TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **C.** Prva tvrdnja nije točna jer je skup realnih brojeva **R** pravi podskup skupa kompleksnih brojeva **C**, tj. vrijedi skupovna inkluzija $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Drugim riječima, svaki realan broj ujedno je i kompleksan broj (s imaginarnim dijelom jednakim nuli), ali obratna tvrdnja nije točna, tj. postoji beskonačno mnogo kompleksnih brojeva (npr. svi kompleksni brojevi oblika $a \cdot i$, za $a \in \mathbf{N}$) koji nisu realni brojevi.

Iz istoga razloga nije točna niti četvrta tvrdnja jer je skup iracionalnih brojeva **I** pravi podskup skupa realnih brojeva **R**, a samim time i pravi podskup skupa kompleksnih brojeva **C**. Dakle, vrijede skupovne inkluzije $\mathbf{I} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Stoga je svaki iracionalan broj ujedno i kompleksan broj (s imaginarnim dijelom jednakim nuli), ali obratna tvrdnja nije točna, tj. postoji beskonačno mnogo kompleksnih brojeva (npr. svi kompleksni brojevi oblika $a \cdot i$ za $a \in \mathbf{N}$) koji nisu niti realni brojevi, pa posebno niti iracionalni brojevi.

Druga tvrdnja nije točna jer je skup cijelih brojeva **Z** pravi podskup skupa svih racionalnih brojeva **Q**, tj. vrijedi skupovna inkluzija $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. Drugim riječima, svaki cijeli broj može se prikazati kao razlomak (s nazivnikom 1), ali obratna tvrdnja nije točna tj. postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva (razlomaka) koji se ne mogu napisati kao cijeli brojevi (to su npr. svi racionalni brojevi oblika $\frac{n}{n+1}$ za $n \in \mathbf{N}$.)

Treća tvrdnja je točna jer je skup racionalnih brojeva **Q** pravi podskup skupa svih realnih brojeva **R**. Dakle, vrijedi skupovna inkluzija $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

2. **D.** Zadanu mjeru kuta iskazanu u radijanima pretvaramo u stupnjeve tako da je pomnožimo s razlomkom $\frac{180}{\pi}$ (jer vrijedi jednakost $180° = \pi$ radijana). Stoga je tražena mjera jednaka

$$\frac{7}{10} \cdot \pi \cdot \frac{180}{\pi} = 7 \cdot 18 = 126°.$$

3. **D.** Količinu podataka od 6 gigabajta najprije preračunajmo u megabajte. Budući da jedan gigabajt ima 1 024 megabajta, 6 gigabajta ima 6 puta više megabajta, tj. ukupno $6 \cdot 1\,024 = 6\,144$ megabajta. Stoga je traženi broj CD-a jednak najmanjem prirodnom broju koji je veći ili jednak broju $\frac{6\,144}{700}$. Budući da je $6\,144 : 700 \approx 8.78$, zaključujemo da je traženi broj CD-a jednak 9. (Na 8 CD-a može se pohraniti ukupno $8 \cdot 700 = 5\,600$ megabajta podataka, što nije dovoljno za pohranu svih podataka.)

4. **A**. Pokažimo najprije da su zadani trokuti slični prema poučku $K - K$, tj. da se podudaraju u dvama kutovima. U prvom je trokutu treći (nepoznati) kut trokuta jednak

$$\beta = 180° - (78° + 43°) = 180° - 121° = 59°.$$

U drugom trokutu primjenom sinusova poučka dobijemo:

$$\frac{6.4}{\sin 78°} = \frac{5.6}{\sin \beta},$$

a odavde je

$$\sin \beta = \frac{5.6}{6.4} \cdot \sin 78° = \frac{56}{64} \cdot \sin 78° = \frac{7}{8} \cdot \sin 78°.$$

U segmentu [0, 180°] ova trigonometrijska jednadžba ima dva rješenja: $\beta_1 = 59°$ i $\beta_2 = 180° - 59° = 121°$. Drugo rješenje, međutim, otpada jer bi zbroj dvaju kutova (kuta od 121° i kuta od 78°) u drugom trokutu bio strogo veći od 180°, što je nemoguće. Stoga mora biti $\beta_1 = 59°$.

Tako smo zaključili da se zadani trokuti podudaraju u dvama kutovima. Stoga se ti trokuti moraju podudarati i u preostalom kutu. Mjera toga kuta jednaka je 43°, kako je i naznačeno u prvom trokutu.

5. **C**. Iz podatka da su Iva i Matej podijelili novac u omjeru 3 : 5 zaključujemo da postoji strogo pozitivan realan broj k takav da je Iva dobila $3 \cdot k$ kuna, a Matej $5 \cdot k$ kuna. Budući da zbroj obiju iznosa treba biti jednak ukupnoj svoti novca, tj. 24 464 kn, dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$3 \cdot k + 5 \cdot k = 24\,464,$$

odnosno

$$8 \cdot k = 24\,464.$$

Dijeljenjem s 8 dobijemo $k = 3\,058$. Traženi iznos, tj. razlika svote koju je dobio Matej i svote koju je dobila Iva, jednak je:

$$5 \cdot k - 3 \cdot k = 2 \cdot k = 2 \cdot 3\,058 = 6\,116 \text{ kn}.$$

6. **D.** Činjenica da zadani graf prolazi ishodištem nije značajna za rješavanje zadatka jer se lako vidi da grafovi svih četiriju ponuđenih funkcija prolaze ishodištem pravokutnoga koordinatnog sustava u ravnini, tj. da za sve četiri ponuđene funkcije f vrijedi jednakost $f(0) = 0$. Međutim, zadani graf se asimptotski približava pravcu $x = -1$, što znači da pripadna funkcija nije definirana za $x = -1$. Prve tri ponuđene funkcije (linearna, kvadratna i eksponencijalna) definirane su za bilo koju realnu vrijednost varijable x, pa posebno i za $x = -1$. Stoga je rješenje zadatka funkcija $f(x) = \log_2(x + 1)$. Doista, prirodno područje definicije te funkcije je otvoreni interval $\langle -1, +\infty \rangle$, funkcija je strogo rastuća (jer joj je baza logaritma strogo veća od 1) i njezin graf prolazi točkom (0, 0).

