1. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je

$$y^2 = x^3 - C \cdot x,\ C \in \mathbb{R},$$

opće rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$2 \cdot x \cdot y \cdot y' - y^2 = 2 \cdot x^3.$$

Rješenje: Koristeći pravilo za deriviranje implicitno zadane funkcije imamo redom:

$$\begin{aligned} &\left(y^2\right)' = \left(x^3 - C \cdot x\right)' \Rightarrow \\ &2 \cdot y \cdot y' = 3 \cdot x^2 - C \quad / \cdot x \\ &2 \cdot x \cdot y \cdot y' = 3 \cdot x^3 - C \cdot x. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga izraza i polaznoga izraza za y^2 na lijevu stranu zadane jednadžbe slijedi:

$$3 \cdot x^3 - C \cdot x - \left(x^3 - C \cdot x\right) = 3 \cdot x^3 - C \cdot x - x^3 + C \cdot x = 2 \cdot x^3,$$

a to je upravo desna strana polazne jednadžbe. Time je tvrdnja zadatka dokazana.

2. **Isključivo deriviranjem** pokažite da je funkcija

$$y = 2021 \cdot e^x - (x - 2021)^2$$

partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y''' - y'' = 2.$$

Rješenje: Odredimo prve tri derivacije zadane funkcije. Imamo redom:

$$\begin{aligned} y' &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021) \cdot (x - 2021)' = \\ &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021) \cdot 1 \\ &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (x - 2021), \\ y'' &= 2021 \cdot e^x - 2 \cdot (1 - 0) = 2021 \cdot e^x - 2, \\ y''' &= 2021 \cdot e^x - 0 = 2021 \cdot e^x. \end{aligned}$$

Odatle odmah slijedi:

$$y''' - y'' = 2021 \cdot e^x - \left(2021 \cdot e^x - 2\right) = 2021 \cdot e^x - 2021 \cdot e^x + 2 = 2,$$

što je i trebalo dokazati.

3. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x\cdot(\sin y)\cdot y' + \cos y = 0, \\ y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x\cdot(\sin y)\cdot y' = -\cos y \Rightarrow$$
$$y' = \frac{-\cos y}{x\cdot\sin y} = \frac{-1}{x}\cdot\frac{\cos y}{\sin y} = \frac{-1}{x}\cdot\operatorname{ctg} y.$$

Vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = \frac{-1}{x},\ g(y) = \operatorname{ctg} y.$$

Sva rješenja jednadžbe $\operatorname{ctg} y = 0$ su $y = \dfrac{\pi}{2} + k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Nijedno od njih očito nije jednako $\dfrac{\pi}{3}$, pa slijedi:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\operatorname{ctg} y} = \int\frac{-1}{x}\cdot\mathrm{d}x + C \Rightarrow \int\operatorname{tg} y\cdot\mathrm{d}y = -\ln|x| + C \Rightarrow -\ln|\cos y| = -\ln|x| + C.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \dfrac{1}{2},\ y = \dfrac{\pi}{3}\right)$ dobivamo:

$$-\ln\left|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + C \Leftrightarrow -\ln\left|\frac{1}{2}\right| = -\ln\left|\frac{1}{2}\right| + C \Leftrightarrow C = 0.$$

Zbog toga je:

$$-\ln|\cos y| = -\ln|x| \Leftrightarrow |\cos y| = |x| \Rightarrow \cos y = x \Leftrightarrow y = \arccos x.$$

Apsolutne vrijednosti smo smjeli izbrisati jer iz početnoga uvjeta slijedi $\left|\dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ i $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2} > 0$. Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \arccos x.$$

4. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x^2 \cdot y' - 1 = y^2, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x^2 \cdot y' = y^2 + 1 \Rightarrow$$
$$y' = \frac{y^2+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \left(y^2+1\right).$$

Vidimo da se radi o običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda sa razdvojenim varijablama. Očitamo:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \; g(y) = y^2 + 1.$$

Polinom $g(y) = y^2 + 1$ očito nema realnih nultočaka, pa slijedi:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+1} = \int \frac{1}{x^2} \cdot \mathrm{d}x + C \Rightarrow \operatorname{arctg} y = \frac{-1}{x} + C.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 1, \; y = 0)$ dobivamo:

$$\operatorname{arctg} 0 = -\frac{1}{1} + C \Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Zbog toga je:

$$\operatorname{arctg} y = -\frac{1}{x} + 1 \Leftrightarrow y = \operatorname{tg}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \operatorname{tg}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

5. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' - 2 \cdot (\ln x) \cdot y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Rješenje: Podijelimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu s x. Dobivamo:

$$y' - 2 \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot y = 0.$$

Vidimo da se radi o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = -2 \cdot \frac{\ln x}{x},$$

pa slijedi:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int -2 \cdot \frac{\ln x}{x} \cdot \mathrm{d}x = (-2) \cdot \int \frac{\ln x}{x} \cdot \mathrm{d}x = \left\{ \begin{array}{l} \text{zamjena:} \\ t := \ln x, \\ \mathrm{d}t = (\ln x)' \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x \end{array} \right\} = (-2) \cdot \int t \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= (-2) \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 = -t^2 = -\ln^2 x,$$

$$y = C \cdot e^{-\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{-\left(-\ln^2 x\right)} = C \cdot e^{\ln^2 x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = y = 1)$ dobivamo:

$$1 = C \cdot e^{\ln^2 1} \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^{0^2} \Leftrightarrow 1 = C \cdot e^0 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = e^{\ln^2 x}.$$

Napomena: Vrijedi identitet:

$$e^{\ln^2 x} = e^{(\ln x) \cdot (\ln x)} \left(e^{\ln x}\right)^{\ln x} = x^{\ln x}, \ \forall x > 0.$$

