TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. **B.** 1 m ima 100 cm, pa 1 m^2 ima $100^2 = 10\,000 = 10^4$ cm^2. Stoga je $9.25 \cdot 10^{-3}$ $m^2 = 9.25 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 9.25 \cdot 10^{-3+4} = 9.25 \cdot 10^1 = 9.25 \cdot 10 = 92.5$ cm^2.

2. **D.** Zadanu jednadžbu napišimo u sljedećem obliku:

$$9 = 3 \cdot x^2 + 7 \cdot y^2$$
$$3 \cdot x^2 + 7 \cdot y^2 = 9 \quad /:9$$
$$\frac{3 \cdot x^2}{9} + \frac{7 \cdot y^2}{9} = 1$$
$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\frac{9}{7}} = 1$$

Iz posljednje jednadžbe vidimo da smo dobili krivulju čija jednadžba ima oblik $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje su $a^2 = 9$ i $b^2 = \frac{9}{7}$. Ta krivulja je elipsa sa središtem u ishodištu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Duljina njezine velike poluosi je $a = 3$, a duljina njezine male poluosi $b = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

3. **C.** Bilo koji jednakostraničan trokut ima sve kutove međusobno sukladne i mjera svakoga od njih je 60°. Prema poučku *K–K–K*, dva trokuta su međusobno slična ako se podudaraju u svim trima kutovima (primijetimo da je za utvrđivanje sličnosti dovoljno da se trokutovi podudaraju u dvama kutovima). Bilo koja dva jednakostranična trokuta se doista podudaraju u svim trima kutovima, pa zaključujemo da su bilo koja dva jednakostranična trokuta slična.

4. **B**. Primijenit ćemo sinusov poučak. Iz jednakosti

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

množenjem s $\sin\alpha \cdot \sin\beta$ slijedi

$$a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$$
$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a}$$

U ovu jednakost uvrstimo $\alpha = 74°$ i $a = 2 \cdot b$ (jer je stranica a, prema uvjetu zadatka, dvostruko dulja od stranice b), pa dobijemo:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin 74°}{2 \cdot b}$$
$$\sin\beta = \frac{\sin 74°}{2}$$
$$\sin\beta = 0.480630848$$

Ova trigonometrijska jednadžba u intervalu $\langle 0°, 180° \rangle$ ima dva rješenja: β_1 = 28°43'36" i β_2 = 180° – β_1 = 180° – 28°43'36" = 151°16'24". Rješenje β_2 ne dolazi u obzir jer kut nasuprot stranice b mora biti strogo manji od kuta nasuprot stranice a, tj. od kuta α = 74° budući da je stranica a dulja od stranice b, a znamo da se nasuprot veće stranice trokuta nalazi i veći kut. Stoga je jedino rješenje zadatka β = 26°43'36".

5. **A**. Imamo redom:

$$k \cdot (a+b) = c$$
$$k \cdot a + k \cdot b = c$$
$$k \cdot b = c - k \cdot a$$
$$b = \frac{c - k \cdot a}{k} = \frac{c - a \cdot k}{k}$$

6. **D.** Označimo s l duljinu lokomotive, c duljinu jednoga vagona cisterne, a s h duljinu jednoga vagona hladnjače. Iz podatka da je vagon hladnjače za 5 m kraći od vagona cisterne slijedi:

$$h = c - 5.$$

Nadalje, iz podatka da je duljina lokomotive jednaka zbroju duljina jednoga vagona cisterne i jednoga vagona hladnjače slijedi:

$$l = c + h.$$

Napokon, duljina cijeloga vlaka dobije se tako da se zbroje duljina lokomotive, duljina svih 40 vagona cisterni, duljina svih 30 vagona hladnjača, te ukupna duljina svih razmaka među elementima kompozicije vlaka. Duljina lokomotive jednaka je l, duljina svih 40 vagona cisterni jednaka je $40 \cdot c$, duljina svih 30 vagona hladnjača jednaka je $30 \cdot h$, a ukupna duljina svih razmaka među elementima kompozicije vlaka iznosi 70 metara (zbog jednakosti razmaka između lokomotive i prvoga vagona i razmaka između pojedinih vagona možemo zamisliti da kompozicija ima ukupno 1 + 40 + 30 = 71 vagon među kojima ima ukupno 71 – 1 = 70 razmaka duljine 1 metar). Stoga mora vrijediti jednakost:

$$l + 40 \cdot c + 30 \cdot h + 70 = 779.$$

Tako smo dobili sustav triju linearnih jednadžbi s tri nepoznanice:

$$h = c - 5$$
$$l = c + h$$
$$l + 40 \cdot c + 30 \cdot h + 70 = 779.$$

Oduzmemo li drugu jednadžbu od prve, dobit ćemo:

$$h - l = -5 - h,$$

a odatle je

$$2 \cdot h = l - 5,$$

odnosno množenjem s 15

$$30 \cdot h = 15 \cdot (l - 5).$$

Nadalje, zbrojimo li prvu i drugu jednadžbu, dobit ćemo:

$$h + l = 2 \cdot c - 5 + h,$$

odnosno

$$2 \cdot c = l + 5,$$

a odatle množenjem s 20 slijedi

$$40 \cdot c = 20 \cdot (l + 5).$$

Preostaje uvrstiti dobivene jednakosti

$$30 \cdot h = 15 \cdot (l - 5)$$
$$40 \cdot c = 20 \cdot (l + 5)$$

u jednadžbu

$$l + 40 \cdot c + 30 \cdot h + 70 = 779.$$

Dobivamo:

$$l + 20 \cdot (l + 5) + 15 \cdot (l - 5) + 70 = 779,$$
$$l + 20 \cdot l + 100 + 15 \cdot l - 75 + 70 = 779.$$
$$36 \cdot l = 779 - 100 + 75 - 70,$$
$$36 \cdot l = 684.$$

Odatle je $l = 19$. Dakle, duljina lokomotive jednaka je 19 metara.

7. B. Označimo zadane prirodne brojeve s x_1, x_2, …, x_6. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da vrijede stroge nejednakosti $x_1 < x_2 < \ldots < x_5 < x_6$. Iz podatka da je aritmetička sredina tih šest brojeva jednaka 6 dobivamo:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}=6$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=6\cdot 6$$
$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=36$$

Najmanja moguća vrijednost broja x_1 je $x_1 = 1$. Zbog toga je najmanja moguća vrijednost broja x_2 jednaka $x_2 = 2$. Analogno zaključujemo da je za svaki $i = 1, 2, 3, 4, 5$ najmanja moguća vrijednost broja x_i jednaka i, tj. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ i $x_5 = 5$ (jer su svi zadani brojevi prirodni i međusobno različiti). Stoga je najveća moguća vrijednost broja x_6 jednaka

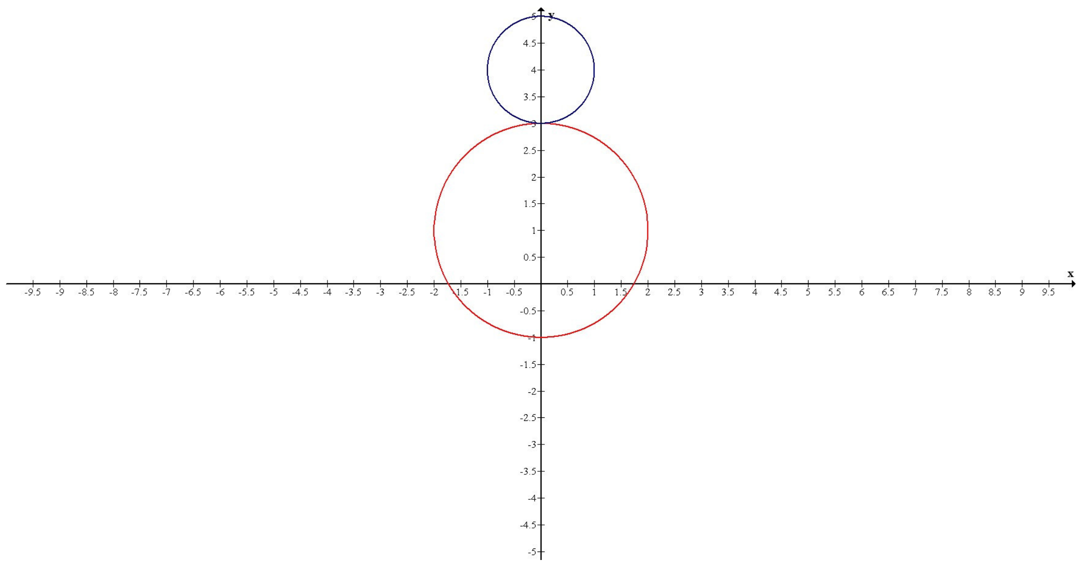
$$x_6 = 36 - (1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$x_6 = 36 - 15,$$
$$x_6 = 21.$$

