TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. C. Svih šest zadanih razlomaka svedemo na najmanji zajednički nazivnik. Taj nazivnik je najmanji zajednički višekratnik brojeva 2, 3 i 7, tj. $NZV(2, 3, 7) = 42$. Dobijemo redom:

$$\left(-\frac{147}{42}\right), \left(\frac{14}{42}\right), \left(-\frac{161}{42}\right), \left(-\frac{154}{42}\right), \frac{12}{42} \text{ i } \frac{18}{42} .$$

Usporedimo brojnike dobivenih razlomaka, pa zaključujemo da je jedino 12 strogo veći od –147, a strogo manji od 14.

2. C. Do 11:00 sati meč je trajao 15 minuta. Od 11:00 do 14:00 sati meč je trajao puna 3 sata Od 14:00 do kraja meča (14 sati i 12 minuta) meč je trajao 12 minuta. Stoga je ukupno vrijeme jednako 15 minuta + 3 sata + 12 minuta = 3 sata 27 minuta.

3. A. Imamo redom:

$$\frac{\frac{25}{100}-\frac{21}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{42}{4}}{\frac{1}{4}} = \frac{-\frac{41}{4}}{\frac{1}{4}} = -41 .$$

4. C. Neka su A točka u kojoj ljestve dodiruju zid, B točka u kojoj ljestve dodiruju podnožje, te C ortogonalna projekcija točke A na podnožje. Trokut ABC je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu C. Duljina njegove hipotenuze $\overline{AB}$ jednaka je duljini ljestava, tj. $c = \left|\overline{AB}\right|$ 2.4 m, dok je duljina njegove katete $\overline{BC}$ jednaka udaljenosti ljestava od zida, tj. $a = \left|\overline{BC}\right|$ = 1 m. Visina na kojoj ljestve dodiruju zid jednaka je duljini druge katete $\overline{AC}$ trokuta. Primjenom Pitagorina poučka dobijemo:

$$\left|\overline{AC}\right| = \sqrt{\left|\overline{AB}\right|^2 - \left|\overline{BC}\right|^2} = \sqrt{2.4^2 - 1^2} = \sqrt{5.76-1} = \sqrt{4.76} = \sqrt{\frac{476}{100}} = \sqrt{\frac{119}{25}} = \frac{\sqrt{119}}{\sqrt{25}} = \frac{1}{5}\cdot\sqrt{119}$$

$$\left|\overline{AC}\right| \approx 2.18174242 \text{ m}$$

5. A. Imamo redom:

$$(a^3 + 2)^2 = (a^3)^2 + 2 \cdot a^3 \cdot 2 + 2^2 = a^{3 \cdot 2} + 4 \cdot a^3 + 4 = a^6 + 4 \cdot a^3 + 4.$$

6. B. Traženi broj dobit ćemo tako da broj 20 875 povećamo za 4.19% njegove vrijednosti. Dobijemo:

$$N_1 = 20\,875 + \frac{4.19}{100}\cdot 20\,875 = 20\,875 + \frac{87\,466.25}{100} = 20\,875 + 874.6625 = 21\,749.6625 \approx 21\,750$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – OSNOVNA RAZINA

7. **A.** Izračunamo redom:

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 3 = (-2) - 3 = -5,$$
$$f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 4 - 3 = 1,$$
$$f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 6 - 3 = 3.$$

Pripadna tablica je prva od četiriju ponuđenih tablica.

8. **C.** Zaokružimo li prvi broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.77 (polazna treća decimala je 9, pa se zaokruživanjem polazna druga decimala povećava za 1). Analogno, zaokružimo li drugi broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.77 (polazna treća decimala je 3, pa se zaokruživanjem ne mijenja polazna druga decimala). Zaokružimo li treći broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.78 (iz istoga razloga kao i kod prvoga broja). Napokon, zaokružimo li četvrti broj na dvije decimale, dobit ćemo broj 5.79 (polazna treća decimala je 6, pa se zaokruživanjem polazna druga decimala povećava za 1). Stoga je traženi broj 5.7791.