7. **B.** Opseg zadanoga pravokutnika jednak je:

$$O = 2 \cdot [a + a + 3)] = 2 \cdot (a + a + 3) = 2 \cdot (2 \cdot a + 3) = 4 \cdot a + 6.$$

Iz podatka da opseg pravokutnika treba biti jednak 54 cm dobivamo linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom:

$$4 \cdot a + 6 = 54,$$

odnosno

$$4 \cdot a = 54 - 6,$$

odnosno

$$4 \cdot a = 48.$$

Odatle dijeljenjem s 4 slijedi $a = 12$ cm.

Sad uočimo da traženu površinu trokuta možemo izračunati kao polovicu umnoška stranice trokuta čija je duljina $a + 3 = 12 + 3 = 15$ cm i visine na tu stranicu čija je duljina $a = 12$ cm. Stoga je tražena površina jednaka

$$P = \frac{1}{2} \cdot (a+3) \cdot a = \frac{1}{2} \cdot (12+3) \cdot 12 = 15 \cdot 6 = 90 \text{ cm}^2.$$

8. **D.** Treba napisati kvadratnu jednadžbu s cjelobrojnim koeficijentima čije je jedno rješenje zadani broj a. Da bi ta kvadratna jednadžba imala cjelobrojne koeficijente, nužno je i dovoljno da i broj $a_1 = 1 - \sqrt{5}$ bude rješenje te jednadžbe. Preostaje primijeniti Viète ove formule:

$$a + a_1 = (1+\sqrt{5}) + (1-\sqrt{5}) = 1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5} = 2,$$
$$a \cdot a_1 = (1+\sqrt{5}) \cdot (1-\sqrt{5}) = 1^2 - (\sqrt{5})^2 = 1 - 5 = -4,$$

te napisati pripadnu kvadratnu jednadžbu (s nepoznanicom a):

$$a^2 - 2 \cdot a - 4 = 0.$$

9. **C.** Uočimo da se mreža geometrijskoga tijela sastoji od jednoga pravokutnika i četiri trokuta koji tvore dva para međusobno sukladnih trokuta. Stoga je traženo geometrijsko tijelo uspravna četverostrana piramida kojoj je osnovka pravokutnik, a pobočke trokutovi. (Sve strane trostrane piramide su trokutovi, trostrana prizma ima mrežu sastavljenu od dva trokuta i tri usporednika (paralelograma), dok mreža četverostrane prizme sadrži dva usporednika (paralelograma).)

10. **B**. Iz pretpostavke $a < b$ slijedi $a - b < 0$. Funkcija apsolutne vrijednosti na strogo negativne realne brojeve djeluje tako da im mijenja predznak. Stoga je $|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$.

11. **A**. Za $a \neq \pm\frac{1}{2}$ primjenom formula za kvadrat zbroja, kvadrat razlike i razliku kvadrata dobivamo redom :

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

$$\frac{(2\cdot a-1)^2+4\cdot a}{(2\cdot a-1)^2}\cdot\frac{2\cdot a+1}{16\cdot a^4-1}=\frac{(2\cdot a)^2-2\cdot(2\cdot a)\cdot 1+1^2+4\cdot a}{(2\cdot a-1)^2}\cdot\frac{2\cdot a+1}{4^2\cdot(a^2)^2-1^2}=\frac{2^2\cdot a^2-4\cdot a+1+4\cdot a}{(2\cdot a-1)^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{2\cdot a+1}{(4\cdot a^2-1)\cdot(4\cdot a^2+1)}=\frac{4\cdot a^2+1}{(2\cdot a-1)^2}\cdot\frac{2\cdot a+1}{(2^2\cdot a^2-1^2)\cdot(4\cdot a^2+1)}=\frac{1}{(2\cdot a-1)^2}\cdot\frac{2\cdot a+1}{(2\cdot a-1)\cdot(2\cdot a+1)}=\frac{1}{(2\cdot a-1)^3}$$

12. D. Da bi funkcija *f* bila definirana, oba logaritmanda moraju biti strogo pozitivni realni brojevi. To znači da istodobno moraju vrijediti sljedeće nejednakosti:

$$\frac{x-3}{x}>0$$
$$x+2>0$$

Količnik dvaju realnih brojeva je strogo pozitivan realan broj ako i samo ako su djeljenik i djelitelj istodobno ili strogo pozitivni ili strogo negativni realni brojevi. Stoga su moguća sljedeća dva slučaja:

$$\begin{array}{lll} & x-3>0 & x-3<0 \\ \text{ili} & x>0 & \text{ili}\ x<0 \\ & x+2>0 & x+2>0 \end{array}$$

Promotrimo prvi slučaj. Iz prve nejednakosti slijedi $x > 3$, a iz treće $x > -2$. Presjek skupova određenih nejednakostima $x > 3$, $x > 0$ i $x > -2$ je interval $\langle 3, +\infty\rangle$. (Tražimo presjek jer sve tri nejednakosti moraju vrijediti istodobno.)

Promotrimo drugi slučaj. Iz prve nejednakosti slijedi $x < 3$, a iz treće $x > -2$. Presjek skupova određenih nejednakostima $x < 3$, $x < 0$ i $x > -2$ je skup $\langle -2, 0\rangle$. (Opet tražimo presjek jer sve tri nejednakosti moraju vrijediti istodobno.)