Zbog toga rješenje zadatka možemo zapisati u obliku

$$y = x^{\ln x}.$$

6. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' + 2\cdot(\operatorname{ctg} x)\cdot y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Vidimo da se radi o homogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = 2\cdot \operatorname{ctg} x,$$

pa slijedi:

$$\int p(x)\cdot \mathrm{d}x = \int 2\cdot \operatorname{ctg} x\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot\int \operatorname{ctg} x\cdot \mathrm{d}x = 2\cdot \ln|\sin x|,$$

$$y = C\cdot e^{-2\cdot\ln|\sin x|} = C\cdot e^{\ln\left(|(\sin x)|^{-2}\right)} = C\cdot|\sin x|^{-2} = \frac{C}{|\sin x|^2} = \frac{C}{\sin^2 x}.$$

(U posljednjoj jednakosti smo koristili identitet

$$|x|^2 = x^2,\ \forall x\in\mathbb{R}.)$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \dfrac{\pi}{4},\ y = 2\right)$ dobivamo:

$$2 = \frac{C}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}\right)} \Leftrightarrow 2 = \frac{C}{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Leftrightarrow 2 = \frac{C}{\dfrac{1}{2}} \Leftrightarrow 2\cdot C = 2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Napomena: Koristili smo identitet:

$$e^{a\cdot\ln x} = x^a,\ \forall x > 0,\ \forall a\in\mathbb{R}.$$

7. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' + y - 1 = 3 \cdot x^2, \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$x \cdot y' + y = 3 \cdot x^2 + 1 \Rightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x + \frac{1}{x}.$$

Vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = \frac{1}{x},\ q(x) = 3 \cdot x + \frac{1}{x}.$$

Odredimo:

$$\int p(x) \cdot \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x = \ln x,$$

$$\int q(x) \cdot e^{\int p(x) \cdot \mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x = \int \left(3 \cdot x + \frac{1}{x}\right) \cdot e^{\ln x} \cdot \mathrm{d}x = \int \left(3 \cdot x + \frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \int 3 \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x + \int 1 \cdot \mathrm{d}x = x^3 + x,$$

$$y = e^{-\ln x} \cdot \left(x^3 + x + C\right) = e^{\ln\left(x^{-1}\right)} \cdot \left(x^3 + x + C\right) = x^{-1} \cdot \left(x^3 + x + C\right) = C \cdot x^{-1} + x^2 + 1.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 1,\ y = 2)$ dobivamo:

$$2 = C \cdot 1^{-1} + 1^2 + 1 \Leftrightarrow C + 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow C = 0.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = x^2 + 1.$$

Napomena: Koristili smo identitet:

$$e^{a \cdot \ln x} = x^a,\ \forall x > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$$

8. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \sin^2 x \cdot y' + \sin(2\cdot x)\cdot y = \cos x, \\ y\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right) = 0. \end{cases}$$

Rješenje: Koristit ćemo identitet $\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin x\cdot\cos x,\ \forall x\in\mathbb{R}$. Transformirajmo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu ovako:

$$\sin^2 x\cdot y' + 2\cdot\sin x\cdot\cos x\cdot y = \cos x \Rightarrow y' + \frac{2\cdot\sin x\cdot\cos x}{\sin^2 x}\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Rightarrow$$
$$y' + \frac{2\cdot\cos x}{\sin x}\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x} \Leftrightarrow y' + 2\cdot(\operatorname{ctg} x)\cdot y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo:

$$p(x) = 2\cdot\operatorname{ctg} x,\ q(x) = \frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Odredimo:

$$\int p(x)\cdot\mathrm{d}x = \int 2\cdot\operatorname{ctg} x\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\int\operatorname{ctg} x\cdot\mathrm{d}x = 2\cdot\ln(\sin x)$$
$$\int q(x)\cdot e^{\int p(x)\cdot\mathrm{d}x}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{2\cdot\ln(\sin x)}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot e^{\ln\left((\sin x)^2\right)}\cdot\mathrm{d}x = \int\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot\sin^2 x\cdot\mathrm{d}x =$$
$$= \int\cos x\cdot\mathrm{d}x = \sin x,$$
$$y = e^{-2\cdot\ln(\sin x)}\cdot\left(\sin x + C\right) = e^{\ln\left((\sin x)^{-2}\right)}\cdot\left(\sin x + C\right) = (\sin x)^{-2}\cdot\left(\sin x + C\right) =$$
$$= C\cdot(\sin x)^{-2} + (\sin x)^{-1} = \frac{C}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $\left(x = \frac{3}{2}\cdot\pi,\ y = 0\right)$ dobivamo:

$$0 = \frac{C}{\sin^2\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{3}{2}\cdot\pi\right)} \Leftrightarrow 0 = C - 1 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} = \frac{1+\sin x}{\sin^2 x}.$$

9. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y' + 2\cdot y = (x\cdot y)^2, \\ y(0) = 4. \end{cases}$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y' + 2\cdot y = x^2\cdot y^2.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$p(x) = 2,\ q(x) = x^2,\ k = 2.$$

Odredimo:

$$g(x) = e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x} = e^{(1-2)\cdot\int 2\cdot \mathrm{d}x} = e^{(-2)\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}x} = e^{-2\cdot x},$$

$$y^{2-1} = \frac{e^{-2\cdot x}}{(1-2)\cdot\left(\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C} = \frac{e^{-2\cdot x}}{(-1)\cdot\left(\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C}.$$

Preostalu standardnu antiderivaciju odredimo dvostrukom primjenom metode djelomične integracije. Imamo redom:

$$\int x^2\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left| \begin{matrix} u = x^2 & v = \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cdot e^{-2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = 2\cdot x\cdot \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 2\cdot \int x\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} + \int x\cdot e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x & v = \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \frac{-1}{2}\cdot e^{-2\cdot x} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x & \mathrm{d}v = e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x \end{matrix} \right| = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} + \left(\frac{-1}{2}\right)\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot \int e^{-2\cdot x}\cdot \mathrm{d}x =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot e^{-2\cdot x} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x}.$$