8. **A.** Cjelobrojno podijelimo zadani broj s $2 \cdot \pi$. Dobivamo:

$$-\frac{65}{6}\cdot\pi=(-5)\cdot 2\cdot\pi-\frac{5}{6}\cdot\pi .$$

Dakle, da dobijemo točku jedinične brojevne kružnice kojoj odgovara zadani broj, moramo krenuti iz točke (1, 0) u smjeru kazaljke na satu (to nam govori predznak – ispred broja 5), napraviti 5 punih krugova i još $\frac{5}{6}$ ispruženoga kuta opet u smjeru kazaljke na satu (to nam govori predznak – ispred broja $\frac{5}{6}\cdot\pi$. Kad iz točke (1, 0) krenemo u smjeru kazaljke na satu i napravimo 5 punih krugova, opet ćemo doći u točku (1, 0). Potom iz te točke krećemo u smjeru kazaljke na satu praveći „koračaje“ „duge“ $\frac{1}{6}\cdot\pi$. U prvom „koračaju“ doći ćemo u točku C, u drugom u točku B, u trećem u točku (0, –1), u četvrtom u točku koja odgovara kutu mjere $-\frac{4}{6}\cdot\pi$, a u posljednjem, petom, „koračaju“, doći ćemo u točku A. Ta je točka ujedno i rješenje zadatka.

9. **B.** Jednakost $|z - i| = 2$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi čije su pripadne točke u Gaussovoj ravnini za $d = 2$ udaljene od točke (0, 1) (koja odgovara broju i). Interpretiramo li tu činjenicu u „običnom“ pravokutnom sustavu u ravnini, zaključit ćemo da prvu jednakost zadovoljavaju sve točke koje su za $d = 2$ udaljene od točke (0, 1). Te točke tvore kružnicu $x^2 + (y - 1)^2 = 4$. Analogno, jednakost $|z - 4 \cdot i| = 1$ zadovoljavaju svi kompleksni brojevi čije su pripadne točke u Gaussovoj ravnini za $d = 1$ udaljene od točke (0, 4) (koja odgovara broju $4 \cdot i$). U „običnom“ pravokutnom sustavu u ravnini radi se o točkama koje su za $d = 1$ udaljene od točke (0, 4), a te točke tvore kružnicu $x^2 + (y - 4)^2 = 1$. Nacrtamo li obje kružnice u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobit ćemo (vidjeti Sliku 1.; crvenom bojom nacrtana je kružnica $x^2 + (y - 1)^2 = 4$, a plavom kružnica $x^2 + (y - 4)^2 = 1$):



Slika 1.

Zaključujemo da se dobivene kružnice sijeku u točno jednoj točki ($T(0, 3)$), odnosno da jedino kompleksni broj $z = 3 \cdot i$ zadovoljava obje zadane jednakosti.

10. **C**. Imamo redom:

$$\log_a 24 = \log_a(3 \cdot 8) = \log_a 3 + \log_a 8 = \log_a 3 + \log_a(2^3) = \log_a 3 + 3 \cdot \log_a 2 = y + 3 \cdot x = 3 \cdot x + y.$$

