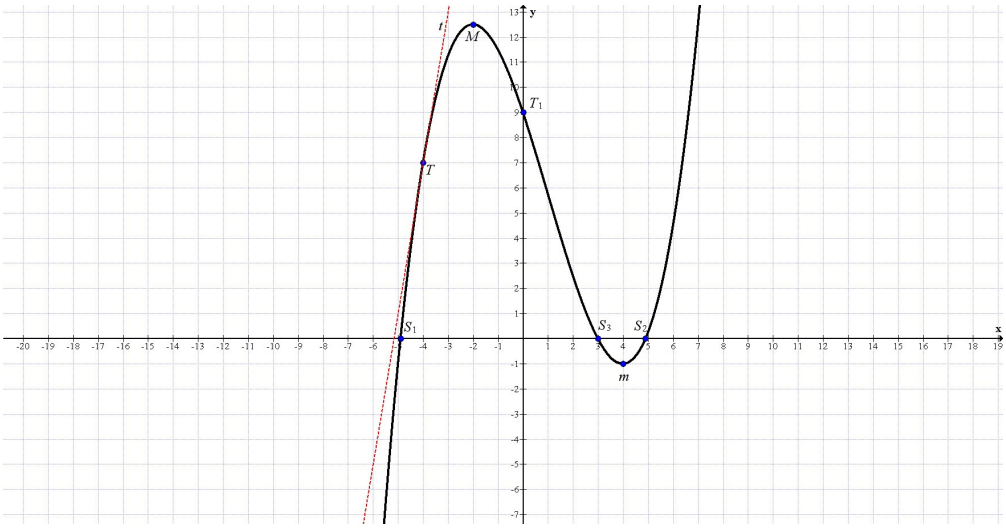
$$f'(-4) = \frac{3}{8}\cdot(-4)^2 - \frac{3}{4}\cdot(-4) - 3 = \frac{3}{8}\cdot 16 + 3 - 3 = 3\cdot 2 = 6.$$

Dakle, koeficijent smjera tangente jednak je $k = f'(-4) = 6$. Preostaje nam napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(-4, 7)$ i ima koeficijent smjera $k = 6$:

$$t\ldots\ y - 7 = 6\cdot[x-(-4)],$$
$$t\ldots\ y = 6\cdot(x+4) + 7,$$
$$t\ldots\ y = 6\cdot x + 24 + 7,$$
$$t\ldots\ y = 6\cdot x + 31.$$

5.) Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 2. Ucrtana su sjecišta grafa s osi apscisa izračunana u podzadatku **1.)**, lokalni ekstremi izračunani u podzadatku **3.)**, te točka T i tangenta t izračunane u podzadatku **4.** Korisno je primijetiti da je $f(0) = 9$, što znači da graf zadane funkcije siječe os y u točki $T_1(0, 9)$. Također, iz slike je razvidno da dobiveni lokalni ekstremi nisu i globalni ekstremi zadane funkcije.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA



Slika 3.

30. $k \in \langle -13, 3 \rangle$. Primijetimo da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost:

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0\,.$$

Mi tražimo sve realne brojeve k takve da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost $f(x) < 5$. To znači da tražimo sve realne brojeve k tako da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2 - k \cdot x + 1}{x^2 + x + 1} < 5\,.$$

Tu nejednakost smijemo pomnožiti s $x^2 + x + 1$ jer smo netom pokazali da je taj izraz uvijek strogo pozitivan. Stoga množenjem s $x^2 + x + 1$ dobivamo:

$$\begin{gathered} x^2 - k \cdot x + 1 < 5 \cdot (x^2 + x + 1), \\ x^2 - k \cdot x + 1 < 5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 5, \\ 5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 5 - x^2 + k \cdot x - 1 > 0, \\ 4 \cdot x^2 + (k + 5) \cdot x + 4 > 0. \end{gathered}$$

Ova nejednakost bit će istinita za svaki $x \in \mathbf{R}$ ako i samo ako je diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$4 \cdot x^2 + (k + 5) \cdot x + 4 = 0$$

strogo manja od nule. Naime, vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) je strogo pozitivan realan broj (tj. 4), pa ako gornja kvadratna jednadžba nema realnih rješenja, onda pripadna kvadratna funkcija $f_1(x) = 4 \cdot x^2 + (k + 5) \cdot x + 4$ poprima isključivo strogo pozitivne vrijednosti, a to i želimo postići.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U PROSINCU 2010. – VIŠA RAZINA

Diskriminanta navedene kvadratne jednadžbe jednaka je

$$D = (k + 5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4 ,$$
$$D = k^2 + 2 \cdot k \cdot 5 + 5^2 - 64,$$
$$D = k^2 + 10 \cdot k + 25 - 64,$$
$$D = k^2 + 10 \cdot k - 39.$$

Stoga preostaje riješiti kvadratnu nejednadžbu

$$k^2 + 10 \cdot k - 39 < 0.$$

Pripadna kvadratna jednadžba glasi:

$$k^2 + 10 \cdot k - 39 = 0.$$

Nju najbrže i najlakše riješimo koristeći Viète ove formule: tražimo dva realna broja koja zbrojena daju (–10), a pomnožena (–39). To su realni brojevi (–13) i 3, i to su rješenja gornje kvadratne jednadžbe. Prisjetimo se da kvadratna funkcija čiji je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) strogo pozitivan realan broj poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu kojega određuju realne nultočke te funkcije. Stoga je skup svih rješenja nejednadžbe

$$k^2 + 10 \cdot k - 39 < 0.$$

otvoreni interval određen brojevima (–13) i 3, tj. interval $\langle -13, 3 \rangle$. Taj je interval ujedno i rješenje postavljenoga zadatka.

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, predavač