Zbog toga je:

$$y = \frac{e^{-2\cdot x}}{(-1)\cdot\left(\frac{-1}{2}\cdot x^2\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{2}\cdot x\cdot e^{-2\cdot x} - \frac{1}{4}\cdot e^{-2\cdot x}\right)+C}\cdot\frac{4\cdot e^{2\cdot x}}{4\cdot e^{2\cdot x}} =$$

$$=\frac{4}{2\cdot x^2+x+1+4\cdot C\cdot e^{2\cdot x}}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x=0,\ y=4)$ dobivamo:

$$4=\frac{4}{2\cdot 0^2+0+1+4\cdot C\cdot e^{2\cdot 0}}\Leftrightarrow 4=\frac{4}{4\cdot C+1}\Leftrightarrow 4\cdot C+1=1\Leftrightarrow C=0.$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y=\frac{4}{2\cdot x^2+x+1}.$$

10. Riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'-2\cdot y=2\cdot e^x\cdot\sqrt{y}, \\ y(0)=0. \end{cases}$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'-2\cdot y=2\cdot e^x\cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

Vidimo da se radi o Bernoullijevoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi. Očitamo:

$$p(x)=-2,\ q(x)=2\cdot e^x,\ k=\frac{1}{2}.$$

Odredimo:

$$g(x)=e^{(1-k)\cdot\int p(x)\cdot \mathrm{d}x}=e^{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\int(-2)\cdot \mathrm{d}x}=e^{\frac{1}{2}\cdot(-2)\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}x}=e^{(-1)\cdot x}=e^{-x},$$

$$y^{\frac{1}{2}-1}=\frac{e^{-x}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\int 2\cdot e^{x\cdot}\cdot e^{-x}\cdot \mathrm{d}x\right)+C}=\frac{e^{-x}}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\left(\int 1\cdot \mathrm{d}x\right)+C}=\frac{e^{-x}}{x+C}\Rightarrow$$

$$y^{\frac{-1}{2}}=\frac{e^{-x}}{x+C}\quad /^{-2}$$

$$y=\left(\frac{e^{-x}}{x+C}\right)^{-2}=\left(e^{-x}\cdot(x+C)^{-1}\right)^{-2}=\left(e^{-x}\right)^{-2}\cdot\left((x+C)^{-1}\right)^{-2}=e^{2\cdot x}\cdot(x+C)^2.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x=y=0)$ odmah slijedi $C=0$. Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y=x^2\cdot e^{2\cdot x}.$$

11. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' - y' - 12 \cdot y = 0, \\ y(\ln 2) = \dfrac{63}{4}, \\ y(-\ln 2) = -\dfrac{255}{16}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 - k - 12 = 0.$$

Njezina su rješenja $k_1 = -3,\ k_2 = 4.$ Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = C_1 \cdot e^{-3 \cdot t} + C_2 \cdot e^{4 \cdot t} \quad .$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot \ln 2} + C_2 \cdot e^{4 \cdot \ln 2}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot (-\ln 2)} + C_2 \cdot e^{4 \cdot (-\ln 2)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot e^{\ln\left(2^{-3}\right)} + C_2 \cdot e^{\ln\left(2^{4}\right)}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot e^{\ln\left(2^{3}\right)} + C_2 \cdot e^{\ln\left(2^{-4}\right)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{63}{4} = C_1 \cdot 2^{-3} + C_2 \cdot 2^{4}, \\ \dfrac{-255}{16} = C_1 \cdot 2^{3} + C_2 \cdot 2^{-4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1 + 128 \cdot C_2 = 126, \\ 128 \cdot C_1 + C_2 = -255 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (C_1, C_2) = (-2, 1).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = e^{4 \cdot t} - 2 \cdot e^{-3 \cdot t}.$$

12. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' + 10 \cdot y' + 25 \cdot y = 0, \\ y(3) = e^{-15}, \\ y(-3) = -5 \cdot e^{15}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 + 10 \cdot k + 25 = 0.$$

Njezino jedinstveno rješenje je $k = -5$. Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = (C_1 \cdot t + C_2) \cdot e^{-5 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} e^{-15} = (3 \cdot C_1 + C_2) \cdot e^{-5 \cdot 3}, \\ -5 \cdot e^{15} = (-3 \cdot C_1 + C_2) \cdot e^{-5 \cdot (-3)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 3 \cdot C_1 + C_2 = 1, \\ -3 \cdot C_1 + C_2 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (C_1, C_2) = (1, -2).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = (t - 2) \cdot e^{-5 \cdot t}.$$

13. Uz pretpostavku $y = y(t)$ riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'' + 4 \cdot y' + 29 \cdot y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -e^{-\pi}, \\ y(\pi) = -2 \cdot e^{-2 \cdot \pi}. \end{cases}$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba je:

$$k^2 + 4 \cdot k + 29 = 0.$$

Njezino rješenje sa strogo pozitivnim imaginarnim dijelom je $k = -2 + 5 \cdot i$. Zbog toga je opće rješenje polazne jednadžbe

$$y = (C_1 \cdot \cos(5 \cdot t) + C_2 \cdot \sin(5 \cdot t)) \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo:

$$\begin{cases} -e^{-\pi} = \left(C_1 \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + C_2 \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} \right) \cdot e^{(-2) \cdot \frac{\pi}{2}}, \\ -2 \cdot e^{-2 \cdot \pi} = \left(C_1 \cdot \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + C_2 \cdot \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \right) \cdot e^{(-2) \cdot \pi}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_2 = -1, \\ -C_1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1, C_2) = (2, -1).$$

Dakle, rješenje zadatka je funkcija

$$y = (2 \cdot \cos(5 \cdot t) - \sin(5 \cdot t)) \cdot e^{-2 \cdot t}.$$

14. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - y' + y = x^2.$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 - k + 1 = 0.$$