9. **B.** Obujam kocke jednak je

$$V_{kocke} = a_{kocke}^3 = 6^3 = 216 \text{ cm}^3,$$

dok je oplošje kocke

$$O_{kocke} = 6 \cdot a_{kocke}^2 = 6 \cdot 6^2 = 6 \cdot 36 = 216 \text{ cm}^2.$$

Obujam kvadra jednak je

$$V_{kvadra} = a \cdot b \cdot c = 9 \cdot 4 \cdot 6 = 216 \text{ cm}^3,$$

dok je oplošje kvadra

$O_{kvadra} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c) = 2 \cdot (9 \cdot 4 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 6) = 2 \cdot (36 + 54 + 24) = 2 \cdot 114 =$
$= 228 \text{ cm}^2$.

Dakle, kocka i kvadar imaju jednake obujmove, ali različita oplošja.

10. **D**. Imamo redom:

$$5 \cdot x - 2 \cdot x^2 + 2 \cdot x^2 - 9 = 5 \cdot x - 9.$$

11. **C**. Maksimalna visina luka jednaka je najvećoj vrijednosti kvadratne funkcije $f(x) = (-0.3) \cdot x^2 +$ $+ 1.8 \cdot x$. Očitamo parametre kvadratne funkcije: $a = -0.3$, $b = 1.8$, $c = 0$, pa izračunamo:

$$f_{\max} = \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a} = \frac{4 \cdot (-0.3) \cdot 0 - 1.8^2}{4 \cdot (-0.3)} = \frac{-1.8^2}{-1.2} = \frac{1.8^2}{1.2} = \frac{3.24}{1.2} = 2.7$$

Dakle, tražena maksimalna visina iznosi 2.7 metara.

12. **D.** Imamo redom:

$$k \cdot x = -l \quad / : x$$
$$k = -\frac{l}{x}$$

13. A. Neka su x ukupan broj kovanica od pet kuna, y ukupan broj kovanica od dvije kune i z ukupan broj kovanica od 50 lipa (= 0.5 kn). Iz podatka da ukupna novčana vrijednost svih kovanica iznosi 132 kn slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$x \cdot 5 + y \cdot 2 + z \cdot 0.5 = 132.$$

Iz podatka da kovanica od dvije kune ima dvostruko više nego kovanica od pet kuna slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$y = 2 \cdot x.$$

Iz podatka da kovanica od 50 lipa ima trostruko više nego kovanica od dvije kune slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$z = 3 \cdot y.$$

Tako smo dobili sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} 5 \cdot x + 2 \cdot y + 0.5 \cdot z &= 132 \\ y &= 2 \cdot x \\ z &= 3 \cdot y \end{aligned}$$

Iz druge jednadžbe sustava dijeljenjem s 2 slijedi:

$$x = \frac{1}{2} \cdot y.$$

Uvrštavanjem te jednakosti i treće jednadžbe sustava u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$\begin{aligned} &5 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot y\right) + 2 \cdot y + 0.5 \cdot (3 \cdot y) = 132 \\ &\frac{5}{2} \cdot y + 2 \cdot y + 1.5 \cdot y = 132 \quad / \cdot 2 \\ &5 \cdot y + 4 \cdot y + 3 \cdot y = 264 \\ &12 \cdot y = 264 \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 12 slijedi $y = 22$. Dakle, u kasici su bile 22 kovanice od dvije kune.