11. **C**. Polumjer osnovke valjka r jednak je polumjeru pravilnom peterokutu upisane kružnice, dok je visina valjka h jednaka visini prizme, tj. $h = 8$ cm. Neka je a duljina osnovice pravilnoga peterokuta. Znamo da je $a = 6$. Središnji kut pravilnoga peterokuta jednak je $\alpha = \frac{360}{5} = 72°$. Iz karakterističnoga trokuta pravilnoga peterokuta (krakovi toga trokuta jednaki su polumjeru peterokutu opisane kružnice, kut koji zatvaraju ti krakovi jednak je α, duljina osnovice trokuta jednaka je a, a duljina visine na osnovicu jednaka je r) dobivamo:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\frac{a}{2}}$$

$$r = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

a odatle je

$$r^2 = \frac{a^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Tako je konačno:

$$V_{valjka} = r^2 \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{valjka} = \frac{a^2}{4} \cdot \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \pi \cdot h$$
$$V_{valjka} = \frac{6^2}{4} \cdot \text{ctg}^2 \frac{72°}{2} \cdot \pi \cdot 8$$
$$V_{valjka} = 72 \cdot \pi \cdot \text{ctg}^2 36°$$
$$V_{valjka} \approx 428.50933531 \text{ cm}^3 \approx 428.51 \text{ cm}^3$$

Napomena: Točna vrijednost obujma valjka jednaka je $V = \frac{72}{5} \cdot (5 + 2 \cdot \sqrt{5}) \cdot \pi$ cm^3. Naime, lako se vidi da za $\alpha = 18°$ vrijedi identitet

$$2 \cdot \alpha = 90° - 3 \cdot \alpha,$$

odnosno

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \cos(90° - 3 \cdot \alpha).$$

Primjenom adicijskoga poučka za funkciju kosinus dobiva se

$$\cos(2 \cdot \alpha) = \sin(3 \cdot \alpha),$$

a primjenom identiteta (koji vrijede za svaki $\alpha \in \mathbf{R}$)

$$\cos(2 \cdot \alpha) = 1 - 2 \cdot \sin^2\alpha,$$
$$\sin(3 \cdot \alpha) = 3 \cdot \sin\alpha - 4 \cdot \sin^3\alpha$$

dobiva se jednadžba

$$4 \cdot \sin^3\alpha - 2 \cdot \sin^2\alpha - 3 \cdot \sin\alpha + 1 = 0.$$

Tu jednadžbu možemo faktorizirati ovako:

$$4 \cdot \sin^3\alpha - 4 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin^2\alpha - 2 \cdot \sin\alpha - \sin\alpha + 1 = 0.$$
$$4 \cdot \sin^2\alpha \cdot (\sin\alpha - 1) + 2 \cdot \sin\alpha \cdot (\sin\alpha - 1) - (\sin\alpha - 1) = 0,$$
$$(\sin\alpha - 1) \cdot (4 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha - 1) = 0.$$

Za $\alpha = 18°$ očito ne vrijedi jednakost $\sin\alpha = 1$, pa slijedi da je $\alpha = 18°$ rješenje trigonometrijske jednadžbe

$$4 \cdot \sin^2\alpha + 2 \cdot \sin\alpha - 1 = 0.$$

Uz zamjenu $t = \sin\alpha$ dobivamo kvadratnu jednadžbu

$$4 \cdot t^2 + 2 \cdot t - 1 = 0.$$

Rješenja te jednadžbe su $t_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ i $t_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Rješenje t_1 je strogo negativan realan broj, a rješenje t_2 strogo pozitivan realan broj. Budući da je $\alpha = 18°$ kut u prvom kvadrantu, njegov je sinus strogo pozitivan realan broj, pa je jedino moguće

$$\sin 18° = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

Sada se lako dobiva

$$\cos 36^\circ = 1-2\cdot\sin^2 18^\circ = 1-2\cdot\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1-2\cdot\frac{5-2\cdot\sqrt{5}+1}{16} = \frac{4+4\cdot\sqrt{5}}{16} = \frac{1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\mathrm{ctg}^2 36^\circ = \frac{\cos^2 36^\circ}{\sin^2 36^\circ} = \frac{\cos^2 36^\circ}{1-\cos^2 36^\circ} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2} = \frac{\frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{16}}{1-\frac{1+2\cdot\sqrt{5}+5}{16}} = \frac{\frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{16}}{\frac{10-2\cdot\sqrt{5}}{16}} = \frac{6+2\cdot\sqrt{5}}{10-2\cdot\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(3+\sqrt{5})}{2\cdot(5-\sqrt{5})} = \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{(3+\sqrt{5})\cdot(5+\sqrt{5})}{(5-\sqrt{5})\cdot(5+\sqrt{5})} = \frac{20+8\cdot\sqrt{5}}{25-5} = \frac{4\cdot(5+2\cdot\sqrt{5})}{20} = \frac{5+2\cdot\sqrt{5}}{5}.$$