Lako se vidi da 0 nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe polinom 2. stupnja. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku polinoma 2. stupnja, tj. u obliku:

$$y_p = A \cdot x^2 + B \cdot x + C.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot x + B,$$
$$y_p'' = 2 \cdot A.$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$2 \cdot A - (2 \cdot A \cdot x + B) + \left(A \cdot x^2 + B \cdot x + C\right) = x^2 \Leftrightarrow$$
$$A \cdot x^2 + (-2 \cdot A + B) \cdot x + (2 \cdot A - B + C) = x^2 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} A = 1, \\ -2 \cdot A + B = 0, \\ 2 \cdot A - B + C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C) = (1, 2, 0).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = x^2 + 2 \cdot x.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right)\right) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x} + x^2 + 2 \cdot x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

15. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$2\cdot y'' + 3\cdot y' + 18\cdot x = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$2\cdot y'' + 3\cdot y' = -18\cdot x.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$2\cdot k^2 + 3\cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je 0 jednostruko rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe polinom 1. stupnja. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = x^1\cdot\left(A\cdot x + B\right) = A\cdot x^2 + B\cdot x.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2\cdot A\cdot x + B,$$
$$y_p'' = 2\cdot A.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
&2\cdot(2\cdot A) + 3\cdot(2\cdot A\cdot x + B) = -18\cdot x \Leftrightarrow\\
&6\cdot A\cdot x + (4\cdot A + 3\cdot B) = -18\cdot x \Leftrightarrow\\
&\begin{cases} 6\cdot A = -18, \\ 4\cdot A + 3\cdot B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow\\
&(A, B) = (-3, 4).
\end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = -3\cdot x^2 + 4\cdot x.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1\cdot e^{\frac{-3}{2}\cdot x} + x^2 + 2\cdot x + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

16. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4 \cdot y' + 7 \cdot y = 19 \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + 4 \cdot k + 7 = 0.$$

Lako se vidi da 2 nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot e^{2 \cdot t}$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t},$$
$$y_p'' = 4 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
&4 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t} + 4 \cdot \left(2 \cdot A \cdot e^{2 \cdot t}\right) + 7 \cdot \left(A \cdot e^{2 \cdot t}\right) = 19 \cdot e^{2 \cdot t} \Leftrightarrow \\
&4 \cdot A + 8 \cdot A + 7 \cdot A = 19 \Leftrightarrow \\
&19 \cdot A = 19 \Leftrightarrow \\
&A = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = e^{2 \cdot t}.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\sqrt{3} \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\sqrt{3} \cdot t\right)\right) \cdot e^{-2 \cdot t} + e^{2 \cdot t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

17. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + 4 \cdot y' + 4 \cdot e^{-4 \cdot t} = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku:

$$y'' + 4 \cdot y' = -4 \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + 4 \cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je –4 jednostruko rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot e^{-4 \cdot t}$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = t^1 \cdot \left(A \cdot e^{-4 \cdot t} \right) = A \cdot t \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = A \cdot e^{-4 \cdot t} + A \cdot t \cdot (-4) \cdot e^{-4 \cdot t} = (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot e^{-4 \cdot t},$$
$$y_p'' = -4 \cdot A \cdot e^{-4 \cdot t} + (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot (-4) \cdot e^{-4 \cdot t} = (16 \cdot A \cdot t - 8 \cdot A) \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$\begin{aligned}
&(16 \cdot A \cdot t - 8 \cdot A) \cdot e^{-4 \cdot t} + 4 \cdot (-4 \cdot A \cdot t + A) \cdot e^{-4 \cdot t} = -4 \cdot e^{-4 \cdot t} \Leftrightarrow \\
&-8 \cdot A + 4 \cdot A = -4 \Leftrightarrow \\
&(-4) \cdot A = -4 \Leftrightarrow \\
&A = 1.
\end{aligned}$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = t \cdot e^{-4 \cdot t}.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = (t + C_1) \cdot e^{-4 \cdot t} + C_2,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

18. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y' + y + 13 \cdot \sin(2 \cdot t) = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'' + y' + y = -13 \cdot \sin(2 \cdot t).$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + k + 1 = 0.$$

Lako se vidi da $2 \cdot i$ nije rješenje te jednadžbe i da je desna strana polazne jednadžbe funkcija oblika $E \cdot \sin(2 \cdot t)$. Zbog toga traženo partikularno rješenje tražimo u obliku:

$$y_p = A \cdot \cos(2 \cdot t) + B \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot B \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot t),$$
$$y_p'' = -4 \cdot B \cdot \sin(2 \cdot t) - 4 \cdot A \cdot \cos(2 \cdot t).$$

Uvrštavanjem ovih triju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$-4 \cdot B \cdot \sin(2 \cdot t) - 4 \cdot A \cdot \cos(2 \cdot t) + 2 \cdot B \cdot \cos(2 \cdot t) - 2 \cdot A \cdot \sin(2 \cdot t) + A \cdot \cos(2 \cdot t) +$$
$$+ B \cdot \sin(2 \cdot t) = -13 \cdot \sin(2 \cdot t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -3 \cdot A + 2 \cdot B = 0, \\ -2 \cdot A - 3 \cdot B = -13 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B) = (2, 3).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = 2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot t).$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = \left(C_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t \right) + C_2 \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t \right) \right) \cdot e^{\frac{-1}{2} \cdot t} + 2 \cdot \cos(2 \cdot t) + 3 \cdot \sin(2 \cdot t),\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

19. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' + y' + 2\cdot\left(e^x - \cos x\right) = 0.$$

Rješenje: Zapišimo zadanu običnu diferencijalnu jednadžbu u obliku:

$$y'' + y' = 2\cdot\cos x - 2\cdot e^x.$$

Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 + k = 0.$$

Lako se vidi da 1 i $1\cdot i = i$ nisu rješenja te jednadžbe. Desna strana polazne jednadžbe je funkcija oblika $E_1\cdot\cos x + E_2\cdot e^x$. Primjenom načela superpozicije zaključujemo da partikularno rješenje treba tražiti u obliku:

$$y_p = A\cdot\cos x + B\cdot\sin x + C\cdot e^x.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = -A\cdot\sin x + B\cdot\cos x + C\cdot e^x,$$
$$y_p'' = -A\cdot\cos x - B\cdot\sin x + C\cdot e^x.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$-A\cdot\cos x - B\cdot\sin x + C\cdot e^x + \left(-A\cdot\sin x + B\cdot\cos x + C\cdot e^x\right) = 2\cdot\cos x - 2\cdot e^x \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -A + B = 2, \\ -A - B = 0, \\ 2\cdot C = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C) = (-1, 1, 1).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = \sin x - \cos x - e^x.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1\cdot e^{-x} + C_2 + \sin x - \cos x - e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