14. D. Za a, $b \neq 0$ dobijemo da je zadani izraz jednak:

$$\left(\frac{3\cdot a-b}{b^2}+\frac{b}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{6\cdot a}=\frac{3\cdot a-b+b}{b^2}\cdot\frac{b}{6\cdot a}=\frac{3\cdot a}{b^2}\cdot\frac{b}{6\cdot a}=\frac{1}{2\cdot b}.$$

15. **C.** Površina jedne pločice iznosi:

$$P_1=a_{pločice}^2=\left(\frac{32}{100}\text{ m}\right)^2=\frac{32^2}{100^2}\text{ m}^2=\frac{1024}{10\ 000}\text{ m}^2=0.1024\text{ m}^2.$$

Stoga je za popločavanje poda potrebno ukupno

$$n=\frac{P_{poda}}{P_1}=\frac{15}{0.1024}=146.484375\approx 147\text{ pločica}$$

(Broj zaokružujemo na prvi veći prirodan broj tako da cijeli pod bude pokriven, što neće biti ispunjeno nabavimo li 146 pločica.) Budući da u jednom paketu ima ukupno 12 pločica, traženi potreban broj paketa jednak je

$$n_1=\frac{n}{12}=\frac{147}{12}=12.25\approx 13.$$

(Broj opet zaokružujemo na prvi veći prirodan broj jer ako nabavimo 12 paketa pločica, ukupna površina koju možemo pokriti s 12 paketa iznosi $P_2 = 12 \cdot 12 \cdot P_1 = 144 \cdot 0.1024 = 14.7456\text{ m}^2$, što je manje od površine poda.) Dakle, treba kupiti najmanje 13 paketa pločica.

16. **A.** Neka je c cijena ulaznice na dan igranja utakmice, a c_p cijena ulaznice u pretprodaji. Iz podatka da je cijena ulaznice na dan igranja utakmice za 10 kuna veća od cijene ulaznice u pretprodaji slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$c = c_p + 10.$$

Za 600 kuna u pretprodaji se može kupiti ukupno $n_1=\frac{600}{c_p}$ ulaznica, dok se na dan igranja utakmice za isti iznos može kupiti ukupno $n=\frac{600}{c}$ ulaznica. Iz podatka da se na dan igranja utakmice za 600 kn može kupiti za 5 ulaznica manje nego u pretprodaji slijedi da mora vrijediti jednakost:

$$n - n_1 = 5,$$

odnosno, nakon uvrštavanja izraza za n i n_1,

$$\frac{600}{c_p}-\frac{600}{c}=5.$$

Tako smo dobili sljedeći sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$c = c_p + 10$$
$$\frac{600}{c_p} - \frac{600}{c} = 5$$

Iz prve jednadžbe toga sustava slijedi:

$$c_p = c - 10,$$

pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu sustava dobivamo:

$$\frac{600}{c-10} - \frac{600}{c} = 5$$
$$\frac{600 \cdot c}{c \cdot (c-10)} - \frac{600 \cdot (c-10)}{c \cdot (c-10)} = 5$$
$$\frac{600 \cdot c - 600 \cdot (c-10)}{c \cdot (c-10)} = 5$$
$$\frac{600 \cdot c - 600 \cdot c + 6\,000}{c \cdot (c-10)} = 5$$
$$\frac{6\,000}{c \cdot (c-10)} = 5 \quad / \cdot c \cdot (c-10)$$
$$6\,000 = 5 \cdot c \cdot (c-10) \quad / : 5$$
$$1\,200 = c \cdot (c-10)$$
$$c^2 - 10 \cdot c - 1\,200 = 0$$
$$c_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1\,200}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{100 + 4\,800}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{4\,900}}{2} = \frac{10 \pm 70}{2} \Rightarrow$$
$$c_1 = \frac{10+70}{2} = \frac{80}{2} = 40, \; c_2 = \frac{10-70}{2} = \frac{-60}{2} = -30$$

Budući da cijena ulaznice, kao novčani iznos, ne može biti strogo negativan realan broj, rješenje c_2 ne dolazi u obzir. Dakle, cijena ulaznice na dan utakmice iznosi $c = c_1 = 40$ kn.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. **320.** Označimo traženi broj s x. Iz zadanih podataka dobiva se jednadžba:

$$\frac{11}{100} \cdot x = 35.2 .$$

Odavde je

$$x = 35.2 : \frac{11}{100} = 35.2 \cdot \frac{100}{11} = \frac{35.2 \cdot 100}{11} = \frac{3\,520}{11} = 320 .$$