Stoga je

$$V_{valjka} = 72\cdot\pi\cdot\mathrm{ctg}^2 36^\circ = \frac{72}{5}\cdot(5+2\cdot\sqrt{5})\cdot\pi \text{ cm}^3.$$

12. A. Koristeći formule za razliku kvadrata, odnosno kub zbroja, imamo redom:

$$\left[\frac{4\cdot(a+b)}{(a-b)^3}-\frac{1}{a^2-b^2}\right]\cdot\left(\frac{a^2}{3\cdot a+b}+\frac{b^2}{a+3\cdot b}\right) = \left[\frac{4\cdot(a+b)}{(a-b)^3}-\frac{1}{(a-b)\cdot(a+b)}\right]\cdot\frac{a^2\cdot(a+3\cdot b)+b^2\cdot(3\cdot a+b)}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} =$$

$$= \frac{4\cdot(a+b)^2-(a-b)^2}{(a-b)^3\cdot(a+b)}\cdot\frac{a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} = \frac{\left[2\cdot(a+b)\right]^2-(a-b)^2}{(a-b)^3\cdot(a+b)}\cdot\frac{(a+b)^3}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} =$$

$$= \frac{\left[2\cdot(a+b)-(a-b)\right]\cdot\left[2\cdot(a+b)+(a-b)\right]}{(a-b)^3}\cdot\frac{(a+b)^2}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} = \frac{(2\cdot a+2\cdot b-a+b)\cdot(2\cdot a+2\cdot b+a-b)}{(a-b)^3}\cdot$$

$$\cdot\frac{(a+b)^2}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} = \frac{(a+3\cdot b)\cdot(3\cdot a+b)}{(a-b)^3}\cdot\frac{(a+b)^2}{(3\cdot a+b)\cdot(a+3\cdot b)} = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^3}$$

13. D. Prvu jednadžbu možemo zapisati u obliku $9^{3\cdot x-2} = 7^{6\cdot x-4}$, odnosno $(3^2)^{3\cdot x-2} = 7^{6\cdot x-4}$, odnosno $3^{6\cdot x-4} = 7^{6\cdot x-4}$, odnosno $\left(\frac{3}{7}\right)^{6\cdot x-4} = 1$, odnosno $\left(\frac{3}{7}\right)^{6\cdot x-4} = \left(\frac{3}{7}\right)^0$. Izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu $6\cdot x-4=0$ čije je jedinstveno rješenje $x=\frac{2}{3}$ i ono nije negativno.

Drugu jednadžbu najbrže i najlakše je riješiti geometrijski. Tražimo sve točke brojevnoga pravca koje su od točke $T(5)$ udaljene za 4. Te točke su očito točke pridružene brojevima $5-4=1$ i $5+4=9$, pa su sva rješenja druge jednadžbe $x_1=1$ i $x_2=9$. Niti jedno od njih nije negativan realan broj.

Iz treće jednadžbe kubiranjem dobivamo $x+4=2^3$, odnosno $x+4=8$, a otuda je $x=4$. Stoga niti ova jednadžba nema negativno rješenje.

Iz četvrte jednadžbe kvadriranjem i množenjem slijedi $5 = x^2 - 2 \cdot x + 1 - x^2 - 3 \cdot x$, odnosno $5 \cdot x = -4$. Odatle je $x = -\frac{4}{5}$, pa četvrta jednadžba ima točno jedno (a samim tim i barem jedno) negativno rješenje.