20. Nađite neko partikularno rješenje obične diferencijalne jednadžbe

$$y'' - 2 \cdot y' = 20 \cdot (t + \sin t).$$

Rješenje: Pripadna karakteristična jednadžba glasi:

$$k^2 - 2 \cdot k = 0.$$

Lako se vidi da je 0 rješenje te jednadžbe, kao i da $1 \cdot i = i$ nije njezino rješenje. Desna strana polazne jednadžbe je funkcija oblika $E_1 \cdot t + E_2 \cdot \sin t$. Primjenom načela superpozicije zaključujemo da partikularno rješenje treba tražiti u obliku:

$$y_p = x \cdot (A \cdot t + B) + C \cdot \cos t + D \cdot \sin t = A \cdot t^2 + B \cdot t + C \cdot \cos t + D \cdot \sin t.$$

Odredimo prve dvije derivacije ovoga izraza:

$$y_p' = 2 \cdot A \cdot t + B - C \cdot \sin t + D \cdot \cos t,$$
$$y_p'' = 2 \cdot A - C \cdot \cos t - D \cdot \sin t.$$

Uvrštavanjem ovih dvaju izraza u polaznu jednadžbu dobivamo:

$$2 \cdot A - C \cdot \cos t - D \cdot \sin t - 2 \cdot \left(2 \cdot A \cdot t + B - C \cdot \sin t + D \cdot \cos t\right) = 20 \cdot (t + \sin t) \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} -4 \cdot A = 20, \\ 2 \cdot A - 2 \cdot B = 0, \\ 2 \cdot C - D = 20, \\ -C - 2 \cdot D = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(A, B, C, D) = (-5, -5, 8, -4).$$

Dakle, traženo partikularno rješenje je:

$$y_p = (-5) \cdot t^2 - 5 \cdot t + 8 \cdot \cos t - 4 \cdot \sin t.$$

Napomena: Partikularno rješenje je i svaki izraz dobiven uvrštavanjem „konkretnih“ realnih brojeva umjesto konstanti C_1 i C_2 u opće rješenje polazne jednadžbe. To opće rješenje u ovom je slučaju

$$y = C_1 \cdot e^{2 \cdot t} - 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C_2 + 8 \cdot \cos t - 4 \cdot \sin t,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

21. Odredite Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom:

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ za } t \in [0,6\rangle, \\ 2\cdot t, \text{ za } t \geq 6. \end{cases}$$

Rješenje: Koristeći definiciju Laplaceova transformata imamo redom:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t - \int_0^6 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t + \underbrace{\int_0^6 0\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t}_{=0} = 2\cdot \underbrace{\mathcal{L}(\{t\})}_{=\frac{1}{s^2}} - \int_0^6 2\cdot t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t + 0 =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \int_0^6 t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t = \left| \begin{matrix} u = t & v = \int e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t = \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-s\cdot t} \\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}t & \mathrm{d}v = e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \left(\left(-\frac{1}{s}\cdot t\cdot e^{-s\cdot t} \right)\Bigg|_0^6 - \int_0^6 \left(-\frac{1}{s}\right)\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} - 2\cdot \left(-\frac{1}{s}\cdot 6\cdot e^{-6\cdot s} - 0 + \frac{1}{s}\cdot \int_0^6 e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} - \frac{2}{s}\cdot \left(\left(\frac{-1}{s}\cdot e^{-s\cdot t} \right)\Bigg|_0^6 \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} - \frac{2}{s}\cdot \left(\frac{-1}{s}\cdot e^{-6\cdot s} - \left(-\frac{1}{s}\cdot 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{2}{s^2} + \frac{12\cdot e^{-6\cdot s}}{s} + \frac{2\cdot e^{-6\cdot s}}{s^2} - \frac{2}{s^2} =$$

$$= 2\cdot \left(\frac{6\cdot s + 1}{s^2} \right)\cdot e^{-6\cdot s}.$$

Napomena: Koristeći identitet

$$\int x\cdot e^{a\cdot x}\cdot \mathrm{d}x = \left(\frac{a\cdot x - 1}{a^2} \right)\cdot e^{a\cdot x} + C, \ \forall a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}, \ \forall C \in \mathbb{R},$$

dobivamo:

$$\int_0^6 t\cdot e^{-s\cdot t}\cdot \mathrm{d}t = \left(\left(\left(\frac{-s\cdot t - 1}{s^2} \right)\cdot e^{-s\cdot t} \right)\Bigg|_0^6 \right) = \frac{-6\cdot s - 1}{s^2}\cdot e^{-6\cdot s} + \frac{1}{s^2},$$

s istim konačnim rezultatom.