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – OSNOVNA RAZINA

18. $\frac{1}{5}$**.** Lijeve strane obiju jednadžbi sustava su međusobno jednake, pa takve moraju biti i desne strane tih jednadžbi. Stoga redom dobivamo:

$$\frac{3}{5}+2\cdot y=-\frac{2}{5}+7\cdot y$$
$$2\cdot y-7\cdot y=-\frac{2}{5}-\frac{3}{5}$$
$$(-5)\cdot y=-1$$

Odatle dijeljenjem s (–5) slijedi $y = \frac{1}{5}$.

19. 375. Neka je b tražena masa brašna (iskazana u gramima). Iz zadanih podataka postavljamo razmjer:

$$b : 150 = 5 : 2.$$

Odatle slijedi:

$$2\cdot b = 150\cdot 5,$$
$$2\cdot b = 750.$$

Dijeljenjem s 2 dobije se $b = 375$. Dakle, stavit ćemo 375 grama brašna.

20. $\frac{3}{4}$**.** Imamo redom:

$$H=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{\frac{2}{3}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+2}=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}.$$

21. Vidjeti Sliku 1. Graf zadane funkcije je parabola. Za crtanje bilo koje parabole dovoljno je odrediti koordinate bilo kojih triju njezinih točaka, od kojih točno jedna treba biti tjeme parabole. Iz zadane funkcije očitamo vrijednosti pripadnih parametara:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = 1,$$

pa računamo koordinate tjemena parabole:

$$T\left(-\frac{b}{2\cdot a},\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right)\Rightarrow T\left(-\frac{0}{2\cdot 1},\frac{4\cdot 1\cdot 1-0^2}{4\cdot 1}\right)\Rightarrow T\left(0,\ \frac{4}{4}\right)\Rightarrow T(0,\ 1).$$

Nadalje, primijetimo da za svaki $x\in\mathbf{R}$ vrijedi stroga nejednakost:

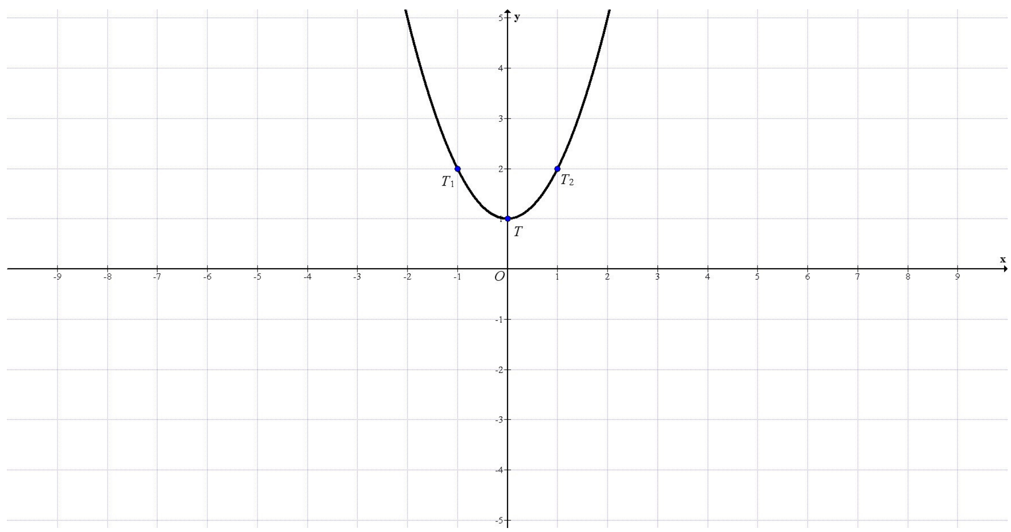
$$x^2 + 1 > 0,$$

što znači da funkcija f nema realnih nultočaka, tj. da njezin graf ne siječe os x. Sjecište toga grafa s osi y već smo odredili: to je tjeme parabole, tj. točka $T(0, 1)$.

