1. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y=\dfrac{1}{x+1}$ iznad intervala $\left[0,+\infty\right\rangle$ oko osi **apscisa**.

Rješenje: Koristeći formulu za računanje volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika oko osi apscisa i definiciju nepravoga integrala kojemu interval integracije nije omeđen odozgo dobivamo:

$$V=\pi\cdot\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)^2\cdot\mathrm{d}x=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b\frac{1}{(x+1)^2}\cdot\mathrm{d}x\right)=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_0^b(x+1)^{-2}\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{-2+1}\cdot(x+1)^{-2+1}\right)\Bigg|_0^b\right)=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{x+1}\right)\Bigg|_0^b\right)=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{b+1}-\frac{1}{0+1}\right)=$$

$$=(-\pi)\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\underbrace{b+1}_{\to+\infty}}-1\right)=(-\pi)\cdot(0-1)=\pi\ \text{kub. jed.}$$

2. Izračunajte volumen rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom krivulje $y=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ iznad intervala $\left[2,+\infty\right\rangle$ oko osi **ordinata**.

Rješenje: Koristeći formulu za računanje volumena rotacijskoga tijela nastaloga rotacijom ravninskoga lika oko osi ordinata dobivamo:

$$V=2\cdot\pi\cdot\int_2^{+\infty}x\cdot\frac{1}{(x-1)^3}\cdot\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=x-1,\\ x=t+1,\\ \mathrm{d}t=(x-1)'\cdot\mathrm{d}x=(1-0)\cdot\mathrm{d}x=\mathrm{d}x,\\ 2\mapsto 2-1=1,\\ +\infty\mapsto\lim\limits_{b\to+\infty}(b-1)=+\infty\end{array}\right\}=2\cdot\pi\cdot\int_1^{+\infty}\frac{t+1}{t^3}\cdot\mathrm{d}t=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\frac{t+1}{t^3}\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(\frac{t}{t^3}+\frac{1}{t^3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\int_1^b\left(t^{-2}+t^{-3}\right)\cdot\mathrm{d}t\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1}+\frac{1}{-3+1}\cdot t^{-3+1}\right)\Bigg|_1^b\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(\left(-\frac{1}{t}-\frac{1}{2\cdot t^2}\right)\Bigg|_1^b\right)=2\cdot\pi\cdot\lim_{b\to+\infty}\left(-\underbrace{\frac{1}{b}}_{\to+\infty}-\underbrace{\frac{1}{2\cdot b^2}}_{\to+\infty}-\left(-\frac{1}{1}-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)\right)=$$

$$=2\cdot\pi\cdot\left(0-0+1+\frac{1}{2}\right)=2\cdot\pi\cdot\frac{3}{2}=3\cdot\pi\ \text{kub. jed.}$$

3. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_{-\infty}^{0} 4\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t$.

Rješenje: Koristeći definiciju nepravoga integrala kojemu je interval integracije nije omeđen odozdo dobivamo:

$$I=\lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0} 4\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t\right)=\left|\begin{array}{ll} u=4\cdot t & v=\int e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t} \\ \mathrm{d}u=(4\cdot t)'\cdot \mathrm{d}t=4\cdot \mathrm{d}t & \mathrm{d}v=e^{2\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \end{array}\right|=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(4\cdot t\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\int\limits_{a}^{0} 4\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\int\limits_{a}^{0} 2\cdot e^{2\cdot t}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}-\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(2\cdot t\cdot e^{2\cdot t}-e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\left((2\cdot t-1)\cdot e^{2\cdot t}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\left(\frac{2\cdot t-1}{e^{-2\cdot t}}\right)\Big|_{a}^{0}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cdot 0-1}{e^{-2\cdot 0}}-\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=\lim_{a\to-\infty}\left(-1-\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}(-1)-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2\cdot a-1}{e^{-2\cdot a}}\right)=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{(2\cdot a-1)'}{\left(e^{-2\cdot a}\right)'}\right)=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2-0}{e^{-2\cdot a}\cdot(-2\cdot a)'}\right)=$$

$$=-1-\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{2}{e^{-2\cdot a}\cdot(-2)}\right)=-1+\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{e^{-2\cdot a}}\right)=-1+\lim_{a\to-\infty}\left(e^{\overbrace{2\cdot a}^{\to-\infty}}\right)=-1+0=-1.$$

4. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{x^2+2\cdot x+2}\cdot \mathrm{d}x.$

Rješenje: Analogno kao u prethodnom zadatku dobivamo:

$$I=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{\left(x+\frac{2}{1\cdot 2}\right)^2-\left(\frac{2}{1\cdot 2}\right)^2+2}\cdot \mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{2}{(x+1)^2+1}\cdot \mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=x+1,\\ \mathrm{d}t=(x+1)'\cdot \mathrm{d}x=(1+0)\cdot \mathrm{d}x=\mathrm{d}x,\\ -\infty\mapsto\lim\limits_{a\to-\infty}(a+1)=-\infty,\\ -1\mapsto -1+1=0\end{array}\right\}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{2}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t=2\cdot\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\int\limits_{a}^{0}\frac{1}{t^2+1}\cdot \mathrm{d}t\right)=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left((\operatorname{arctg} t)\Big|_{a}^{0}\right)=$$

$$=2\cdot\lim_{a\to-\infty}\left(\operatorname{arctg} 0-\underbrace{\operatorname{arctg} a}_{\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)}\right)=2\cdot\left(0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}=\pi.$$

5. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln 2}{x\cdot\ln^2 x}\cdot\mathrm{d}x.$

Rješenje: Uočimo da podintegralna funkcija nije definirana za $x=0$, tj. u donjoj granici intervala integracije. Korištenjem definicije nepravoga integrala kojemu podintegralna funkcija nije definirana u donjoj granici intervala integracije slijedi:

$$I=\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_a^{\frac{1}{2}}\frac{\ln 2}{x\cdot\ln^2 x}\cdot\mathrm{d}x\right)=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=\ln x,\\ \mathrm{d}t=(\ln x)'\cdot\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\cdot\mathrm{d}x,\\ a\mapsto\ln a,\\ \frac{1}{2}\to\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln 2=0-\ln 2=-\ln 2\end{array}\right\}=\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_{\ln a}^{-\ln 2}\frac{\ln 2}{t^2}\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\int\limits_{\ln a}^{-\ln 2}t^{-2}\cdot\mathrm{d}t\right)=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{1}{-2+1}\cdot t^{-2+1}\right)\Bigg|_{\ln a}^{-\ln 2}\right)=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\left(\frac{-1}{t}\right)\Bigg|_{\ln a}^{-\ln 2}\right)=$$

$$=(\ln 2)\cdot\lim_{a\to 0+}\left(\frac{-1}{-\ln 2}+\frac{1}{\underbrace{\ln a}_{\to-\infty}}\right)=(\ln 2)\cdot\left(\frac{1}{\ln 2}+0\right)=\ln 2\cdot\frac{1}{\ln 2}=1.$$

6. Izračunajte nepravi integral $I=\int\limits_0^{2}\sqrt{\frac{2}{2-x}}\cdot\mathrm{d}x.$

Rješenje: Uočimo da podintegralna funkcija nije definirana za $x=2$, tj. u gornjoj granici segmenta integracije. Korištenjem definicije nepravoga integrala kojemu podintegralna funkcija nije definirana u gornjoj granici intervala integracije slijedi:

$$I=\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^{b}\sqrt{\frac{2}{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^{b}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_0^{b}\frac{1}{\sqrt{2-x}}\cdot\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ t:=2-x,\\ \mathrm{d}t=(2-x)'\cdot\mathrm{d}x=(0-1)\cdot\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\Leftrightarrow\mathrm{d}x=-\mathrm{d}t,\\ 0\mapsto 2-0=2,\\ b\mapsto 2-b\end{array}\right\}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_2^{2-b}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot(-\mathrm{d}t)\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_{2-b}^{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\cdot\mathrm{d}t\right)=\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\int\limits_{2-b}^{2}t^{\frac{-1}{2}}\cdot\mathrm{d}t\right)=$$

$$= \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(\frac{1}{\frac{-1}{2}+1}\cdot t^{\frac{-1}{2}+1}\right)\Bigg|_{2-b}^{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(2\cdot t^{\frac{1}{2}}\right)\Bigg|_{2-b}^{2}\right) = \sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(2\cdot\sqrt{t}\right)\Big|_{2-b}^{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\left(\sqrt{t}\right)\Big|_{2-b}^{2}\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\lim_{b\to 2-}\left(\sqrt{2}-\sqrt{\underbrace{2-b}_{\to 2-2=0}}\right) = 2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{2}-0\right) = 2\cdot 2 = 4.$$

7. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\cdot a_{n-1}, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Uočimo da za svaki $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$, vrijedi identitet:

$$1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Primjenom metode teleskopiranja dobivamo:

$$\left.\begin{aligned} &a_1 = 1, \\ &a_2 = \frac{2+1}{2}\cdot a_1 = \frac{3}{2}\cdot a_1, \\ &a_3 = \frac{3+1}{3}\cdot a_2 = \frac{4}{3}\cdot a_2, \\ &a_4 = \frac{4+1}{4}\cdot a_3 = \frac{5}{4}\cdot a_3, \\ &\vdots \\ &a_n = \frac{n+1}{n}\cdot a_{n-1} \end{aligned}\right\}.$$

$$a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\ldots\cdot a_n = \left(a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot a_4\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\right)\cdot\left(1\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}\right),$$

$$a_n = \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2}\cdot n+\frac{1}{2}.$$

8. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2\cdot n, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 2, \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Koristit ćemo formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$S_n = \frac{n}{2}\cdot(b_1 + b_n),\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Primjenom metode teleskopiranja dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1, \\ a_2 = a_1 + 2\cdot 2, \\ a_3 = a_2 + 2\cdot 3, \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + 2\cdot n \end{array}\right\} +$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}) + (1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n),$$

$$a_n = 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot n = 2\cdot(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - 1 = 2\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2} - 1 = n^2 + n - 1.$$

9. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = 9\cdot a_{n-1} - 8\cdot a_{n-2}, \text{ za svaki } n\in\mathbb{N},\ n\geq 3, \\ a_1 = 11,\ a_2 = 67. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 = 9\cdot k - 8 \Leftrightarrow k^2 - 9\cdot k + 8 = 0.$$

Njezina su rješenja $k_1 = 1,\ k_2 = 8$. Zbog toga je opće rješenje rekurzije:

$$a_n = B\cdot 1^n + A\cdot 8^n = A\cdot 8^n + B,\ A, B\in\mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B\in\mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta:

$$\begin{cases} 11 = a_1 = A\cdot 8^1 + B, \\ 67 = a_2 = A\cdot 8^2 + B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\cdot A + B = 11, \\ 64\cdot A + B = 67 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (1, 3).$$

Dakle, rješenje zadatka je niz:

$$a_n = 8^n + 3.$$

10. Riješite rekurziju:

$$\begin{cases} a_n = 10 \cdot a_{n-1} - 25 \cdot a_{n-2}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N},\ n \geq 3, \\ a_1 = 25,\ a_2 = 200. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 = 10 \cdot k - 25 \Leftrightarrow k^2 - 10 \cdot k + 25 = 0.$$

Ona ima jedinstveno rješenje $k = 5$. Zbog toga je opće rješenje rekurzije:

$$a_n = (A \cdot n + B) \cdot 5^n,\ A, B \in \mathbb{R}.$$

Nepoznate konstante $A, B \in \mathbb{R}$ odredimo iz početnih uvjeta:

$$\begin{cases} 25 = a_1 = (A \cdot 1 + B) \cdot 5^1, \\ 200 = a_2 = (A \cdot 2 + B) \cdot 5^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 5, \\ 2 \cdot A + B = 8 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B) = (3, 2).$$

Dakle, rješenje zadatka je niz:

$$a_n = (3 \cdot n + 2) \cdot 5^n.$$

11. Dokažite da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Budući da su i brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, ne koristimo apsolutne vrijednosti. Tako imamo redom:

$$r = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{\left(n^2+1\right)^{3 \cdot n}}}{\sqrt[n]{\left(2 \cdot n^3+1\right)^{2 \cdot n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\left(n^2+1\right)^3}{\left(2 \cdot n^3+1\right)^2} \right) =$$

$$= \lim_n \left(\frac{n^6 + 3 \cdot n^4 + 3 \cdot n^2 + 1}{4 \cdot n^6 + 4 \cdot n^3 + 1} \right) = \lim_n \left(\frac{1 + 3 \cdot \frac{1}{n^2} + 3 \cdot \frac{1}{n^4} + \frac{1}{n^6}}{4 + 4 \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^6}} \right) = \frac{1 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0}{4 + 4 \cdot 0 + 0} = \frac{1}{4} < 1.$$

Odatle zaključujemo da je zadani red konvergentan, što smo i trebali dokazati.

12. Dokažite da je red $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{5^n}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Budući da su brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, pri računanju granične vrijednosti ne koristimo apsolutnu vrijednost. Tako imamo redom:

$$a_n = \frac{n^2+n+1}{5^n} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(n+1)^2+(n+1)+1}{5^{n+1}} = \frac{n^2+2\cdot n+1+n+1+1}{5^{n+1}} = \frac{n^2+3\cdot n+3}{5^{n+1}} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n^2+3\cdot n+3}{5^{n+1}}}{\frac{n^2+n+1}{5^n}} = \frac{n^2+3\cdot n+3}{5\cdot\left(n^2+n+1\right)} \Rightarrow$$

$$r = \lim_n \left(\frac{n^2+3\cdot n+3}{5\cdot\left(n^2+n+1\right)}\right) = \lim_n \left(\frac{1+3\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}{5\cdot\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}\right) = \frac{1+3\cdot 0+3\cdot 0}{5\cdot(1+0+0)} = \frac{1}{5} < 1.$$

Odatle zaključujemo da zadani red konvergira, što smo i tvrdili.

13. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Raabeov kriterij. Budući da su i brojnik i nazivnik općega člana reda prirodni brojevi, ne koristimo apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n = \frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot(n+1)+1)} = \frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)}}{\frac{1}{n\cdot(2\cdot n+1)}} = \frac{n\cdot(2\cdot n+1)}{(n+1)\cdot(2\cdot n+3)} = \frac{2\cdot n^2+n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3} \Rightarrow$$

$$r = \lim_n \left(n\cdot\left(1-\frac{2\cdot n^2+n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right) = \lim_n \left(n\cdot\left(\frac{2\cdot n^2+5\cdot n+3-\left(2\cdot n^2+n\right)}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right) =$$

$$= \lim_n \left(n\cdot\left(\frac{4\cdot n+3}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right)\right) = \lim_n \left(\frac{4\cdot n^2+3\cdot n}{2\cdot n^2+5\cdot n+3}\right) = \lim_n \left(\frac{4+3\cdot\frac{1}{n}}{2+5\cdot\frac{1}{n}+3\cdot\frac{1}{n^2}}\right) =$$

$$= \frac{4+3\cdot 0}{2+5\cdot 0+3\cdot 0} = \frac{4}{2} = 2 > 1.$$

Odatle zaključujemo da zadani red konvergira, što smo i tvrdili.

14. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+1}$ konvergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Uočimo da se predznaci članova reda pravilno izmjenjuju: +, -, +, -, ..., što znači da je zadani red alternirajući. Zbog toga primjenjujemo Leibnizov kriterij.

Označimo $b_n := \frac{1}{n^2+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Niz $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je strogo padajući niz pozitivnih racionalnih brojeva (jer je funkcija $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}, f(n)=n^2+1$ strogo rastuća) i ima graničnu vrijednost $L=0$. Dakle, polazni red je konvergentan, što smo i tvrdili.

15. Dokažite da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{n^2}$ divergentan. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij, pri čemu koristimo jednakost $\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right)=1$. Uočimo da su e^n, $n^2>0, \forall n\in\mathbb{N}$, pa ne moramo koristiti apsolutne vrijednosti. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\frac{e^n}{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{e^n}}{\sqrt[n]{n^2}}\right)=\lim_n\left(\frac{e}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2}\right)=\frac{e}{1^2}=e>1.$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, zadani red je divergentan, što smo i tvrdili.

16. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij. Budući da *ne znamo* predznak izraza $x+1$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}\right|}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{|x+1|^n}}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{2^{n-1}}}\right)=\lim_n\frac{|x+1|}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\cdot\underbrace{2^{\overbrace{1-\frac{1}{n}}^{\to 0}}}_{\to 2^{1-0}=2}}=\frac{|x+1|}{1\cdot 2}=\frac{|x+1|}{2}.$$

Zadani red će (sigurno) konvergirati ako vrijedi $r<1$. Zbog toga riješimo nejednadžbu $r<1$ po nepoznanici x koristeći $(|x|<a)\Leftrightarrow(-a<x<a)$, $\forall a>0$:

$$\frac{|x+1|}{2}<1\Leftrightarrow|x+1|<2\Leftrightarrow -2<x+1<2\Leftrightarrow -2-1<x<2-1\Leftrightarrow -3<x<1\Leftrightarrow x\in\langle -3,1\rangle.$$

Preostaje provjeriti konvergenciju reda u slučajevima kad je $r=1$, odnosno $x\in\{-3,1\}$. Za $x=-3$ dobivamo red:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2}{n}=2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ je alternirajući red, pa za ispitivanje njegove konvergencije možemo primijeniti Leibnizov kriterij. Niz $b_n=\frac{1}{n}$ je strogo padajući niz pozitivnih racionalnih brojeva i ima graničnu vrijednost jednaku 0. Zbog toga red $2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ konvergira.

Za $x=1$ dobivamo red:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1+1)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n}=2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je harmonijski red i on je divergentan. Zbog toga red $2\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira.

Dakle, traženi interval konvergencije je $[-3,1\rangle$.

17. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenimo Cauchyjev kriterij. Primijetimo da je $\frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}} \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$, pa ne koristimo apsolutnu vrijednost. Koristimo i jednakost $\lim_n \left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$. Imamo redom:

$$r = \lim_n \left(\sqrt[n]{\frac{(x-2021)^{2\cdot n}}{\sqrt{n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{\sqrt[n]{(x-2021)^{2\cdot n}}}{\sqrt[n]{\sqrt{n}}} \right) = \lim_n \left(\frac{(x-2021)^2}{\sqrt{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}}} \right) = (x-2021)^2.$$

Prema Cauchyjevu kriteriju, zadani red konvergira ako je $r < 1$. Odatle je $(x-2021)^2 < 1$. Odatle slijedi $|x-2021| < 1$, odnosno $-1 < x-2021 < 1$, odnosno $2020 < x < 2022$, pa zaključujemo da je $x \in \langle 2020, 2022 \rangle$.

Preostaje ispitati konvergenciju zadanoga reda za $x = 2020$ i za $x = 2022$. Očito je:

$$(2020-2021)^{2\cdot n} = (-1)^{2\cdot n} = \left((-1)^2\right)^n = 1^n = 1,$$
$$(2022-2021)^{2\cdot n} = 1^{2\cdot n} = 1,$$

pa u oba slučaja dobijemo red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. Riječ je o Dirichletovu redu za $p = \frac{1}{2}$. Taj red divergira.

Tako zaključujemo da je područje konvergencije zadanoga reda interval $\langle 2020, 2022 \rangle$.

18. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{(n+1)!}$.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Budući da *ne znamo* predznak izraza $x-1$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n = \frac{(x-1)^n}{(n+1)!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{(x-1)^{n+1}}{((n+1)+1)!} = \frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)!} \Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}} = \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{(n+2)\cdot(n+1)!}}{\frac{(x-1)^n}{(n+1)!}} = \frac{x-1}{n+2} \Rightarrow$$

$$r = \lim_n \left|\frac{x-1}{n+2}\right| = \lim_n \left(\frac{|x-1|}{n+2}\right) = 0.$$

Posljednja granična vrijednost je jednaka nuli jer za varijablu (prema kojoj tražimo graničnu vrijednost) smatramo n, dok x u tom istom izrazu smatramo konstantom. Dakle, vrijednost r jednaka je 0 *za svaki* $x \in \mathbb{R}$, pa zaključujemo da zadani red konvergira za svaki $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, traženo je područje konvergencije skup $\mathbb{R}$.

19. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}$.

Rješenje: Primijenit ćemo D'Alembertov kriterij. Očito su $e^{2\cdot n\cdot x}$, $n^2+2021>0$ za svaki $x\in\mathbb{R}$ i svaki $n\in\mathbb{N}_0$, pa ne koristimo apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$a_n=\frac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{e^{2\cdot(n+1)\cdot x}}{(n+1)^2+2021}=\frac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+1+2021}=\frac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+2022}\Rightarrow$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{e^{2\cdot n\cdot x+2\cdot x}}{n^2+2\cdot n+2022}}{\dfrac{e^{2\cdot n\cdot x}}{n^2+2021}}=\frac{n^2+2021}{n^2+2\cdot n+2022}\cdot e^{2\cdot x}=\frac{1+2021\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{n}+2022\cdot\dfrac{1}{n^2}}\cdot e^{2\cdot x}\Rightarrow$$

$$r=\lim_n\left(\frac{1+2021\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+2\cdot\dfrac{1}{n}+2022\cdot\dfrac{1}{n^2}}\cdot e^{2\cdot x}\right)=\frac{1+0}{1+0+0}\cdot e^{2\cdot x}=e^{2\cdot x}.$$

Zadani red (sigurno) konvergira ako je $e^{2\cdot x}<1$. Odatle prirodnim logaritmiranjem obiju strana nejednakosti slijedi $2\cdot x<0$, odnosno $x<0$.

Preostaje ispitati konvergenciju reda za $x=0$. U tom slučaju dobivamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{2\cdot n\cdot 0}}{n^2+2021}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}=\frac{1}{0^2+2021}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}=\frac{1}{2021}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}.$$

Odatle zaključujemo da dobiveni red konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}$. No, konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2+2021}$ slijedi izravno iz rezultata zadatka 12. s vježbi (za $p=2$ i $\alpha=2021$.) Prema tome, polazni red konvergira i za $x=0$.

Tako zaključujemo da je traženo područje konvergencije interval $\langle-\infty,0]$.

20. Odredite područje konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left(1-x^2\right)^n}{2\cdot n^3}$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Primijenit ćemo Cauchyjev kriterij. Budući da ne znamo predznak izraza $1-x$, moramo koristiti apsolutnu vrijednost. Imamo redom:

$$r=\lim_n\left(\sqrt[n]{\left|\frac{\left(1-x^2\right)^n}{2\cdot n^3}\right|}\right)=\lim_n\left(\frac{\sqrt[n]{\left|1-x^2\right|^n}}{\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n^3}}\right)=\lim_n\left(\frac{\left|1-x^2\right|}{\underbrace{2^{\frac{1}{n}}}_{\to 2^0=1}\cdot\left(\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}\right)^3}\right)=\frac{\left|1-x^2\right|}{1\cdot 1^3}=\left|1-x^2\right|=\left|x^2-1\right|.$$

Zadani red će (sigurno) konvergirati bude li $r<1$. Tako dobivamo nejednadžbu $\left|x^2-1\right|<1$ koja je ekvivalentna nejednadžbi $-1<x^2-1<1$, odnosno nejednadžbi $0<x^2<2$. Odatle uzimanjem drugoga korijena slijedi $0<|x|<\sqrt{2}$. Ta je nejednadžba ekvivalentna sustavu $\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\\ x\neq 0\end{cases}$ čije je rješenje skup $\left\langle-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\rangle\setminus\{0\}$.

Preostaje ispitati konvergenciju polaznoga reda za $x\in\left\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\right\}$.

Za $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-2)^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2\cdot n^3}$. Označimo li $a_n=\frac{1}{2\cdot n^3}$, onda lagano vidimo da je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ strogo padajući niz strogo pozitivnih racionalnih brojeva čija je granična vrijednost $L=\lim_n\left(\frac{1}{2\cdot n^3}\right)=0$. Primjenom Leibnizova kriterija zaključujemo da polazni red konvergira za $x\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

Za $x=0$ dobivamo red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-0)^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1^n}{2\cdot n^3}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2\cdot n^3}=\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$. Red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ je Dirichletov red za $p=3$, pa taj red konvergira. Zbog toga je i red $\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}$ konvergentan, što znači da zadani red konvergira i za $x=0$.