Budući da može nastupiti ili prvi ili drugi slučaj, domena zadane funkcije je unija skupova dobivenih kao rješenja svakoga pojedinoga slučaja. Dakle, $D_f = \langle -2, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

13. B. Da bismo odredili jednadžbu kružnice, moramo odrediti središte i kvadrat polumjera te kružnice. Budući da je dužina $\overline{AB}$, prema pretpostavci, promjer kružnice, središte kružnice je polovište te dužine jer središte kružnice raspolavlja bilo koji promjer kružnice. Dakle,

$$S=P_{\overline{AB}}=\left(\frac{-3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)=\left(\frac{-2}{2},\frac{6}{2}\right)=(-1,3)\,.$$

Nadalje, kvadrat duljine polumjera kružnice jednak je četvrtini kvadrata udaljenosti između točaka *A* i *B* jer je duljina svakoga polumjera kružnice dvostruko manja od duljine bilo kojega promjera kružnice. Dakle,

$$r^2 = \frac{1}{4}\cdot\left[d(A,B)\right]^2 = \frac{1}{4}\cdot\left\{\left[1-(-3)\right]^2 + (4-2)^2\right\} = \frac{1}{4}\cdot\left[(1+3)^2 + (4-2)^2\right] = \frac{1}{4}\cdot(4^2+2^2) = \frac{1}{4}\cdot(16+4) = \frac{20}{4} = 5$$

Preostaje napisati jednadžbu kružnice čije je središte točka $S(-1, 3)$, a kvadrat polumjera $r^2 = 5$. Ona glasi:

$$[x-(-1)]^2 + (y-3)^2 = 5,$$
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 5,$$
$$x^2 + 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 + y^2 - 2\cdot y\cdot 3 + 3^2 = 5,$$
$$x^2 + 2\cdot x + 1 + y^2 - 6\cdot y + 9 - 5 = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2\cdot x - 6\cdot y + 5 = 0.$$

14. A. Koristeći definicijsku formulu za funkciju tangens, te adicijski poučak za funkciju sinus, zadanu jednadžbu najprije transformiramo na sljedeći način:

$$\frac{\sin\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)} - \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\frac{\sin\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3} - \cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\frac{\sin\left[\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]}{\cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\frac{\sin\left(2\cdot x-2\cdot\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{3}} = 0$$

Razlomak na lijevoj strani posljednje jednakosti bit će jednak nuli ako i samo ako istodobno brojnik toga razlomka bude jednak nuli, a nazivnik različit od nule. Primijetimo da vrijedi očita jednakost

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \neq 0\,.$$

Izjednačavanjem brojnika s nulom dobivamo:

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

$$\sin\left(2\cdot x-2\cdot\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$2\cdot x-2\cdot\frac{\pi}{3}=k\cdot\pi$$

$$2\cdot x=2\cdot\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi$$

$$2\cdot x=\frac{\pi}{3}\cdot(2+3\cdot k)\quad /:2$$

$$x=\frac{\pi}{6}\cdot(3\cdot k+2),\ k\in\mathbf{Z}$$

Provjerimo je li za dobivene vrijednosti nepoznanice x nazivnik različit od nule:

$$\cos\left(2\cdot x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left[\left(2\cdot\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(k\cdot\pi)-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin(k\cdot\pi)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\cos(k\cdot\pi)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}\cdot\cos(k\cdot\pi)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{za parne } k\in\mathbf{Z};\\ -\frac{1}{2}, & \text{za neparne } k\in\mathbf{Z}.\end{cases}$$

Odredimo za koje vrijednosti cijeloga broja k pripadna rješenja x pripadaju segmentu $[0, \pi]$, odnosno, ekvivalentno, za koje vrijednosti cijeloga broja k pripadna rješenja x zadovoljavaju nejednakost $0\le x\le\pi$. Imamo redom:

$$0\le\frac{\pi}{6}\cdot(3\cdot k+2)\le\pi\quad /\cdot\frac{6}{\pi}$$

$$0\le 3\cdot k+2\le 6$$

$$0-2\le 3\cdot k\le 6-2$$

$$-2\le 3\cdot k\le 4\quad /:3$$

$$-\frac{2}{3}\le k\le\frac{4}{3}$$

$$k\in\left[-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right]$$

Prema pretpostavci je k cijeli broj, pa zaključujemo da segmentu $\left[-\frac{2}{3},\ \frac{4}{3}\right]$ pripadaju točno dva cijela broja: $k = 0$ i $k = 1$.

Za $k = 0$ pripadno rješenje polazne jednadžbe je $x=\frac{\pi}{6}\cdot(3\cdot 0+2)=\frac{\pi}{6}\cdot 2=\frac{\pi}{3}$.

Za $k = 1$ pripadno rješenje polazne jednadžbe je $x = \frac{\pi}{6} \cdot (3 \cdot 1 + 2) = \frac{5}{6} \cdot \pi$.

Stoga je traženi zbroj jednak $S = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{6} \cdot \pi = \frac{2}{6} \cdot \pi + \frac{5}{6} \cdot \pi = \frac{7}{6} \cdot \pi$.

15. C. Tražimo sve strogo pozitivne vrijednosti varijable t za koje je $h(t) > 182$. Dobivamo:

$$(-2) \cdot (t - 11)^2 + 310 > 182$$
$$(-2) \cdot (t - 11)^2 > 182 - 310$$
$$(-2) \cdot (t - 11)^2 > -128 \ /(-2)$$
$$(t - 11)^2 < 64$$
$$-8 < t - 11 < 8$$
$$-8 + 11 < t < 8 + 11$$
$$3 < t < 19$$

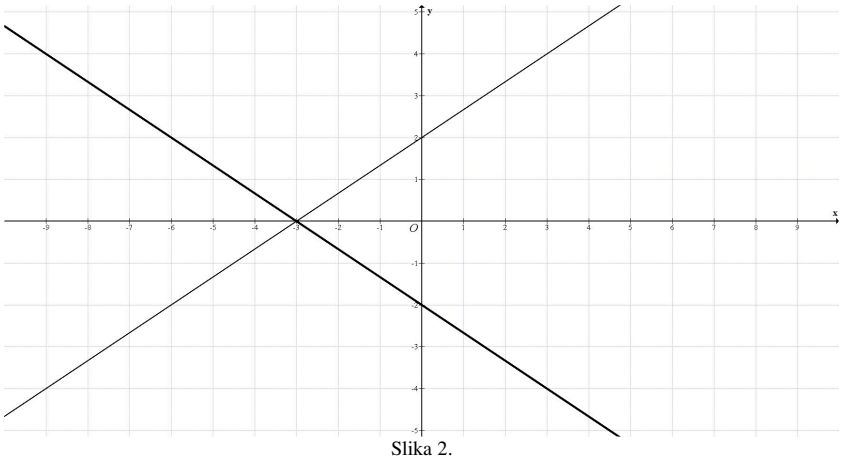
Dakle, projektil će od 3. do 19. sekunde biti na visini iznad 182 metra, što znači da će na toj visini provesti ukupno 19 – 3 = 16 sekundi.