22. Odredite Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom:

$$f(t) = \begin{cases} 5, & \text{za } t \in [0,8], \\ 10, & \text{za } t > 8. \end{cases}$$

Rješenje: Koristeći definiciju Laplaceova transformata imamo redom:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} 10 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t - \int_0^8 10 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t + \int_0^8 5 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t = 10 \cdot \underbrace{\mathcal{L}(\{1\})}_{=\frac{1}{s}} + \int_0^8 (5-10) \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \int_0^8 1 \cdot e^{-s\cdot t} \cdot \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \left(\left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-s\cdot t} \right) \Big|_0^8 \right) =$$

$$= \frac{10}{s} - 5 \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-8\cdot s} - \left(-\frac{1}{s} \cdot 1 \right) \right) =$$

$$= \frac{10}{s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-8\cdot s} - \frac{5}{s} =$$

$$= \frac{5}{s} + \frac{5}{s} \cdot e^{-8\cdot s} =$$

$$= \frac{5}{s} \cdot \left(1 + e^{-8\cdot s}\right).$$

Napomena: Neka su $a,b,c \in \mathbb{R}$ takvi da je $a < b$ i $c > 0$. Za vježbu dokažite da je Laplaceov transformat $F = F(s)$ funkcije $f:[0,+\infty\rangle \to \mathbb{R}$ definirane pravilom

$$f(t) = \begin{cases} a, & \text{za } t \in [0,c], \\ b, & \text{za } t > c \end{cases}$$

dan pravilom

$$F(s) = \frac{a + (b-a) \cdot e^{-c\cdot s}}{s}.$$

Vrijedi li tvrdnja ako $[0,c]$ zamijenimo s $[0,c\rangle$, a $t > c$ s $t \geq c$? Objasnite svoj odgovor.

Uputa: Postupite analogno kao u rješenju zadatka 22. Tvrdnja vrijedi i u navedenom slučaju jer vrijednost integrabilne funkcije u točno jednoj točki (zapravo, rubu područja integracije) nema utjecaja na vrijednost određenoga integrala.

23. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - y = 2 \cdot e^x, \\ y(0) = 6, \\ y'(0) = 7. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned} & y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - 6 \cdot s - 7, \\ & y \mapsto F(s), \\ & e^x \mapsto \frac{1}{s-1}, \end{aligned}$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$\begin{aligned} & s^2 \cdot F(s) - 6 \cdot s - 7 - F(s) = 2 \cdot \frac{1}{s-1}, \\ & F(s) \cdot \left(s^2 - 1\right) = \frac{2}{s-1} + 6 \cdot s + 7, \\ & F(s) \cdot (s-1) \cdot (s+1) = \frac{2 + (6 \cdot s + 7) \cdot (s-1)}{s-1}, \\ & F(s) = \frac{2 + 6 \cdot s^2 + 7 \cdot s - 6 \cdot s - 7}{(s-1) \cdot (s-1) \cdot (s+1)}, \\ & F(s) = \frac{6 \cdot s^2 + s - 5}{(s-1)^2 \cdot (s+1)}. \end{aligned}$$

Rastavimo brojnik posljednjega razlomka na faktore. Riješimo jednadžbu $6 \cdot s^2 + s - 5 = 0$. Dobivamo $s_1 = -1$, $s_2 = \frac{5}{6}$. Prema osnovnom teoremu algebre slijedi:

$$6 \cdot s^2 + s - 5 = 6 \cdot (s - (-1)) \cdot \left(s - \frac{5}{6}\right) = (s+1) \cdot (6 \cdot s - 5).$$

Zbog toga je

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{(s+1) \cdot (6 \cdot s - 5)}{(s-1)^2 \cdot (s+1)} = \frac{6 \cdot s - 5}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot s - 6 + 1}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot s - 6}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \frac{6 \cdot (s-1)}{(s-1)^2} + \frac{1}{(s-1)^2} = \\ &= \frac{6}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} = 6 \cdot \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}. \end{aligned}$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako dobivamo konačno rješenje:

$$y = 6 \cdot e^x + x \cdot e^x = (x+6) \cdot e^x.$$

24. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + 4 \cdot y = 16 \cdot t, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot (-1) - 4 = s^2 \cdot F(s) + s - 4,$$
$$y \mapsto F(s),$$
$$t \mapsto \frac{1}{s^2},$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$s^2 \cdot F(s) + s - 4 + 4 \cdot F(s) = 16 \cdot \frac{1}{s^2},$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 4\right) = \frac{16}{s^2} - s + 4,$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 4\right) = \frac{16 - s^3 + 4 \cdot s^2}{s^2},$$
$$F(s) = \frac{-s^3 + 4 \cdot s^2 + 16}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} = \frac{-s^3}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} + \frac{4 \cdot s^2 + 16}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} = \frac{-s}{s^2 + 4} + \frac{4 \cdot \left(s^2 + 4\right)}{s^2 \cdot \left(s^2 + 4\right)} =$$
$$= \frac{-s}{s^2 + 4} + \frac{4}{s^2} = 4 \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{s}{s^2 + 2^2}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako dobivamo konačno rješenje:

$$y = 4 \cdot t - \cos(2 \cdot t).$$

25. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' + 2 \cdot y' = \sin t - 2 \cdot \cos t, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -3. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$y'' \mapsto s^2 \cdot F(s) - s \cdot y(0) - y'(0) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot 1 - (-3) = s^2 \cdot F(s) - s + 3,$$
$$y' \mapsto s \cdot F(s) - y(0) = s \cdot F(s) - 1,$$
$$\sin t \mapsto \frac{1}{s^2+1},$$
$$\cos t \mapsto \frac{s}{s^2+1},$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$s^2 \cdot F(s) - s + 3 + 2 \cdot (s \cdot F(s) - 1) = \frac{1}{s^2+1} - 2 \cdot \frac{s}{s^2+1},$$
$$s^2 \cdot F(s) - s + 3 + 2 \cdot s \cdot F(s) - 2 = \frac{1 - 2 \cdot s}{s^2+1},$$
$$F(s) \cdot \left(s^2 + 2 \cdot s\right) = \frac{1 - 2 \cdot s}{s^2+1} + s - 1,$$
$$F(s) \cdot \left(s \cdot (s+2)\right) = \frac{1 - 2 \cdot s + (s-1) \cdot \left(s^2+1\right)}{s^2+1},$$
$$F(s) = \frac{1 - 2 \cdot s + s^3 - s^2 + s - 1}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)},$$
$$F(s) = \frac{s^3 - s^2 - s}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)} = \frac{s \cdot \left(s^2 - s - 1\right)}{\left(s^2+1\right) \cdot s \cdot (s+2)} = \frac{s^2 - s - 1}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} = \frac{s^2 + 1 - s - 2}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} =$$
$$= \frac{s^2+1}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} - \frac{s+2}{\left(s^2+1\right) \cdot (s+2)} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{s-(-2)} - \frac{1}{s^2+1^2}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako odredimo konačno rješenje:

$$y = e^{-2 \cdot t} - \sin t.$$

26. Isključivo pomoću Laplaceovih transformata riješite Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} y'' - 2\cdot y' + 2\cdot y = e^x, \\ y(0) = y'(0) = 2. \end{cases}$$