Tako zaključujemo da je traženo područje konvergencije segment $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

21. Funkciju $f(x)=6\cdot x\cdot \ln x$ aproksimiramo Taylorovim polinomom T_3 stupnja 3 oko točke $c=1$. Izračunajte $T_3(1.1)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih triju njezinih derivacija u točki c. Imamo redom:

$$f(x)=6\cdot x\cdot \ln x, \qquad f(1)=6\cdot 1\cdot \ln 1=6\cdot 1\cdot 0=0,$$
$$f'(x)=6\cdot \ln x+6\cdot x\cdot \frac{1}{x}=6\cdot \ln x+6 \qquad f'(1)=6\cdot \ln 1+6=6\cdot 0+6=6,$$
$$f''(x)=6\cdot \frac{1}{x}=6\cdot x^{-1}, \qquad f''(1)=6\cdot 1^{-1}=6,$$
$$f'''(x)=-6\cdot x^{-2}, \qquad f'''(1)=-6.$$

Tako slijedi:

$$T_3(x)=0+\frac{6}{1!}\cdot (x-1)^1+\frac{6}{2!}\cdot (x-1)^2+\frac{-6}{3!}\cdot (x-1)^3=6\cdot (x-1)+3\cdot (x-1)^2-(x-1)^3 \Rightarrow$$
$$T_3(1.1)=6\cdot 0.1+3\cdot 0.1^2-0.1^3=0.629.$$

Napomena 1. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $f(1.1)\approx 0.62904719$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno 0.0075%.

22. Funkciju $f(x)=3\cdot e^x\cdot \sin x$ aproksimiramo MacLaurinovim polinomom M_3 stupnja 3. Izračunajte $M_3(-0.1)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih triju njezinih derivacija u točki c. Imamo redom:

$$f(x)=3\cdot e^x\cdot \sin x, \qquad f(0)=3\cdot e^0\cdot \sin 0=3\cdot 1\cdot 0=0,$$
$$f'(x)=3\cdot e^x\cdot (\sin x+\cos x) \qquad f'(0)=3\cdot e^0\cdot (\sin 0+\cos 0)=3\cdot 1\cdot (1+0)=3,$$
$$f''(x)=6\cdot e^x\cdot \cos x, \qquad f''(0)=6\cdot e^0\cdot \cos 0=6\cdot 1\cdot 1=6,$$
$$f'''(x)=6\cdot e^x\cdot (\cos x-\sin x), \qquad f'''(0)=6\cdot e^0\cdot (\cos 0-\sin 0)=6\cdot 1\cdot (1-0)=6.$$

Tako slijedi:

$$M_3(x)=0+\frac{3}{1!}\cdot x^1+\frac{6}{2!}\cdot x^2+\frac{6}{3!}\cdot x^3=x^3+3\cdot x^2+3\cdot x \Rightarrow$$
$$M_3(-0.1)=(-0.1)^3+3\cdot (-0.1)^2+3\cdot (-0.1)=-0.271.$$

Napomena 2. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $f(-0.1)\approx -0.27099903$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno $3.57\cdot 10^{-4}$%.

23. Funkciju $g(t)=e^{100-t^2}$ aproksimiramo Taylorovim polinomom T_2 stupnja 2 u okolini točke $c=10$. Izračunajte $T_2(10.2)$.

Rješenje: Odredimo vrijednosti zadane funkcije i prvih dviju njezinih derivacija u točki $c=10$. Imamo redom:

$$\begin{aligned} g(t)&=e^{100-t^2} & g(10)&=e^{100-10^2}=e^{100-100}=e^0=1,\\ g'(t)&=-2\cdot t\cdot e^{100-t^2} & g'(10)&=-2\cdot 10\cdot e^{100-10^2}=-20,\\ g''(t)&=\left(4\cdot t^2-2\right)\cdot e^{100-t^2} & g''(10)&=\left(4\cdot 10^2-2\right)\cdot e^{100-10^2}=398. \end{aligned}$$

Tako slijedi:

$$\begin{aligned} &T_2(t)=1+\frac{-20}{1!}\cdot(t-10)^1+\frac{398}{2!}\cdot(t-10)^2=199\cdot(t-10)^2-20\cdot(t-10)+1\Rightarrow\\ &T_3(10.2)=199\cdot 0.2^2-20\cdot 0.2+1=4.96. \end{aligned}$$

Napomena 3. Koristeći program *WolframAlpha* dobije se $g(10.2)\approx 0.0175974724$. Relativna pogreška aproksimacije iznosi približno 28 086%. Ova ogromna pogreška posljedica je „premaloga“ stupnja polinoma kojim smo aproksimirali polaznu funkciju.

24. Izračunajte koeficijent uz x^3 u MacLaurinovu razvoju realne funkcije $f(x) = x \cdot \cos(4 \cdot x)$ u red potencija.

Rješenje: Znamo da MacLaurinov razvoj u red funkcije $g(x) = \cos x$ glasi:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot x^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots$$

U ovaj red umjesto x uvrstimo $4 \cdot x$:

$$\cos(4 \cdot x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot (4 \cdot x)^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot x^{2 \cdot k}.$$

Dobiveni red pomnožimo s x:

$$f(x) = x \cdot \cos(4 \cdot x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \cdot 4^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!} \cdot x^{2 \cdot k + 1}.$$

Član toga reda koji sadrži x^3 dobijemo za $2 \cdot k + 1 = 3$, tj. za $k = 1$. Zbog toga traženi koeficijent računamo tako da u izraz $\frac{(-1)^k \cdot 4^{2 \cdot k}}{(2 \cdot k)!}$ uvrstimo $k = 1$. Konačno imamo:

$$a_1 = \frac{(-1)^1 \cdot 4^{2 \cdot 1}}{(2 \cdot 1)!} = \frac{(-1) \cdot 16}{2} = -8.$$

25. Izračunajte koeficijent uz t^4 u MacLaurinovu razvoju funkcije $g(t)=e^{6\cdot t}-3\cdot\cos^2 t$.

Rješenje: Primijenit ćemo identitet

$$\cos^2 t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot t)$$

Tako je

$$g(t)=e^{6\cdot t}-\frac{3}{2}\cdot\cos(2\cdot t)-\frac{3}{2}.$$

Znamo da vrijede jednakosti:

$$e^t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot t^n,$$
$$\cos t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot t^{2\cdot n}.$$

U prvoj jednakosti umjesto t pišemo $6\cdot t$, a u drugoj umjesto t pišemo $2\cdot t$. Dobivamo:

$$e^{6\cdot t}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\cdot(6\cdot t)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{6^n}{n!}\cdot t^n$$
$$\cos(2\cdot t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2\cdot n)!}\cdot(2\cdot t)^{2\cdot n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^{2\cdot n}}{(2\cdot n)!}\cdot t^{2\cdot n}.$$

U prvom od tih dvaju redova član koji sadrži t^4 dobijemo za $n=4$, dok u drugom redu takav član dobijemo za $2\cdot n=4$, tj. za $n=2$. Slobodni član u funkciji g ne utječe na vrijednost koeficijenata uz potencije varijable t. Zbog toga je traženi koeficijent jednak:

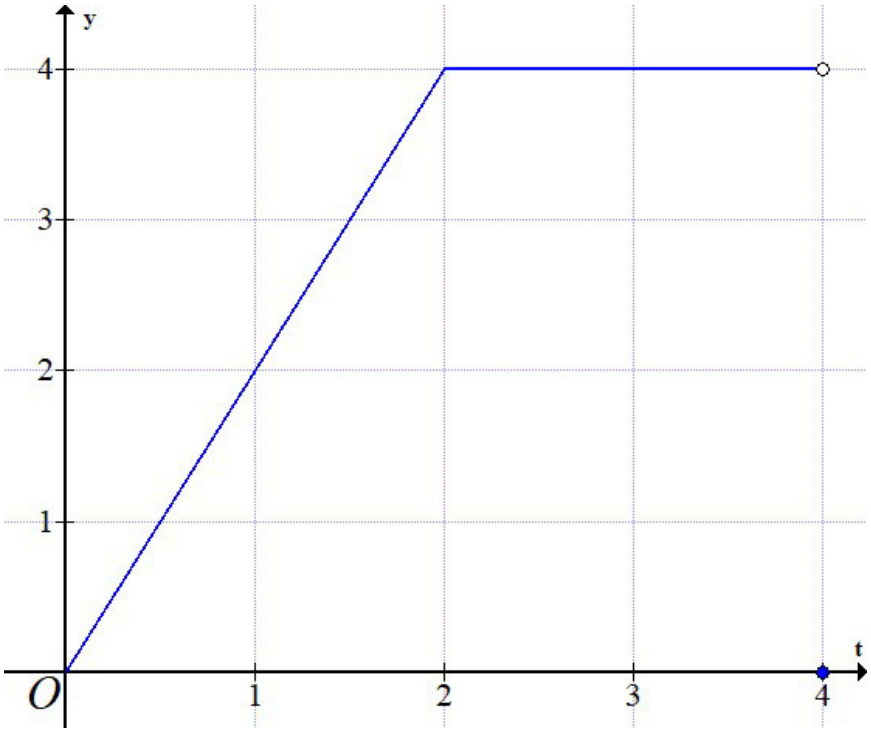
$$\frac{6^4}{4!}-\frac{3}{2}\cdot\frac{(-1)^4\cdot 2^{2\cdot 2}}{(2\cdot 2)!}=\frac{6^4-3\cdot 2^3}{4!}=\frac{1296-24}{24}=53.$$

26. 4-periodična funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(t)=\begin{cases}2\cdot t, & \text{za } t\in[0,2],\\ 4, & \text{za } t\in\langle 2,4\rangle.\end{cases}$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na segmentu $[0,4]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo graf funkcije f na segmentu $[0,4]$. Dobivamo sliku 1.