Preostaje izračunati vrijednosti funkcije f za dvije različite vrijednosti varijable x. Radi lakšega crtanja, najbolje je odabrati točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo manja od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole) i točno jednu vrijednost varijable x koja je strogo veća od nule (tj. od prve koordinate tjemena parabole). Uzmimo npr. $x = \pm 1$, pa dobijemo:

$$f(-1) = (-1)^2 + 1 = 1 + 1 = 2,$$
$$f(1) = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Tako dobivamo još dvije točke parabole: $T_1(-1, 2)$ i $T_2(1, 2)$. Traženi graf prikazan je na Slici 1.



Slika 1.

22. $x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Imamo redom:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5-4}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ x_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

23. Novčana vrijednost iskazana u eurima i novčana vrijednost iskazana u kunama su upravno razmjerne veličine s koeficijentom upravne razmjernosti $k = 7.4456$. Stoga je iznos od 256.78 eura jednak iznosu od $256.78 \cdot 7.4456 = 1\,911.881168 \approx 1\,911.88$ kuna, a iznos od 1 000 kuna jednak iznosu od $\dfrac{1\,000}{7.4456} = 134.30751 \approx 134.31$ eura. Dakle, konačno imamo:

256.78 eura = **1 911.88 kuna,**
134.31 eura = 1 000 kuna.

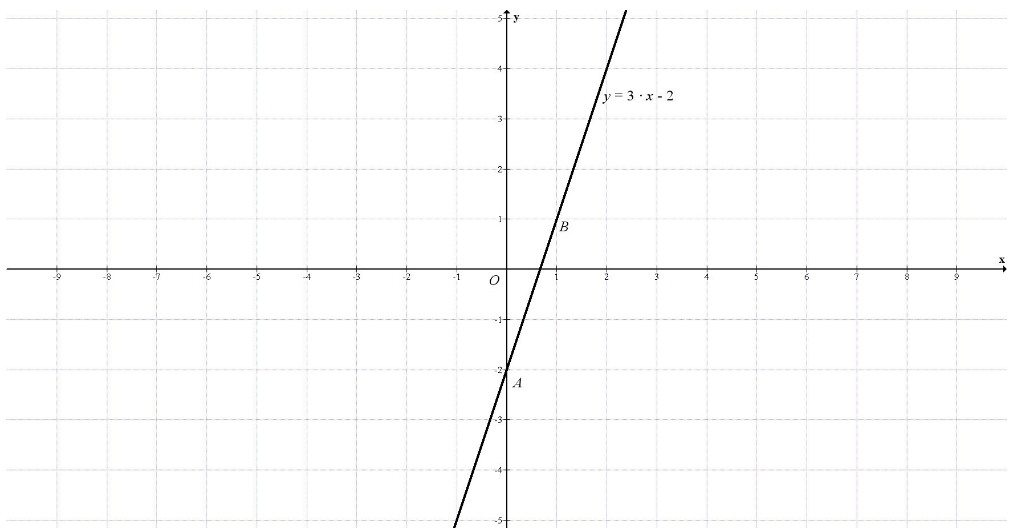
24. Vidjeti Sliku 2. Bilo koji pravac u ravnini jednoznačno je određen zadavanjem svojih bilo kojih dviju različitih točaka. Iz zadane jednadžbe pravca možemo očitati odsječak na osi y:

$$l = -2$$

pa pravac prolazi točkom $A(0, -2)$. Još jednu točku pravca dobit ćemo uzmemo li npr. $x = 1$ i izračunamo pripadnu vrijednost varijable y:

$$y = 3 \cdot 1 - 2 = 3 - 2 = 1.$$

Dakle, pravac prolazi i točkom $B(1, 1)$. Ucrtamo obje navedene točke u priloženi pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojimo jednim pravcem.