Rješenje: Odredimo Laplaceov transformat svakoga člana zadane jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&y'' \mapsto s^2\cdot F(s) - s\cdot y(0) - y'(0) = s^2\cdot F(s) - s\cdot 2 - 2 = s^2\cdot F(s) - 2\cdot s - 2,\\
&y' \mapsto s\cdot F(s) - y(0) = s\cdot F(s) - 2,\\
&y \mapsto F(s)\\
&e^x \mapsto \frac{1}{s-1},
\end{aligned}$$

pa uvrstimo dobivene izraze umjesto njihovih originala u jednadžbu:

$$\begin{aligned}
&s^2\cdot F(s) - 2\cdot s - 2 - 2\cdot(s\cdot F(s) - 2) + 2\cdot F(s) = \frac{1}{s-1},\\
&F(s)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) = \frac{1}{s-1} + 2\cdot s - 2,\\
&F(s)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) = \frac{1 + (s-1)\cdot(2\cdot s - 2)}{s-1},\\
&F(s) = \frac{1 + 2\cdot s^2 - 2\cdot s - 2\cdot s + 2}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)} = \frac{2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)}.
\end{aligned}$$

Rastavimo ovu racionalnu funkciju na parcijalne razlomke. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3}{(s-1)\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B\cdot s + C}{s^2 - 2\cdot s + 2} \Rightarrow\\
&2\cdot s^2 - 4\cdot s + 3 = A\cdot\left(s^2 - 2\cdot s + 2\right) + (B\cdot s + C)\cdot(s-1) \Rightarrow\\
&\begin{cases} s = 1 \Rightarrow A = 1, \\ s = 0 \Rightarrow 2\cdot A - C = 3, \\ s = -1 \Rightarrow 5\cdot A + 2\cdot B - 2\cdot C = 9 \end{cases} \Leftrightarrow (A, B, C) = (1, 1, -1).
\end{aligned}$$

Zbog toga je

$$F(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{s^2 - 2\cdot s + 2} = \frac{1}{s-1} + \frac{s-1}{(s-1)^2 + 1}.$$

Koristeći tablicu Laplaceovih transformata lako odredimo konačno rješenje:

$$y = e^x\cdot(1 + \cos x).$$

27. Odredite eksplicitnu jednadžbu ravninske krivulje koja dodiruje pravac $p \ldots y = -2$, a određena je običnom diferencijalnom jednadžbom $x \cdot y' + y = 2 \cdot x$. Pojednostavnite dobivenu jednadžbu što više možete.

Rješenje: Pravac p je tangenta na traženu krivulju. Njegov koeficijent smjera je $k = 0$, a prolazi točkom $T = (x_T, -2)$. Budući da je koeficijent smjera tangente *u bilo kojoj točki* krivulje jednak prvoj derivaciji izraza koji zadaje tu krivulju, uvrštavanjem $y' = 0$ i $y = 2$ u običnu diferencijalnu jednadžbu kojom je zadana krivulja dobivamo:

$$x_T \cdot 0 - 2 = 2 \cdot x_T \Leftrightarrow x_T = -1.$$

Dakle, tražena krivulja dodiruje pravac p u točki $T = (-1, -2)$.

Sada riješimo Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x \cdot y' + y = 2 \cdot x, \\ y(-1) = -2. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu podijelimo s x:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 2,$$

pa vidimo da je riječ o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Očitamo pripadne funkcije: $p(x) = \frac{1}{x}$, $q(x) = 2$ i uvrstimo ih u pripadnu formulu za opće rješenje:

$$y = e^{-\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \cdot \left(\int e^{\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) = e^{-\ln x} \cdot \left(\int e^{\ln x} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\int x \cdot 2 \cdot \mathrm{d}x + C \right) = \frac{1}{x} \cdot \left(x^2 + C \right) = x + \frac{C}{x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = -1,\ y = -2)$ dobivamo:

$$-2 = -1 + \frac{C}{-1} \Leftrightarrow -C - 1 = -2 \Leftrightarrow C = 1.$$

Dakle, tražena krivulja je:

$$K \ldots y = x + \frac{1}{x}.$$

28. Odredite eksplicitnu jednadžbu ravninske krivulje koja prolazi točkom $A = (3,\ 1)$ i ima svojstvo da je koeficijent smjera normale povučene na krivulju u bilo kojoj točki krivulje jednak količniku apscise i ordinate te točke.

Rješenje: Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{y'} = \dfrac{x}{y}, \\ y(3) = 1. \end{cases}$$

Invertiranjem prve jednakosti dobivamo:

$$-y' = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0.$$

Dobili smo homogenu linearnu običnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda. Očitamo $p(x) = \dfrac{1}{x}$, pa uvrstimo ovu funkciju u formulu za opće rješenje navedenoga tipa jednadžbe:

$$y = C \cdot e^{-\int \frac{1}{x} \cdot \mathrm{d}x} = C \cdot e^{-\ln|x|} = C \cdot e^{\ln\left(|x|^{-1}\right)} = C \cdot |x|^{-1} = \frac{C}{|x|}.$$

Rješenje problema tražimo u okolini točke A za koju je $x_A = 3 > 0$. Zbog toga smijemo izostaviti apsolutnu vrijednost, te dobiti:

$$y = \frac{C}{x}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(x = 3,\ y = 1)$ dobivamo jednadžbu $\dfrac{C}{3} = 1$, iz koje je odmah $C = 3$.

Dakle, rješenje zadatka je hiperbola $y = \dfrac{3}{x}$.