Slika 1.

Iz slike vidimo da funkcija f na segmentu $[0,4]$ ima točno jednu točku prekida prve vrste (to je $t=4$) i da nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[0,4]$ Fourierovim polinomom F_3 stupnja 3.

Rješenje: U ovome su slučaju $x_0 = 0$ i $T = 4$, pa računamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{4}\cdot\int_0^4 f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 f(t)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 f(t)\cdot \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot t\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 4\cdot \mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}\cdot\left(\left(t^2\right)\Big|_0^2 + (4\cdot t)\Big|_2^4\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(2^2 - 0^2 + 4\cdot(4-2)\right) = \frac{1}{4}\cdot 12 = 3,$$

$$a_n = \frac{2}{4}\cdot\int_0^4 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\int_0^2 2\cdot t\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + \int_2^4 4\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t\right) =$$

$$= \int_0^2 t\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + 2\cdot\int_2^4 \cos\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ x := \frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t \Leftrightarrow t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x, \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x, \\ 0 \mapsto 0, \\ 2 \mapsto n\cdot\pi, \\ 4 \mapsto 2\cdot n\cdot\pi \end{array}\right\}$$

$$= \int_0^{n\cdot\pi} \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x\cdot\cos x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \cos x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\int_0^{n\cdot\pi} x\cdot\cos x\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \cos x\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\left(\cos x + x\cdot\sin x\right)\Big|_0^{n\cdot\pi}\right) + \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\left(\sin x\right)\Big|_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos 0}_{=1} + \underbrace{0\cdot\sin 0}_{=0})\right) +$$

$$+ \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0} - \underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}\right) =$$

$$= \frac{4}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left((-1)^n - 1\right) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-8}{n^2\cdot\pi^2}, & \text{za neparne } n, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

$$b_n = \int_0^2 t\cdot\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t + 2\cdot\int_2^4 \sin\left(\frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ x := \frac{n\cdot\pi}{2}\cdot t \Leftrightarrow t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x, \\ \mathrm{d}t = \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x, \\ 0 \mapsto 0, \\ 2 \mapsto n\cdot\pi, \\ 4 \mapsto 2\cdot n\cdot\pi \end{array}\right\} =$$

$$= \int_0^{n\cdot\pi} \frac{2}{n\cdot\pi}\cdot x\cdot\sin x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \sin x\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\int_0^{n\cdot\pi} x\cdot\sin x\cdot \mathrm{d}x + 2\cdot\frac{2}{n\cdot\pi}\cdot\int_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi} \sin x\cdot \mathrm{d}x =$$

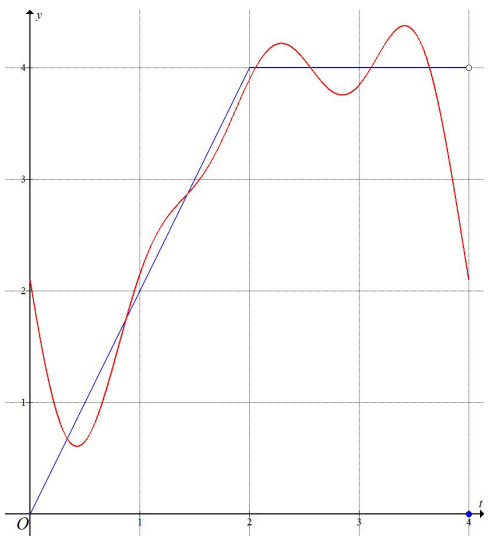
$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\left(\sin x - x\cdot\cos x\right)\Big|_0^{n\cdot\pi}\right) - \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\left(\cos x\right)\Big|_{n\cdot\pi}^{2\cdot n\cdot\pi}\right) =$$

$$= \left(\frac{2}{n\cdot\pi}\right)^2\cdot\left(\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} - (\underbrace{\sin 0}_{=0} - \underbrace{0\cdot\cos 0}_{=0})\right) -$$

$$-\frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left(\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1} - \underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}\right) = \frac{4}{n\cdot\pi}\cdot\left((-1)^{n+1} - 1 + (-1)^n\right) = \frac{-4}{n\cdot\pi},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Sada lako nalazimo da je traženi polinom (vidjeti sliku 2.):

$$F_3(t) = 3 - \frac{8}{\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) - \frac{4}{\pi}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot t\right) - \frac{2}{\pi}\cdot\sin\left(\pi\cdot t\right) - \frac{8}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\cdot t\right) -$$
$$-\frac{4}{3\cdot\pi}\cdot\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{2}\cdot t\right).$$



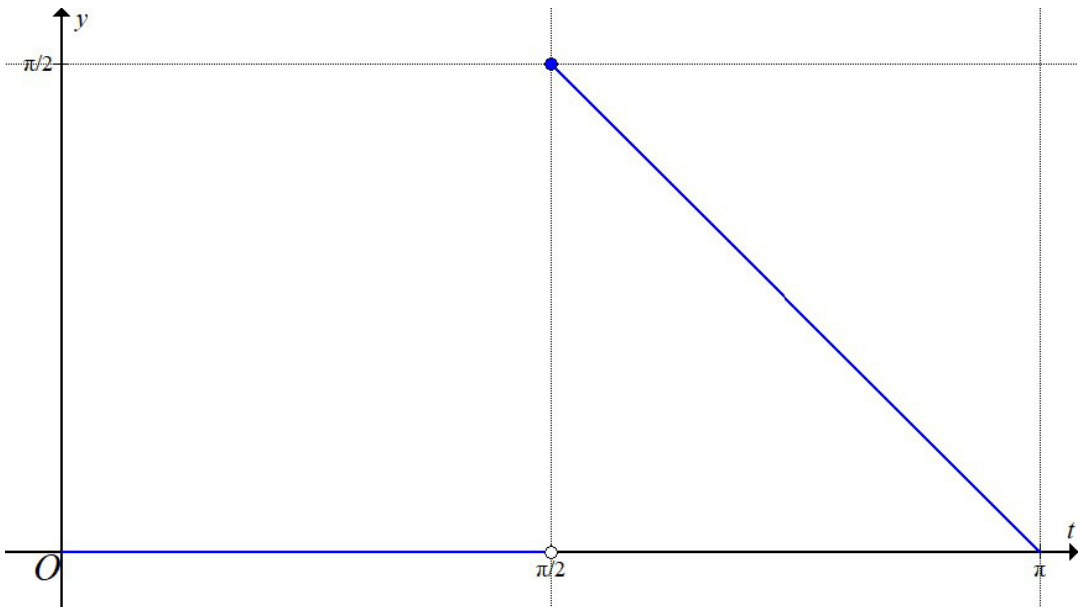
Slika 2.

27. π - periodična funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$f(t)=\begin{cases} 0, \text{ za } t\in\left\langle 0,\dfrac{\pi}{2}\right\rangle, \\ \pi-t, \text{ za } t\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]. \end{cases}$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na segmentu $[0,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo graf zadane funkcije na segmentu $[0,\pi]$. Dobivamo sliku 3.



Slika 3.