Slika 2.

Nadalje, pravac usporedan sa zadanim pravcem ima isti koeficijent smjera kao i zadani pravac, tj. $k = 3$. Preostaje napisati jednadžbu pravca koji ima koeficijent smjera $k = 3$ i prolazi točkom T:

$$p \ldots y - (-7) = 3 \cdot (x - 0),$$
$$p \ldots y = 3 \cdot x + (-7),$$
$$p \ldots \mathbf{y = 3 \cdot x - 7.}$$

25. 1.) 12. Pomnožimo zadanu jednadžbu s 3. Dobivamo:

$$3 \cdot x = 4 \cdot (x - 3),$$
$$3 \cdot x = 4 \cdot x - 12,$$
$$3 \cdot x - 4 \cdot x = -12,$$
$$(-1) \cdot x = -12.$$

Odatle dijeljenjem s (–1) slijedi $x = 12$.

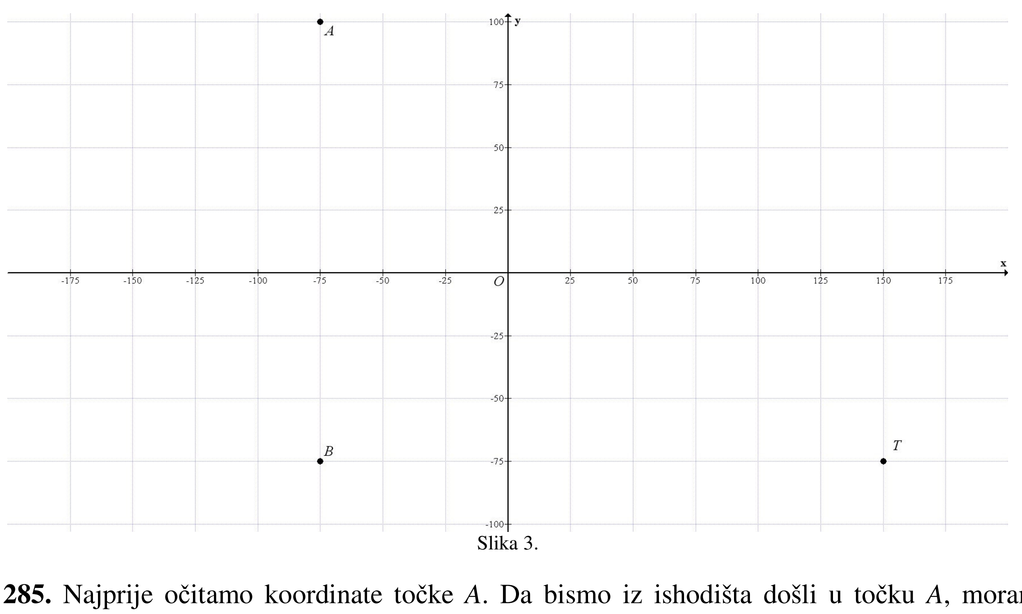
2.) $x < -20$ ili $x \in \langle -\infty, -20\rangle$. Pomnožimo zadanu nejednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj s $NZV(3, 5) = 15$. Dobivamo:

$$5 \cdot (x - 4) - 3 \cdot (2 \cdot x) > 0,$$
$$5 \cdot x - 20 - 6 \cdot x > 0,$$
$$5 \cdot x - 6 \cdot x > 20$$
$$(-1) \cdot x > 20.$$

Dijeljenjem ove nejednadžbe s (–1), pri čemu se znak nejednakosti mijenja iz > u <, slijedi $x < -20$, odnosno, zapisano u obliku intervala, $x \in \langle -\infty, -20\rangle$.

26. 1.) 19.7907; 2.) 62.15. Udaljenost od 12.3 milja jednaka je udaljenosti od $1.609 \cdot 12.3 = 19.7907$ km. Udaljenost od 100 km jednaka je udaljenosti od $\frac{100}{1.609} \approx 62.150404 \approx 62.15$ km.