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $\boldsymbol{a \cdot \cos \varphi + c}$ **.** Imamo redom:

$$a \cdot \cos \varphi = b - c$$
$$b = a \cdot \cos \varphi + c$$

17. Svaku točku traženoga grafa dobijemo tako da svakoj točki polaznoga grafa promijenimo predznak njezine ordinate (a apscisu ostavimo nepromijenjenu). Stoga će traženi graf također sjeći os x u točki (–3, 0), dok će os y sjeći u točki (0, –2). Traženi graf prikazan je na Slici 1. (Nacrtan je debljom od dviju linija.)



Slika 2.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

18. 1.) $-\frac{8}{5}$. Pomnožimo polaznu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s $NZV(2, 3) = 6$. Dobivamo redom:

$$3 \cdot x = 2 \cdot (4 \cdot x + 1) + 1 \cdot 6$$
$$3 \cdot x = 8 \cdot x + 2 + 6$$
$$3 \cdot x - 8 \cdot x = 8$$
$$(-5) \cdot x = 8.$$

Dijeljenjem ove jednakosti s (–5) dobivamo $k = -\frac{8}{5}$.

2.) ⟨3, 5⟩. Najprije riješimo pripadnu kvadratnu jednadžbu, tj. jednadžbu $x^2 - 8 \cdot x + 15 = 0$. Nju možemo riješiti lakše i brže koristeći Viète ove formule: pitamo se koja dva realna broja zbrojena daju 8, a pomnožena 15. To su očito realni brojevi 3 i 5, tj. $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$. Preostaje prisjetiti se činjenice da kvadratna funkcija čiji je vodeći koeficijent (tj. koeficijent uz x^2) strogo veći od nule poprima vrijednosti strogo manje od nule na otvorenom intervalu kojega određuju realne nultočke te funkcije. U ovome su slučaju te nultočke $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$, pa je rješenje zadatka interval ⟨3, 5⟩.

19. 1.) (2, –1). Vektor $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3 \cdot \vec{j}$ znači da iz točke A u točku B dolazimo tako da se iz točke A pomaknemo za jednu jedinicu udesno, a potom za 3 jedinice prema dolje. Pomak iz točke A za jednu jedinicu udesno dovodi nas do točke $A_1(1 + 1, 2)$, tj. do točke $A_1(2, 2)$. Pomak iz točke A_1 za 3 jedinice prema dolje dovodi nas do točke $B(2, 2 - 3)$, tj. do točke $B(2, -1)$, i to je tražena točka.

2.) 148°40'17'' = 2.5948038127 radijana. Kosinus traženoga kuta jednak je omjeru skalarnoga umnoška zadanih vektora i „običnoga“ umnoška duljinâ zadanih vektora. Dakle,

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{(-3,-4) \cdot (5,2)}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{5^2 + 2^2}} = \frac{(-3) \cdot 5 + (-4) \cdot 2}{\sqrt{9+16} \cdot \sqrt{25+4}} = \frac{-15-8}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{29}} = \frac{-23}{5 \cdot \sqrt{29}} = -\frac{23}{5 \cdot 29} \cdot \sqrt{29} = -\frac{23}{145} \cdot \sqrt{29}$$

Odatle slijedi $\alpha = \arccos\left(-\frac{23}{145} \cdot \sqrt{29}\right) \approx 148.6713071° = 148°40'17'' = 2.5948038127$ radijana.

20. 1.) $3 \cdot \left(\cos\frac{3 \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3 \cdot \pi}{2}\right)$. Realni dio zadanoga kompleksnoga broja jednak je $\mathrm{Re}(z) = 0$, a imaginarni $\mathrm{Im}(z) = -3$. Stoga broju z pridružena točka kompleksne (Gaussove) ravnine ima koordinate $Z(0, -3)$. Njezina udaljenost od ishodišta kompleksne ravnine jednaka je $r = 3$. Spojnica točke Z s ishodištem kompleksne ravnine je negativni dio imaginarne osi. Taj polupravac zatvara s pozitivnim dijelom realne osi kut $\varphi = 270° = \frac{3 \cdot \pi}{2}$. Stoga je traženi trigonometrijski oblik zadanoga broja

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) = 3 \cdot \left(\cos\frac{3 \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin\frac{3 \cdot \pi}{2} \right)$$

2.) 16. Imamo redom:

$$(1+i)^8 = (1+i)^{2\cdot 4} = \left[(1+i)^2\right]^4 = (1^2 + 2\cdot 1\cdot i + i^2)^4 = \left[1 + 2\cdot i + (-1)\right]^4 = (2\cdot i)^4 = 2^4 \cdot i^4 = 16 \cdot i^{2\cdot 2} =$$
$$= 16 \cdot (i^2)^2 = 16 \cdot (-1)^2 = 16 \cdot 1 = 16$$

Tako je konačno

$$\mathrm{Re}[(1 + i)^8] = \mathrm{Re}(16) = \mathrm{Re}(16 + 0 \cdot i) = 16.$$

21. 1.) *–a* – 14. Pomnožimo drugu jednadžbu sustava s (–2) i tako dobivenu jednadžbu pribrojimo prvoj jednadžbi sustava. Dobivamo:

$$(-4) \cdot y + (-14) + 3 \cdot y = 0 + a,$$
$$(-1) \cdot y = a - (-14),$$
$$(-1) \cdot y = a + 14.$$

Dijeljenjem posljednje jednadžbe s (–1) dobijemo $y = -a - 14$.