Iz slike vidimo da funkcija f na segmentu $[0,\pi]$ ima točno jednu točku prekida prve vrste (to je $t=\dfrac{\pi}{2}$) i da ima točno jednu točku strogoga lokalnoga ekstrema (to je točka $T=\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$). Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Aproksimirajte zadanu funkciju na segmentu $[0,\pi]$ Fourierovim polinomom F_4 stupnja 4.

Rješenje: U ovome su slučaju $x_0 = 0$ i $T = \pi$, pa računamo redom:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\left(\pi\cdot t - \frac{1}{2}\cdot t^2\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi^2 - \frac{1}{2}\cdot\pi^2 - \left(\pi\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi}{8},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot\cos\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{\pi}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot\cos(2\cdot n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x := \pi - t \Leftrightarrow t = \pi - x,\\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x,\\ \frac{\pi}{2} \mapsto \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \pi \mapsto \pi - \pi = 0\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(2\cdot n\cdot(\pi - x))\cdot \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot(\cos(2\cdot n\cdot x) + 2\cdot n\cdot x\cdot\sin(2\cdot n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n} + n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0} - (\underbrace{\cos 0}_{=1} + 0)\right) = \frac{(-1)^n - 1}{2\cdot\pi\cdot n^2} = \begin{cases}\frac{-1}{n^2\cdot\pi}, & \text{za neparne } n,\\ 0, & \text{inače.}\end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\pi} f(t)\cdot\sin\left(\frac{2\cdot n\cdot\pi}{\pi}\cdot t\right)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - t)\cdot\sin(2\cdot n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \left\{\begin{array}{l}\text{zamjena:}\\ x := \pi - t \Leftrightarrow t = \pi - x,\\ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x,\\ \frac{\pi}{2} \mapsto \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},\\ \pi \mapsto \pi - \pi = 0\end{array}\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(2\cdot n\cdot(\pi - x))\cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(2\cdot n\cdot x)\cdot \mathrm{d}x =$$

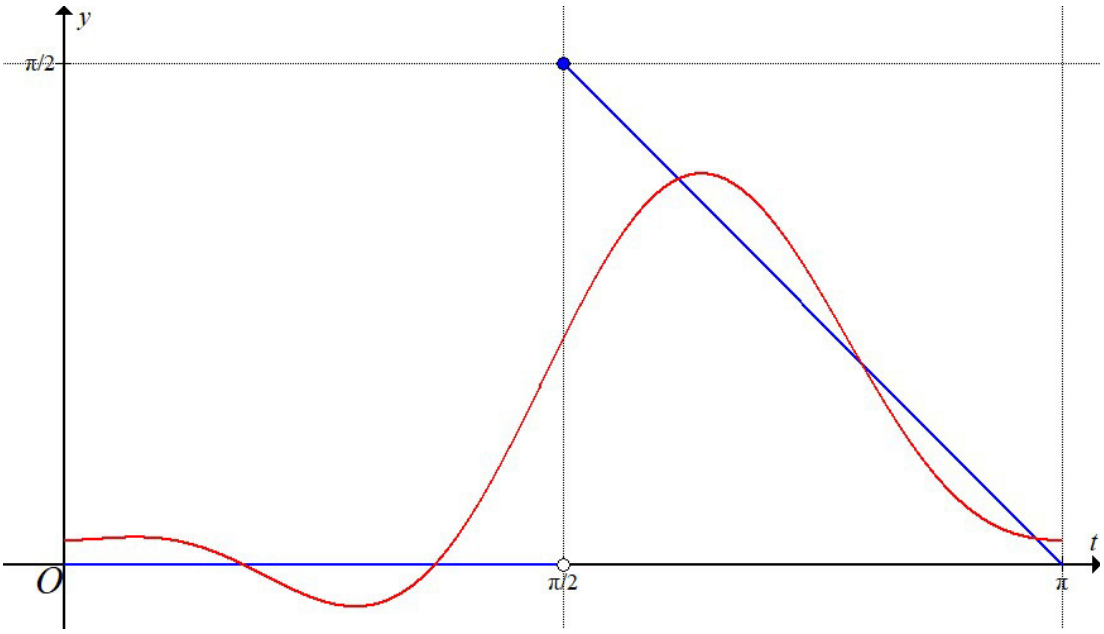
$$= \left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot(\sin(2\cdot n\cdot x) - 2\cdot n\cdot x\cdot\cos(2\cdot n\cdot x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) =$$

$$=\left(\frac{-2}{\pi}\right)\cdot\frac{1}{(2\cdot n)^2}\cdot\left(\underbrace{\sin(n\cdot\pi)}_{=0}-n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(n\cdot\pi)}_{=(-1)^n}-(\underbrace{\sin 0}_{=1}-0)\right)=\frac{2\cdot n\cdot\pi\cdot(-1)^n}{4\cdot\pi\cdot n^2}=\frac{(-1)^n}{2\cdot n},\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Budući da su članovi Fourierova reda oblika $a_n\cdot\cos(2\cdot n\cdot t)$, odnosno $b_n\cdot\sin(2\cdot n\cdot t)$, sve članove polinoma F_4 dobit ćemo uzimajući $n=1,2$. Tako imamo:

$$F_4(t)=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{\pi}\cdot\cos(2\cdot t)-\frac{1}{2}\cdot\sin(2\cdot t)+\frac{1}{4}\cdot\sin(4\cdot t).$$

Dobiveni Fourierov polinom prikazan je crvenom bojom na slici 4.



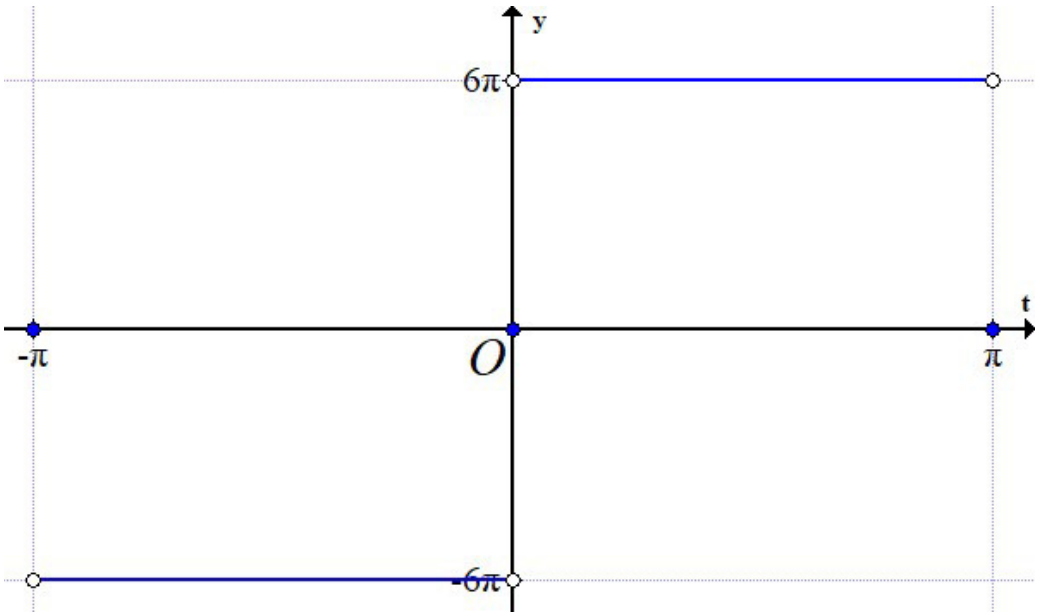
Slika 4.

28. Neparna $(2\cdot\pi)$-periodična realna funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$g(t)=6\cdot\pi,\ \text{za}\ t\in\langle 0,\pi\rangle.$$

a) Isključivo grafički provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo najprije graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 5.



Slika 5.

Iz slike 1. vidimo da na segmentu $[-\pi,\pi]$ zadana funkcija ima točno tri prekida $(t=-\pi,\ t=0\ \text{i}\ \ t=\pi)$, a nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Zbog toga vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Neka je P skup svih točaka prekida funkcije g na segmentu $[-\pi,\pi]$. Za svaki $p\in P$ izračunajte zbroj Fourierova reda funkcije g na tom segmentu.