29. Vrijeme poluraspada tricija iznosi 12.3 godina. Pretpostavljamo da je brzina raspadanja proporcionalna količini neraspadnutoga dijela tricija. Za koliko će se godina početna količina tricija smanjiti na petinu te količine? Zaokružite rezultat na jednu decimalu.

Rješenje: Neka su x_0 količina tricija u trenutku $t=0$, a $x=x(t)$ količina neraspadnutoga tricija nakon t godina. Na temelju podataka u zadatku možemo postaviti sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} x' = k\cdot x, \\ x(0)=x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' - k\cdot x = 0, \\ x(0)=x_0. \end{cases}.$$

Pripadna obična diferencijalna jednadžba je homogena linearna obična diferencijalna jednadžba 1. reda. Očitamo $p(x)=-k$, pa dobijemo:

$$x(t) = C\cdot e^{-\int(-k)\cdot \mathrm{d}t} = C\cdot e^{k\cdot\int 1\cdot \mathrm{d}t} = C\cdot e^{k\cdot t}.$$

Uvrštavanjem početnoga uvjeta $(t=0,\ x(t)=x_0)$ odmah dobivamo $C=x_0$. Dakle,

$$x(t) = x_0\cdot e^{k\cdot t}.$$

Izrazimo konstantu k pomoću vremena poluraspada τ. Znamo da je $x(\tau)=\frac{1}{2}\cdot x_0$, pa uvrštavanjem $t=\tau$ u pravilo funkcije x dobijemo:

$$\frac{1}{2}\cdot x_0 = x_0\cdot e^{k\cdot\tau} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{k\cdot\tau} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = k\cdot\tau \Leftrightarrow k = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\tau} = \frac{\ln 1 - \ln 2}{\tau} = \frac{-\ln 2}{\tau}.$$

Tako slijedi:

$$x(t) = x_0\cdot e^{\left(\frac{-\ln 2}{\tau}\right)\cdot t} = x_0\cdot e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cdot \ln 2} = x_0\cdot e^{\ln\left(2^{\frac{-t}{\tau}}\right)} = x_0\cdot 2^{\frac{-t}{\tau}}.$$

Preostaje riješiti jednadžbu $x(t)=\frac{1}{5}\cdot x_0$. Lako se dobiva:

$$\frac{1}{5}\cdot x_0 = x_0\cdot 2^{\frac{-t}{\tau}} \Leftrightarrow 2^{\frac{-t}{\tau}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-t}{\tau} = \log_2\left(\frac{1}{5}\right) \Leftrightarrow \frac{-t}{\tau} = \underbrace{\log_2 1}_{=0} - \log_2 5 \Leftrightarrow$$

$$t = \left(\log_2 5\right)\cdot\tau = \left(\log_2 5\right)\cdot 12.3 \approx 28.6 \text{ godina.}$$

30. Grad Brbljograd ima ukupno 40 000 stanovnika. „Sočni trač“ se širi gradom tako da je u svakom trenutku trenutna brzina širenja „trača“ proporcionalna broju stanovnika koji do toga trenutka **nisu** čuli „trač“. Do zaključno 9:00 sati „trač“ je čulo ukupno 4000 ljudi, a do zaključno podneva „trač“ je čula polovica grada. Koliko će ukupno ljudi čuti trač do zaključno 13:00 sati? Zaokružite rezultat na najbliži prirodan broj.

Rješenje: Neka je $N = N(t)$ broj stanovnika koji su čuli „trač“ do trenutka t. Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je početni trenutak 9:00 sati i da je t vrijeme iskazano u satima (računajući od 9:00 sati). Iz zadanih podataka dobivamo sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{cases} N'(t) = k \cdot (40000 - N), \\ N(0) = 4000, \\ N(3) = 20000. \end{cases}$$

gdje je $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ konstanta proporcionalnosti. Riješimo navedeni problem.

Zapišimo zadanu jednadžbu u obliku

$$N' + k \cdot N = 40000 \cdot k,$$

pa vidimo da se radi o nehomogenoj linearnoj običnoj diferencijalnoj jednadžbi 1. reda. Riješimo je koristeći formulu za rješenje toga tipa jednadžbe. Očitamo:

$$p(t) = k, \; q(t) = 40000 \cdot k,$$

pa imamo redom:

$$N(t) = e^{-\int k \cdot \mathrm{d}t} \cdot \left(\int 40000 \cdot k \cdot e^{\int k \cdot \mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) = e^{-k \cdot \int 1 \cdot \mathrm{d}t} \cdot \left(40000 \cdot \int k \cdot e^{k \cdot \int 1 \cdot \mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) =$$

$$= e^{-k \cdot t} \cdot \left(40000 \cdot \int k \cdot e^{k \cdot t} \cdot \mathrm{d}t + C \right) = e^{-k \cdot t} \cdot \left(40000 \cdot e^{k \cdot t} + C \right) = C \cdot e^{-k \cdot t} + 40000.$$

U ovu jednakost najprije uvrstimo $t = 0$, $N(0) = 4000$. Dobijemo:

$$4000 = C \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_{=1} + 40000 \Leftrightarrow 4000 = C + 40000 \Leftrightarrow C = -36000.$$

U istu jednakost uvrstimo $t = 3$, $N(3) = 20000$, $C = -36000$, pa dobijemo:

$$20000 = 40000 - 36000 \cdot e^{3 \cdot k} \Leftrightarrow e^{3 \cdot k} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 3 \cdot k = \ln\left(\frac{5}{9}\right) \Leftrightarrow k = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right).$$

Tako je:

$$N(t) = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right) \cdot t}.$$

Traženi je broj jednak $N(4)$, pa računamo:

$$N(4) = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right) \cdot 4} = 40000 - 36000 \cdot e^{\frac{4}{3} \cdot \ln\left(\frac{5}{9}\right)} =$$

$$= 40000 - 36000 \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{4}{3}}\right)} = 40000 - 36000 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{4}{3}} \approx 23559.$$