27. 1.) Vidjeti Sliku 3. Jedan pomak iz ishodišta O u bilo kojem smjeru (vodoravno ili okomito) jednak je udaljenosti od 25 metara. Da bismo došli iz ishodišta u točku T, moramo napraviti $150 : 25 = 6$ pomaka udesno i $75 : 25 = 3$ pomaka prema dolje. (Predznak – u prvoj koordinati označava pomake ulijevo, dok predznak – u drugoj koordinati označava pomake prema dolje.) Tako dobivamo Sliku 3.



Slika 3.

2.) 285. Najprije očitamo koordinate točke A. Da bismo iz ishodišta došli u točku A, moramo napraviti 3 pomaka ulijevo i 4 pomaka prema gore. Stoga su koordinate točke A jednake $(-3 \cdot 25, 4 \cdot 25)$, tj. $(-75, 100)$. Dakle, $A(-75, 100)$. Traženu udaljenost izračunat ćemo koristeći formulu za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini:

$$d = \sqrt{[150-(-75)]^2 + (-75-100)^2} = \sqrt{(150+75)^2 + (-175)^2} = \sqrt{225^2 + 175^2} = \sqrt{50\ 625 + 30\ 625}$$

$$d = \sqrt{81\ 250} = \sqrt{625 \cdot 130} = \sqrt{625} \cdot \sqrt{130} = 25 \cdot \sqrt{130} \approx 285.0438563 \approx 285 \text{ m}$$

3.) 115. Najprije očitamo koordinate točke B. Da bismo iz ishodišta došli u točku B, moramo napraviti 3 pomaka ulijevo i 3 pomaka prema dolje. Stoga su koordinate točke B jednake $(-3 \cdot 25, -3 \cdot 25) = (-75, -75)$, tj. $B(-75, 75)$. Da bismo iz točke A došli u točku B, moramo se pomaknuti za točno 7 pomaka prema dolje, tj. za

$$|AB| = 7 \cdot 25 = 175 \text{ metara.}$$

Nadalje, da bismo došli iz točke B u točku T, moramo se pomaknuti za točno 9 pomaka udesno. Stoga je udaljenost od točke B do točke T jednaka

$$|BT| = 9 \cdot 25 = 225 \text{ metara.}$$

Dakle, tražena duljina puta približno je jednaka

$$d_1 = |AB| + |BT| - |AT| \approx 175 + 225 - 285 = 115 \text{ metara.}$$

28. Primijetimo da su postotci ostvarenih bodova grupirani u neprave razrede s nominalnim granicama. Stoga je svaki razred zapravo segment oblika $[a, b]$, pa tako npr. 51 – 64 obuhvaća sve postotke u segmentu [51%, 64%] i sl.

1.) dobar(3). Najprije izračunamo koliko postotaka iznosi 41 bod u odnosu na ukupno mogućih 60 bodova:

$$p = \frac{41}{60} \cdot 100 = \frac{41}{3} \cdot 5 = \frac{205}{3} = 68.33[\%]$$

Broj 68.33 pripada segmentu [65, 79]. Stoga će Jakov dobiti ocjenu *dobar*(3) jer je svakom elementu segmenta [65, 79] pridružena ta ocjena.

2.) 53 boda. Najmanji broj bodova potreban za dobivanje ocjene *odličan*(5) iznosi 90% od ukupnoga broja bodova, tj. 90% od 60 bodova. Izračunajmo koliko iznosi 90% od 60:

$$P = \frac{90}{100} \cdot 60 = \frac{9}{10} \cdot 60 = 9 \cdot 6 = 54 \text{ (boda).}$$

Budući da je Marti nedostajao 1 bod za dobivanje ocjene *odličan*(5), slijedi da je ona na ispitu postigla ukupno

$$P_1 = P - 1 = 54 - 1 = 53 \text{ boda.}$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, predavač