Rješenje: Odmah imamo:

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to(-\pi)-}g(t)+\lim_{t\to\pi+}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-6\cdot\pi+6\cdot\pi)=0,$$

$$S(0)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to 0-}g(t)+\lim_{t\to 0}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-6\cdot\pi+6\cdot\pi)=0.$$

c) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rješenje: Prema pretpostavci, funkcija g je neparna. To znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo članove oblika $b_n \cdot \sin(n \cdot t),\ n \in \mathbb{N}$. Odredimo analitički izraz za Eulerove koeficijente:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 6 \cdot \pi \cdot \sin(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \cdot 6 \cdot \pi \cdot \int_0^{\pi} \sin(n \cdot t) \cdot \mathrm{d}t = 12 \cdot \left(\left(\left(-\frac{1}{n} \right) \cdot \cos(n \cdot t) \right) \Big|_0^{\pi} \right) =$$

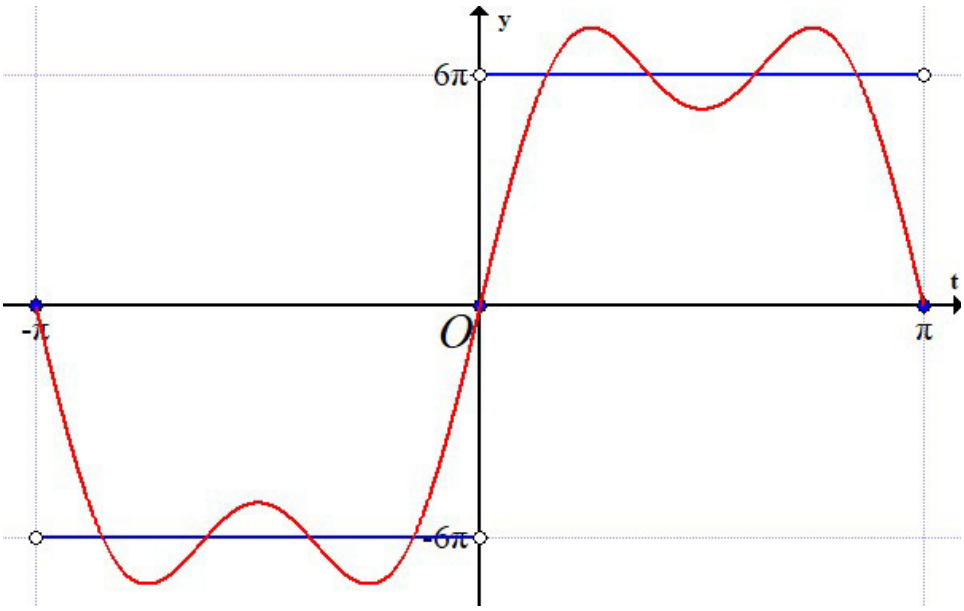
$$= \left(\frac{-12}{n} \right) \cdot \left((\cos(n \cdot t)) \Big|_0^{\pi} \right) = \frac{12 - 12 \cdot \cos(n \cdot \pi)}{n} = \begin{cases} \dfrac{24}{n}, & \text{za neparne } n, \\ 0, & \text{za parne } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow b_1 = 24,\ b_3 = 8.$$

Dakle, traženi polinom je:

$$F_3(t) = 24 \cdot \sin t + 8 \cdot \sin(3 \cdot t).$$

Vidjeti sliku 6.



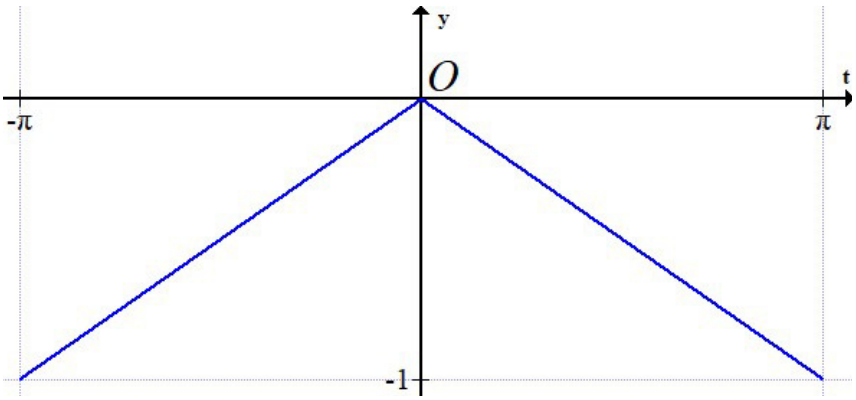
Slika 6.

29. **Parna** $(2\cdot\pi)$-periodična realna funkcija $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ima svojstvo:

$$g(t)=\frac{t}{\pi},\ \text{za } t\in[-\pi,0].$$

a) **Isključivo grafički** provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta na segmentu $[-\pi,\pi]$. Sve svoje tvrdnje precizno obrazložite.

Rješenje: Nacrtajmo najprije graf zadane funkcije na segmentu $[-\pi,\pi]$. Dobivamo sliku 7.



Slika 7.

Iz slike vidimo da je funkcija g neprekidna na zadanom segmentu i da na tom segmentu ima točno jednu točku strogoga lokalnoga ekstrema (ta je točka O). Dakle, vrijede oba Dirichletova uvjeta.

b) Funkciju g razvijemo u Fourierov red na zadanom segmentu. Izračunajte zbroj toga reda u svakom od krajeva segmenta.

Rješenje: Odmah imamo:

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{t\to(-\pi)-}g(t)+\lim_{t\to\pi+}g(t)\right)=\frac{1}{2}\cdot(-1+(-1))=-1.$$

c) Aproksimirajte zadanu funkciju Fourierovim polinomom 3. stupnja na segmentu $[-\pi,\ \pi]$.

Rješenje: Prema pretpostavci, funkcija g je parna. To znači da njezin razvoj u Fourierov red sadrži samo članove oblika $a_n\cdot\cos(n\cdot t),\ n\in\mathbb{N}_0$. Odredimo analitički izraz za Eulerove koeficijente Fourierova reda:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}g(t)\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{t}{\pi}\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}t\cdot\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(\left(\frac{1}{2}\cdot t^2\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\left(0-\frac{1}{2}\cdot\pi^2\right)=-\frac{1}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} g(t)\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\frac{t}{\pi}\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} t\cdot\cos(n\cdot t)\cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\cdot\left(\left(\frac{1}{n^2}\cdot\left(n\cdot t\cdot\sin t+\cos(n\cdot t)\right)\right)\Bigg|_{-\pi}^{0}\right) = \frac{2}{n^2\cdot\pi^2}\cdot\left(1-\underbrace{\cos(n\cdot(-\pi))}_{=\cos(n\cdot\pi)}\right) =$$

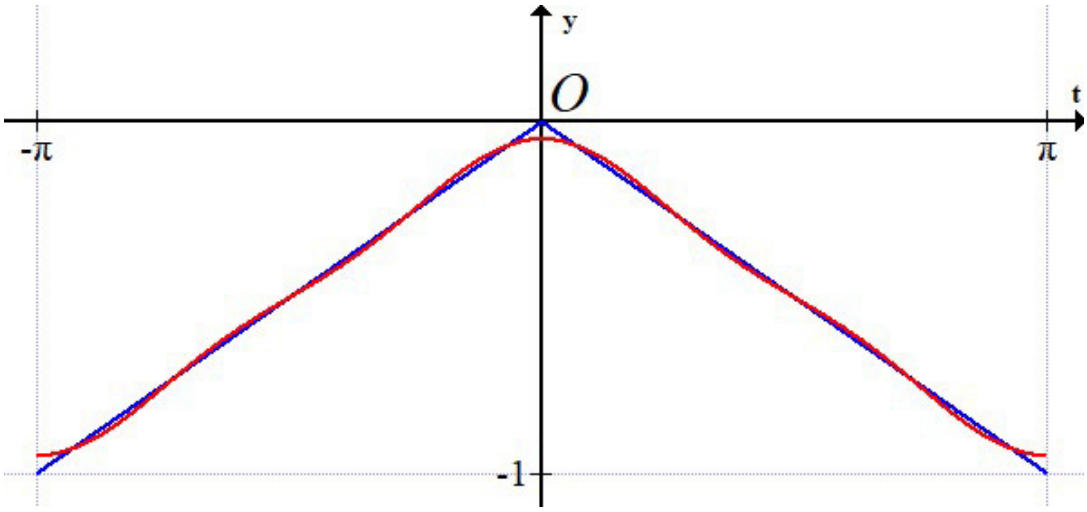
$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\cdot\pi^2}, & \text{za neparne } n\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{za parne } n\in\mathbb{N}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{4}{\pi^2},\ a_3 = \frac{4}{9\cdot\pi^2}.$$

Dakle, traženi polinom je:

$$F_3(t) = -\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\cdot\cos t+\frac{4}{9\cdot\pi^2}\cdot\cos(3\cdot t).$$

Vidjeti sliku 8.