2.) 20. Prema binomnom poučku, opći (k – ti) član zadanoga razvoja jednak je:

$$\binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot (x^{-1})^k = \binom{6}{k} \cdot x^{6-k} \cdot x^{-k} = \binom{6}{k} \cdot x^{6-2\cdot k}.$$

Taj član neće sadržavati x ako i samo ako eksponent u potenciji od x bude jednak nuli. Tako iz jednadžbe

$$6 - 2 \cdot k = 0$$

dobijemo:

$$(-2) \cdot k = -6.$$

Dijeljenjem s (–2) slijedi $k = 3$. Dakle, treći član navedenoga razvoja ne sadrži x i taj član je jednak

$$\binom{6}{3} \cdot x^{6-2\cdot 3} = \binom{6}{3} \cdot x^0 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!} \cdot 1 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{6} = 5\cdot 4 = 20$$

22. 1.) $\frac{28}{9}$. Koristimo ekvivalenciju ($\log_a x = y$) $\Leftrightarrow$ ($x = a^y$), pa iz zadane jednadžbe odmah slijedi:

$$x - 3 = 3^{-2},$$

a odatle je

$$x = 3 + 3^{-2} = 3 + \frac{1}{3^2} = 3 + \frac{1}{9} = \frac{27+1}{9} = \frac{28}{9}.$$

2.) $x \le -\frac{11}{10}$ **ili** $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{10} \right]$**.** Bazu potencije na lijevoj strani, te realan broj na desnoj strani nejednadžbe najprije napišimo kao potencije s bazom 2:

$$32 = 2^5,$$

$$\frac{\sqrt{8}}{4} = \frac{\sqrt{2^3}}{2^2} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2^2} = 2^{\frac{3}{2}-2} = 2^{\frac{3-4}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Tako polazna nejednadžba prelazi u

$$(2^5)^{x+1} \le 2^{-\frac{1}{2}},$$

odnosno

$$2^{5\cdot x+5} \le 2^{-\frac{1}{2}}.$$

Budući da je eksponencijalna funkcija $f(x) = 2^x$ strogo rastuća, vrijedi ekvivalencija $(x \le y) \Leftrightarrow (2^x \le 2^y)$. Odatle slijedi da će posljednja nejednakost vrijediti ako i samo ako vrijedi nejednakost

$$5 \cdot x + 5 \le -\frac{1}{2},$$

odnosno

$$5 \cdot x \le -\frac{1}{2} - 5,$$

odnosno

$$5 \cdot x \le \frac{-1-10}{2},$$

odnosno

$$5 \cdot x \le -\frac{11}{2}.$$

Odatle dijeljenjem s 5, pri čemu se znak nejednakosti neće promijeniti, dobivamo $x \le -\frac{11}{10}$, tj. $x \in \left\langle -\infty, -\frac{11}{10} \right]$.

23. 1.) 5.745. Duljinu katete a nasuprot kuta α, duljinu hipotenuze c i kut α povezuje trigonometrijska funkcija sinus:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Odatle slijedi

$$a = c \cdot \sin\alpha = 7.5 \cdot \sin 50° \approx 5.7453 \approx 5.745 \text{ cm}.$$

2.) $\boldsymbol{V} = \frac{260}{3} \cdot \pi$. Kvadrat polumjera osnovke nastaloga stošca jednak je kvadratu duljine druge katete zadanoga trokuta. Prema Pitagorinu poučku, taj je kvadrat jednak

$$r^2 = 9^2 - 4^2 = 81 - 16 = 65.$$

Nadalje, visina nastaloga stošca jednaka je duljini katete oko koje je rotirao polazni pravokutan trokut, tj.

$$h = 4 \text{ cm}.$$

Tako je traženi obujam stošca jednak:

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot \pi \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 65 \cdot \pi \cdot 4 = \frac{260}{3} \cdot \pi \text{ cm}^3$$

24. 1.) 4. Iz zadane jednadžbe harmonijske funkcije očitamo kružnu frekvenciju (koeficijent uz x):

$$\omega = \frac{\pi}{2}.$$

Traženi temeljni period T jednak je količniku realnoga broja $2 \cdot \pi$ i kružne frekvencije ω:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{\pi} = 2 \cdot 2 = 4.$$

2.) 12. Maksimalna vrijednost zadane funkcije postiže se za one vrijednosti varijable x za koje funkcija sin x poprima najmanju vrijednost (jer u tom slučaju od broja 9 oduzimamo najmanju moguću vrijednost). Najmanja vrijednost funkcije sin x jednaka je –1. Stoga je tražena vrijednost

$$f_{max} = (-3) \cdot (-1) + 9 = 3 + 9 = 12$$

i postiže se za $x \in \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot (4 \cdot k + 3) : k \in \mathbf{Z} \right\}$ (jer je za vrijednosti x iz navedenoga skupa vrijednost izraza sin x jednaka –1.)

25. 1.) 66.022. Promotrimo trokut *ACD*. U tom trokutu poznate su duljine dviju stranica, te mjera kuta kojega zatvaraju te stranice. Tražena udaljenost jednaka je duljini nepoznate stranice trokuta. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$|AC| = \sqrt{|AD|^2 + |CD|^2 - 2 \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \cos 120°}$$
$$|AC| = \sqrt{31^2 + 47^2 - 2 \cdot 31 \cdot 47 \cdot \cos 120°}$$
$$|AC| = \sqrt{961 + 2\ 209 - 2\ 914 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{3\ 170 + 1\ 457} = \sqrt{4\ 627} \approx 68.022055 \text{ m}$$

2.) 31°18'52'' ili 0.5465386 radijana . Promotrimo trokut *ABC*. U tom trokutu znamo duljine dviju njegovih stranica: $|AC| = \sqrt{4\ 627}$ m i |*BC*| = 55 m, te kut nasuprot većoj od njih: β = 40°. Tražimo kut nasuprot manjoj od njih. Primjenom sinusova poučka dobivamo:

$$\frac{|AC|}{\sin\beta} = \frac{|BC|}{\sin\angle BAC}$$
$$\frac{\sin\beta}{|AC|} = \frac{\sin\angle BAC}{|BC|}$$
$$\sin\angle BAC = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot \sin\beta = \frac{55}{\sqrt{4\ 627}} \cdot \sin 40° \approx 0.5197331719$$

Odatle slijedi β = arcsin $\frac{55}{\sqrt{4\ 627}} \cdot \sin 40° =$ 31.3143549° = 31°18'52" = 0.5465386 radijana. (Rješenje β_1 = 180° – β ne dolazi u obzir jer bi tada zbroj dvaju kutova u trokutu *ABC* bio strogo veći od 180°, što je nemoguće.)

3.)2 402.91. Površina zemljišta jednaka je zbroju površine trokuta *ACD* i površine trokuta *ABC*. Površinu trokuta *ACD* možemo izračunati kao polovicu umnoška duljinâ bilo kojih dviju stranica toga trokuta i sinusa kuta kojega zatvaraju te dvije stranice, pa odmah imamo:

$$P_{\Delta ACD} = \frac{1}{2} \cdot |AD| \cdot |CD| \cdot \sin 120° = \frac{1}{2} \cdot 31 \cdot 47 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1\ 457}{4} \cdot \sqrt{3} \text{ m}^2.$$

Na potpuno analogan način postupimo i pri određivanju površine trokuta *ABC*:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BC| \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4\ 627} \cdot 55 \cdot \sin\left[180° - \left(\angle BAC + \angle ABC\right)\right]$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{55}{2} \cdot \sqrt{4\ 627} \cdot \sin\left(\angle BAC + \angle ABC\right) = \frac{55}{2} \cdot \sqrt{4\ 627} \cdot \sin\left(31°18'52'' + 40°\right)$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{55}{2} \cdot \sqrt{4\ 627} \cdot \sin 71°18'52''\ \text{m}^2$$

Stoga je tražena površina jednaka:

$$P = P_{\Delta ACD} + P_{\Delta ACD} = \frac{1\ 457}{4} \cdot \sqrt{3}\ \text{m}^2 + \frac{55}{2} \cdot \sqrt{4\ 627} \cdot \sin 71°18'52'' \approx 2402.9083675\ \text{m}^2,$$

odnosno, $P \approx 2\ 402.91\ \text{m}^2$.

26. 90; 1 440. Neka je m ukupna masa šećera koju imamo na raspolaganju, a p ukupan broj raspoloživih paketa. Budemo li pakirali šećer u paketima mase 18 kg, svu raspoloživu masu šećera spakovat ćemo u ukupno $p - 10$ paketa. To znači da vrijedi jednakost:

$$m = (p - 10) \cdot 18.$$

Nadalje, budemo li pakirali šećer u paketima mase 14 kg, spakovat ćemo ukupno $p \cdot 14$ kg šećera i ostat će još 180 kg nespakiranoga šećera. To znači da vrijedi jednakost:

$$m = p \cdot 14 + 180$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$m = (p - 10) \cdot 18,$$
$$m = p \cdot 14 + 180.$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Stoga je:

$$(p - 10) \cdot 18 = p \cdot 14 + 180,$$
$$18 \cdot p - 180 = 14 \cdot p + 180,$$
$$18 \cdot p - 14 \cdot p = 180 + 180$$
$$4 \cdot p = 360.$$

Odatle dijeljenjem s 4 dobivamo $p = 90$. Dakle, ukupan broj raspoloživih paketa jednak je 90, dok je ukupna masa šećera jednaka

$$m = (p - 10) \cdot 18 = (90 - 10) \cdot 18 = 80 \cdot 18 = 1\ 440\ \text{kg}.$$

27. $S_1(3,2)$ i $S_2\left(4,\ \frac{3}{2}\right)$. Tražene točke dobit ćemo rješavajući sustav jedne linearne i jedne kvadratne jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$x^2 + 4 \cdot y^2 = 25,$$
$$x + 2 \cdot y - 7 = 0.$$

Iz druge jednadžbe toga sustava je

$$x = 7 - 2 \cdot y.$$

Uvrštavanjem toga izraza u prvu jednadžbu sustava dobivamo redom:

$$(7 - 2 \cdot y)^2 + 4 \cdot y^2 = 25,$$
$$7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot y + (2 \cdot y)^2 + 4 \cdot y^2 = 25,$$
$$49 - 28 \cdot y + 4 \cdot y^2 + 4 \cdot y^2 - 25 = 0,$$
$$8 \cdot y^2 - 28 \cdot y + 24 = 0 \quad /:4$$
$$2 \cdot y^2 - 7 \cdot y + 6 = 0,$$
$$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} \Rightarrow y_1 = \frac{7+1}{4} = \frac{8}{4} = 2,\ y_2 = \frac{7-1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Pripadne vrijednosti varijable x su:

$$x_1 = 7 - 2 \cdot y_1 = 7 - 2 \cdot 2 = 7 - 4 = 3,$$
$$x_2 = 7 - 2 \cdot y_2 = 7 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 7 - 3 = 4.$$

Dakle, zadane krivulje se sijeku u točno dvije točke: $S_1(3,2)$ i $S_2\left(4,\ \frac{3}{2}\right)$

28. Označimo s N broj algi u trenutku otkrića. Nakon prvoga tjedna broj algi u jezeru bit će jednak

$$N_1 = N + \frac{15}{100} \cdot N = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot N,$$

nakon drugoga tjedna

$$N_2 = N_1 + \frac{15}{100} \cdot N_1 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot N_1 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot N = \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2 \cdot N,$$

nakon trećega tjedna

$$N_3 = N_2 + \frac{15}{100} \cdot N_2 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot N_2 = \left(1 + \frac{15}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{15}{100}\right)^2 \cdot N = \left(1 + \frac{15}{100}\right)^3 \cdot N,$$

te općenito nakon k – toga tjedna

$$N_k = \left(1+\frac{15}{100}\right)^k \cdot N = N \cdot 1.15^k$$

1.) 11.5. U gornju jednadžbu uvrstimo $N = 10$ i $k = 1$, pa dobijemo:

$$N_k = 10 \cdot 1.15^1 = 10 \cdot 1.15 = 11.5 \text{ grama.}$$

2.) 15.20875. U gornju jednadžbu uvrstimo $N = 10$ i $k = 3$, pa dobijemo:

$$N_3 = 10 \cdot 1.15^3 = 10 \cdot 1.520875 = 15.20875 \text{ grama.}$$

3.) U 50. tjednu. Tražimo najmanji prirodan broj k takav da je $N_k > 10\ 000$. Za $N = 10$ imamo redom:

$$\begin{aligned}
&10 \cdot 1.15^k > 10\ 000 \quad /:10\\
&1.15^k > 1\ 000 \quad /\log\\
&\log(1.15^k) > \log 1000\\
&k \cdot \log 1.15 > \log 10^3 \quad /:\log 1.15\\
&k > \frac{3}{\log 1.15} \approx 49.425152
\end{aligned}$$

Najmanji prirodan broj k koji zadovoljava posljednju nejednakost jest $k = 50$. Dakle, od 50. tjedna populacija rakocva početi će naglo rasti.