Slika 8.

30. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ označimo s $\lfloor x \rfloor$ najveći cijeli broj jednak ili manji od x. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana pravilom:

$$f(x) = x - \lfloor x \rfloor \ .$$

a) Dokažite da je f periodična funkcija i odredite joj temeljni period.

Rješenje: Pretpostavimo da je P bilo koji period funkcije f. Budući da je $D(f) = \mathbb{R}$, onda $x \in D(f) \Rightarrow x + P \in D(f)$ (jer je zbroj dvaju realnih brojeva uvijek realan broj). Iz definicije perioda funkcije slijedi:

$$\begin{aligned} & f(x+P) = f(x) \Rightarrow \\ & x + P - \lfloor x + P \rfloor = x - \lfloor x \rfloor \Rightarrow \\ & P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor, \ \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Desna strana posljednje jednakosti je cijeli broj (jer je razlika dvaju cijelih brojeva), pa takva mora biti i lijeva strana. To znači da je $P \in \mathbb{Z}$. Nadalje, primijetimo da *neovisno o dobivenoj jednakosti* $P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor$, $\forall x \in \mathbb{R}$, vrijedi sljedeći „lanac“:

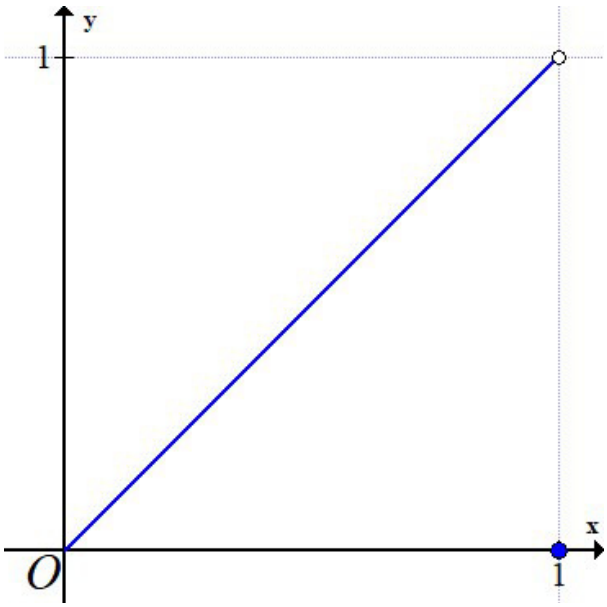
$$\begin{aligned} & \lfloor x \rfloor \le x < \lfloor x \rfloor + 1 \Leftrightarrow \\ & \lfloor x \rfloor + P \le x + P < \lfloor x \rfloor + 1 + P \Leftrightarrow \\ & \lfloor x + P \rfloor = \lfloor x \rfloor + P \Leftrightarrow \\ & \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor = P, \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall P \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Zbog toga je jednakost $+P = \lfloor x + P \rfloor - \lfloor x \rfloor$ istinita za svaki $P \in \mathbb{Z}$. Time smo dokazali da je f periodična i da je svaki cijeli broj njezin period. Temeljni period te funkcije je, prema definiciji, njezin najmanji strogo pozitivni period, pa odatle slijedi da je njezin temeljni period jednak najmanjem strogo pozitivnom cijelom broju, a taj je jednak 1.

Zaključimo: f je periodična s temeljnim periodom $T = 1$.

b) Nacrtajte graf funkcije f na segmentu $[0, 0+T]$, gdje je T temeljni period funkcije f. Provjerite valjanost Dirichletovih uvjeta za funkciju f na tom segmentu.

Rješenje: Vidjeti sliku 9. Graf funkcije f crtamo na segmentu $[0,1]$. Iz slike vidimo da na tom segmentu funkcija f ima točno jedan prekid (u točki $x = 1$) i da nema nijedan strogi lokalni ekstrem. Dakle, vrijede oba Dirichletova uvjeta.



Slika 9.

c) Odredite skup svih točaka prekida funkcije f. Nađite zbrojeve Fourierova reda za funkciju f na segmentu $[0, 0+T]$ za sve njezine točke prekida koje pripadaju tom segmentu.

Rješenje: Primijetimo da za svaki $k \in \mathbb{Z}$ vrijede jednakosti:

$$\lim_{x \to k-} f(x) = 1,$$
$$\lim_{x \to k+} f(x) = f(k) = 0.$$

Dakle, f ima prekid u svakoj cjelobrojnoj točki, pa je skup svih točaka prekida funkcije g jednak $\mathbb{Z}$.

U **a)** podzadatku smo dokazali da je $T = 1$. Cijeli brojevi koji pripadaju segmentu $[0,1]$ su 0 i 1. Tako odmah imamo:

$$S(0) = S(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \to 0+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) \right) = \frac{1}{2} \cdot (0+1) = \frac{1}{2}.$$

d) Aproksimirajte funkciju f na segmentu $[0, 0+T]$ Fourierovim polinomom čiji su članovi prva četiri člana pripadnoga Fourierova reda.

Rješenje: U **a)** podzadatku smo dokazali da je f 1-periodična funkcija. Također, za svaki $x \in [0,1\rangle$ je $\lfloor x \rfloor = 0$. Odatle slijedi da je

$$f(x) = x, \ \forall x \in [0,1\rangle.$$

Točka $x=1$ ne „kvari“ određeni integral funkcije f na segmentu $[0,1]$. Naime, funkcija f na segmentu $[0,1]$ je ograničena i ima konačno mnogo točaka prekida prve vrste, pa je integrabilna. Tako imamo redom:

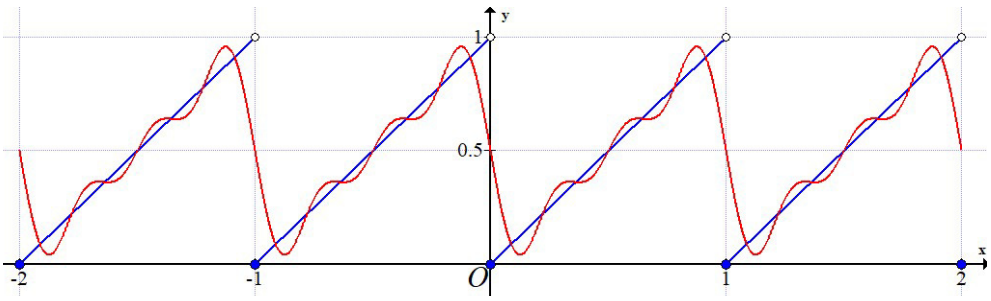
$$a_0=\int_0^1 x\cdot \mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot\left(\left(x^2\right)\Big|_0^1\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(1^2-0^2\right)=\frac{1}{2}\cdot(1-0)=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=2\cdot\int_0^1 x\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\&=2\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)+2\cdot n\cdot\pi\cdot x\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\right)\Big|_0^1\right)=\\&=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot\left(\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1}+2\cdot n\cdot\pi\cdot\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0}-(\underbrace{\cos 0}_{=1}+0)\right)=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(1-1)=0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=2\cdot\int_0^1 x\cdot\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\cdot\mathrm{d}x=\\&=2\cdot\left(\left(\frac{1}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot(\sin(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)-2\cdot n\cdot\pi\cdot x\cdot\cos(2\cdot n\cdot\pi\cdot x)\right)\Big|_0^1\right)=\\&=\frac{2}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}\cdot\left(\underbrace{\sin(2\cdot n\cdot\pi)}_{=0}-2\cdot n\cdot\pi\cdot\underbrace{\cos(2\cdot n\cdot\pi)}_{=1}-(\underbrace{\sin 0}_{=1}-0)\right)=\frac{-2^2\cdot n\cdot\pi}{(2\cdot n\cdot\pi)^2}=\frac{-1}{n\cdot\pi}.\end{aligned}$$

Tako konačno dobivamo (vidjeti sliku 10.):

$$F(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot x)-\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sin(4\cdot\pi\cdot x)-\frac{1}{3\cdot\pi}\cdot\sin(6\cdot\pi\cdot x).$$



Slika 10.