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) $S_1(1, 0)$, $S_2(4, 0)$. Apscise svih sjecišta grafa zadane funkcije s osi apscisa su realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$f(x) = 0$$
$$(x^2 - 5 \cdot x + 4) \cdot (x - 1) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Iz $x^2 - 5 \cdot x + 4 = 0$ primjenom Viète ovih formula (pitamo se koja dva realna broja zbrojena daju 5, a pomnožena 4) odmah dobivamo $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$, a iz $x - 1 = 0$ slijedi $x_3 = x_1 = 1$. Stoga su sve nultočke zadane funkcije $x_1 = 1$ i $x_2 = 4$, pa su tražene točke $S_1(1, 0)$ i $S_2(4, 0)$.

2.) $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$. Zadanu funkciju deriviramo prema pravilu za deriviranje umnoška dviju funkcija i zbroja funkcija:

$f'(x) = (x^2 - 5 \cdot x + 4)' \cdot (x - 1) + (x^2 - 5 \cdot x + 4) \cdot (x - 1)' = [(x^2)' - 5 \cdot (x)' + (4)'] \cdot (x - 1) + (x^2 - 5 \cdot x + 4) \cdot [(x)' - (1)'] = (2 \cdot x - 5 + 0) \cdot (x - 1) + (x^2 - 5 \cdot x + 4) \cdot (1 - 0) = (2 \cdot x - 5) \cdot (x - 1) + (x^2 - 5 \cdot x + 4) \cdot 1 = 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 2 \cdot x + 5 + x^2 - 5 \cdot x + 4 = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9.$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

3.) ⟨–∞, 1⟩ i ⟨3, +∞⟩. Interval(e) strogoga rasta zadane funkcije tvore sva rješenja nejednadžbe $f'(x) > 0$. Iz podzadatka **2.)** znamo da je $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9$. Stoga iz $3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 > 0$ dijeljenjem s 3, pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja, dobivamo kvadratnu nejednadžbu

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 > 0.$$

U rješenju zadatka **18. 2)** istaknuli smo da kvadratna funkcija kojoj je vodeći koeficijent strogo pozitivan realan broj poprima strogo negativne vrijednosti isključivo na otvorenom intervalu kojega određuju realne nultočke te funkcije. Stoga rješavamo kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 4 \cdot x + 3 = 0.$$

Primjenom Viète ovih formula (pitamo se koja dva realna broja zbrojena daju 4, a pomnožena 3) odmah dobivamo $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Stoga zaključujemo:

$$(f'(x) < 0) \Leftrightarrow (x \in \langle 1, 3 \rangle)$$
$$(f'(x) = 0) \Leftrightarrow (x \in \{1, 3\})$$

te konačno

$$(f'(x) > 0) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{R} \setminus [\langle 1, 3 \rangle \cup \{1, 3\}]) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{R} \setminus [1, 3]) \Leftrightarrow (x \in \langle -\infty, 1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle).$$

Dakle, zadana funkcija raste na dvama intervalima: $\langle -\infty, 1 \rangle$ i $\langle 3, +\infty \rangle$.

4.) strogi lokalni minimum –4 za $x = 3$; strogi lokalni maksimum 0 za $x = 1$. Kandidati za lokalne ekstreme su sva realna rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$, odnosno jednadžbe $3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9 = 0$. Tu jednadžbu riješili smo u podzadatku **3.)** i dobili $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Odredimo drugu derivaciju zadane funkcije:

$$f''(x) = [f'(x)]' = (3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 9)' = 3 \cdot (x^2)' - 12 \cdot (x') + (9)' = 3 \cdot 2 \cdot x^1 - 12 \cdot 1 = 6 \cdot x - 12.$$

Računamo $f''(x)$ za $x = 1$ i $x = 3$, te uspoređujemo izračunane vrijednosti s nulom:

$$f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0,$$
$$f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0.$$

Iz dobivenih rezultata zaključujemo:

– za $x = 1$ funkcija f poprima strogi lokalni maksimum. Taj maksimum je jednak:

$$f(1) = 0 \text{ (jer je 1 nultočka funkcije } f\text{)}.$$

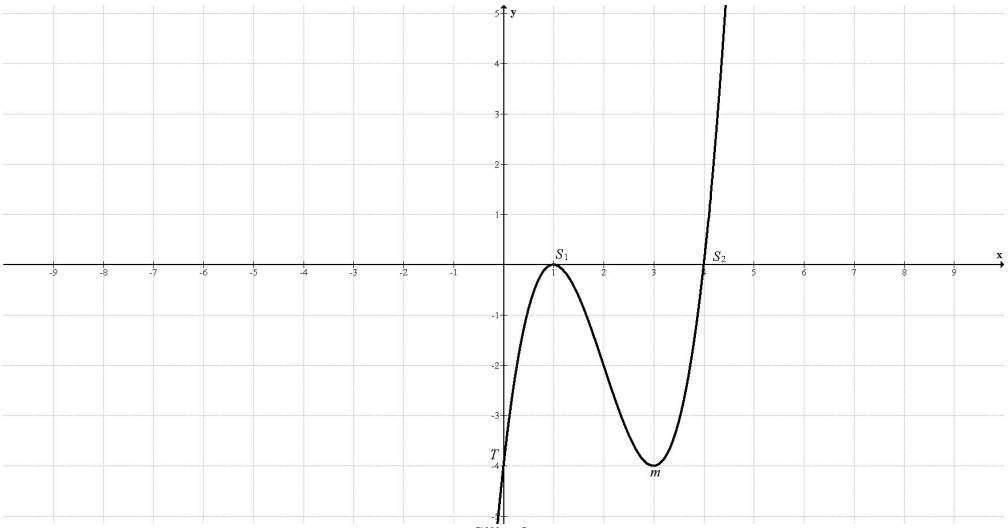
– za $x = 3$ funkcija f poprima strogi lokalni minimum. Taj minimum je jednak:

$$f(3) = (3^2 - 5 \cdot 3 + 4) \cdot (3 - 1) = (9 - 15 + 4) \cdot 2 = (-2) \cdot 2 = -4.$$

Grubo (i neprecizno) govoreći, možemo reći da f ima strogi lokalni minimum u točki $m(3, -4)$, a strogi lokalni maksimum u točki $S_1(1, 0)$.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2010. – VIŠA RAZINA

5.) Graf zadane funkcije prikazan je na Slici 3. Ucrtana su sjecišta grafa s osi apscisa izračunana u podzadatku **1.)**, te lokalni ekstremi izračunani u podzadatku **4.)** Korisno je primijetiti da je $f(0) = -4$, što znači da graf zadane funkcije siječe os y u točki $T(0, -4)$. Također, iz slike je razvidno da dobiveni lokalni ekstremi nisu i globalni ekstremi zadane funkcije.



Slika 3.

30. $\frac{23}{30}\cdot\sqrt{17} \approx 3.1610476$ **m/s.** Odredimo najprije jednadžbu pravca kroz točke A i T, tj. jednadžbu putanje prvoga automobila. Imamo redom:

$$p...y - 0 = \frac{0.7-0}{4.4-2}\cdot(x-2)$$

$$p...y = \frac{0.7}{2.4}\cdot(x-2)$$

$$p...y = \frac{7}{24}\cdot(x-2)$$

$$p...y = \frac{7}{24}\cdot x - \frac{7}{12}$$

Jedini mogući način za sudar automobila jest da su istodobno stigli u točku koja je sjecište njihovih putanja. U tu svrhu odredimo sjecište pravaca koji predstavljaju putanje automobila, tj. riješimo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$y=\frac{7}{24}\cdot x-\frac{7}{12}$$
$$y=-\frac{1}{4}\cdot x+4.4$$

Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Stoga slijedi:

$$\frac{7}{24}\cdot x-\frac{7}{12}=-\frac{1}{4}\cdot x+4.4$$
$$\frac{7}{24}\cdot x-\frac{7}{12}=-\frac{1}{4}\cdot x+\frac{44}{10}$$
$$\frac{7}{24}\cdot x-\frac{7}{12}=-\frac{1}{4}\cdot x+\frac{22}{5}\quad /\cdot 120$$
$$35\cdot x-70=-30\cdot x+528$$
$$35\cdot x+30\cdot x=528+70$$
$$65\cdot x=598\quad /:13$$
$$5\cdot x=46$$

Odatle dijeljenjem s 65 dobijemo $x=\frac{46}{5}$. Pripadna vrijednost varijable *y* jednaka je:

$$y=\frac{7}{24}\cdot\frac{46}{5}-\frac{7}{12}=\frac{322}{120}-\frac{7}{12}=\frac{322}{120}-\frac{70}{120}=\frac{252}{120}=\frac{21}{10}.$$

Dakle, modeli su se sudarili u točki $S\left(\frac{46}{5},\frac{21}{10}\right)$.

Nadalje, izračunajmo udaljenost točke sudara, tj. točke *S* od polazišta svakoga modela automobila:

$$d_A=d(S,A)=\sqrt{\left(2-\frac{46}{5}\right)^2+\left(0-\frac{21}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{10-46}{5}\right)^2+\left(-\frac{21}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{36}{5}\right)^2+\left(-\frac{21}{10}\right)^2}$$
$$d_A=\sqrt{\frac{1\,296}{25}+\frac{441}{100}}=\sqrt{\frac{5\,184}{100}+\frac{441}{100}}=\sqrt{\frac{5\,625}{100}}=\frac{75}{10}=\frac{15}{2}\ \text{m}$$
$$d_B=d(S,B)=\sqrt{\left(0-\frac{46}{5}\right)^2+\left(\frac{44}{10}-\frac{21}{10}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{46}{5}\right)^2+\left(\frac{23}{10}\right)^2}=\sqrt{\frac{2\,116}{25}+\frac{529}{100}}=\sqrt{\frac{8\,464}{100}+\frac{529}{100}}$$
$$d_B=\sqrt{\frac{8\,993}{100}}=\sqrt{\frac{17\cdot 529}{100}}=\sqrt{\frac{17\cdot 23^2}{10^2}}=\frac{23}{10}\cdot\sqrt{17}\ \text{m}$$

Izračunajmo brzinu modela *A*. Znamo da je taj automobil za jednu sekundu prevalio put od točke *A* do točke *T*. Udaljenost od točke *A* do točke *T* jednaka je

$$d_1 = d(A,T) = \sqrt{\left(\frac{44}{10}-2\right)^2 + \left(\frac{7}{10}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{44-20}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{24}{10}\right)^2 + \left(\frac{7}{10}\right)^2}$$

$$d_1 = \sqrt{\frac{576}{100} + \frac{49}{100}} = \sqrt{\frac{625}{100}} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} \text{ m}$$

pa zaključujemo da je brzina modela A jednaka $v_A = \frac{5}{2}$ m/s. Tom brzinom model A prešao je put od točke A do točke S dug $d_A = \frac{15}{2}$ m, pa je vrijeme potrebno za prevaljivanje toga puta

$$t = \frac{d_A}{v_A} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ sekunde.}$$

Dakle, oba modela automobila su do trenutka sudara vozila 3 sekunde jer su krenuli istodobno. U te 3 sekunde model B prevalio je put $d_B = \frac{23}{10} \cdot \sqrt{17}$ m. Stoga je tražena brzina modela B jednaka

$$v_B = \frac{d_B}{t} = \frac{\frac{23}{10} \cdot \sqrt{17}}{3} = \frac{23}{30} \cdot \sqrt{17} \approx 3.1610476 \text{ m/s.}$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, predavač