14. B. Zadani razlomak transformirajmo na sljedeći način:

$$\frac{2 \cdot n^2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{2 \cdot (n^2 - 1) + 2 + 1}{n^2 - 1} = \frac{2 \cdot (n^2 - 1)}{n^2 - 1} + \frac{3}{n^2 - 1} = 2 + \frac{3}{n^2 - 1}.$$

Stoga će vrijednost zadanoga razlomka biti cjelobrojna ako i samo ako vrijednosti izraza $n^2 - 1$ bude neki djelitelj broja 3. Svi cjelobrojni djelitelji broja 3 tvore skup $\{-3, -1, 1, 3\}$, pa zaključujemo da n^2 mora pripadati skupu $\{-3 + 1, -1 + 1, 1 + 1, 3 + 1\}$, odnosno skupu $\{-2, 0, 2, 4\}$. Budući da je, prema pretpostavci, n cijeli broj, jednakosti $n^2 = -2$ i $n^2 = 2$ nisu moguće, pa preostaju jednakosti $n^2 = 0$ i $n^2 = 4$. Ukupno tri cijela broja zadovoljavaju barem jednu od tih jednakosti: to su –2, 0 i 2.

15. C. Označimo s P_0 prvotnu površinu otoka, s V_0 prvotni broj vrsta na otoku, s P_1 površinu otoka preostalu nakon izgaranja, s V_1 broj vrsta preostalih na otoku nakon izgaranja, te s p traženi postotak. Uz te je oznake

$$p = \frac{V_1}{V} \cdot 100$$

jer tražimo koliko postotaka iznosi broj V_1 u odnosu na broj V.

Ako je 50% otoka izgorjelo, onda je površina preostaloga dijela otoka jednaka

$$P_1 = P - \frac{50}{100} \cdot P$$
$$P_1 = P - \frac{1}{2} \cdot P$$
$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot P$$

Prema pretpostavci zadatka moraju vrijediti jednakosti:

$$\log V = \log c + k \cdot \log P.$$
$$\log V_1 = \log c + k \cdot \log P_1.$$

Oduzmemo li drugu jednakost od prve, dobit ćemo:

$$\log V_1 - \log V = k \cdot (\log P_1 - \log P),$$

odnosno

$$\log \frac{V_1}{V} = k \cdot \log \frac{P_1}{P}$$
$$\log \frac{V_1}{V} = k \cdot \log \frac{\frac{1}{2} \cdot P}{P}$$
$$\log \frac{V_1}{V} = k \cdot \log \frac{1}{2}$$
$$\log \frac{V_1}{V} = \log \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\frac{V_1}{V} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
$$\frac{V_1}{V} = 2^{-k}$$
$$\frac{V_1}{V} \cdot 100 = 2^{-k} \cdot 100$$
$$\frac{V_1}{V} \cdot 100 = 2^{-k} \cdot 2^2 \cdot 25$$
$$\frac{V_1}{V} \cdot 100 = 2^{2-k} \cdot 25$$
$$p = 2^{2-k} \cdot 25$$

Uvrštavanjem $k = 0.323$ dobijemo:

$$p = 2^{2-0.323} \cdot 25 \approx \approx 79.940583.$$

Odatle slijedi da je procijenjeni postotak prvotnoga broja vrsta (u odnosu na prvotni broj vrsta) nakon što je izgorjelo 50% otoka približno jednak 79.94%.

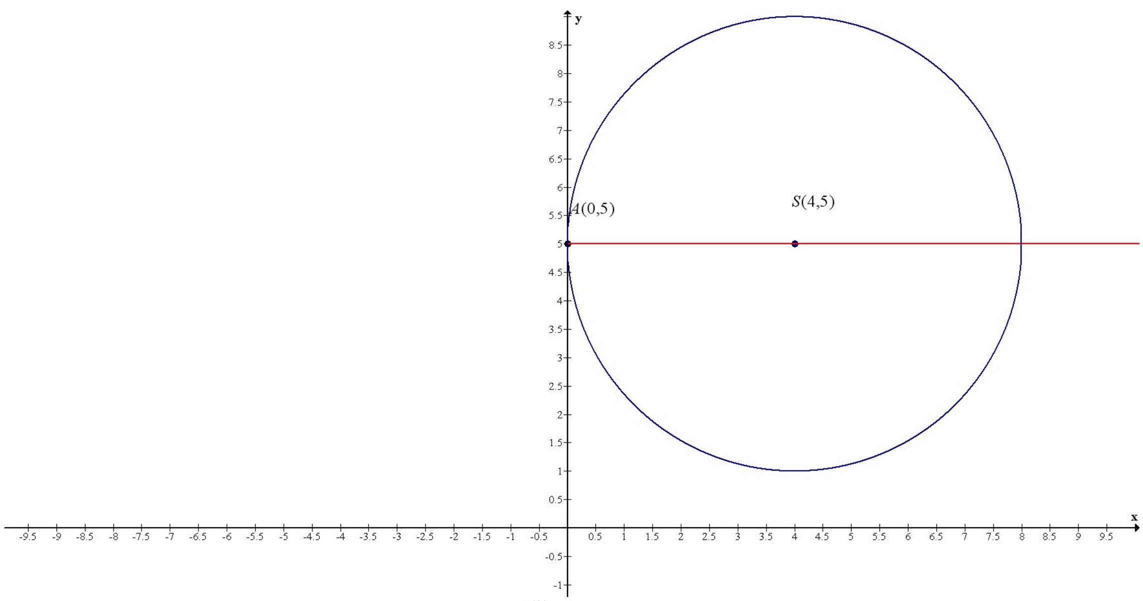
II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $2^{15 \cdot a + 6}$. Imamo redom:

$$8^{5 \cdot a + 2} = (2^3)^{5 \cdot a + 2} = 2^{3 \cdot (5 \cdot a + 2)} = 2^{15 \cdot a + 6}.$$

17. $(x-4)^2 + (y-5)^2 = 16$. Iz činjenice da kružnica dira os ordinata u točki $A(0, 5)$ slijedi da je pravac na kojemu leži promjer kružnice $p \ldots\ y = 5$. (Tražimo pravac okomit na os y koji siječe tu os u točki A.) Budući da se središte kružnice nalazi u prvom kvadrantu koordinatne ravnine, do njega ćemo doći tako da se iz točke $A(0, 5)$ pomaknemo udesno po pravcu $y = 5$ za $r = 4$ jedinice. Tako ćemo doći u točku $S(4, 5)$ i ta točka je središte kružnice. (Vidjeti Sliku 2.)
Preostaje napisati jednadžbu kružnice sa središtem u točki $S(4, 5)$ i polumjerom 4. Ona glasi:

$$k \ldots\ (x-4)^2 + (y-5)^2 = 16.$$



Slika 2.

18. 1.) –5. Pomnožimo polaznu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom svih algebarskih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s $4 \cdot (x + 1)$. Dobivamo redom:

$$5 \cdot (x+1) = 12 \cdot (x+1) - 4 \cdot (x-2)$$
$$5 \cdot x + 5 = 12 \cdot x + 12 - 4 \cdot x + 8$$
$$5 \cdot x - 12 \cdot x + 4 \cdot x = 12 + 8 - 5$$
$$(-3) \cdot x = 15$$

Dijeljenjem ove jednakosti s (–3) dobivamo $x = -5$.

2.) $\frac{5}{3} \cdot \pi$ **.** Prema pretpostavci je $x \in \langle 0,\, 2 \cdot \pi \rangle$, pa je $\frac{\pi}{3} + x \in \left\langle \frac{\pi}{3},\, \frac{7 \cdot \pi}{3} \right\rangle$ U intervalu $\left\langle \frac{\pi}{3},\, \frac{7 \cdot \pi}{3} \right\rangle$ jednadžba $\cos \alpha = 1$ ima jedinstveno rješenje $\alpha = 2 \cdot \pi$. Stoga redom dobivamo:

$$\frac{\pi}{3} + x = 2 \cdot \pi$$
$$x = 2 \cdot \pi - \frac{\pi}{3}$$
$$x = \frac{5}{3} \cdot \pi.$$

19. 1.) Vidjeti Sliku 3. Graf zadane funkcije je parabola. Koeficijent uz x^2 jednak je 1, pa će parabola imati oblik $\cup$.

Za crtanje parabole dovoljno je odrediti tri različite točke parabole, od kojih je jedna nužno tjeme parabole. Odredimo koordinate toga tjemena (označimo ga s T). „Očitamo“ koeficijente u kvadratnoj funkciji:

$$a = 1,\ b = 2,\ c = -3,$$

pa računamo koordinate tjemena:

$$T\left(-\frac{b}{2\cdot a},\ \frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}\right)$$

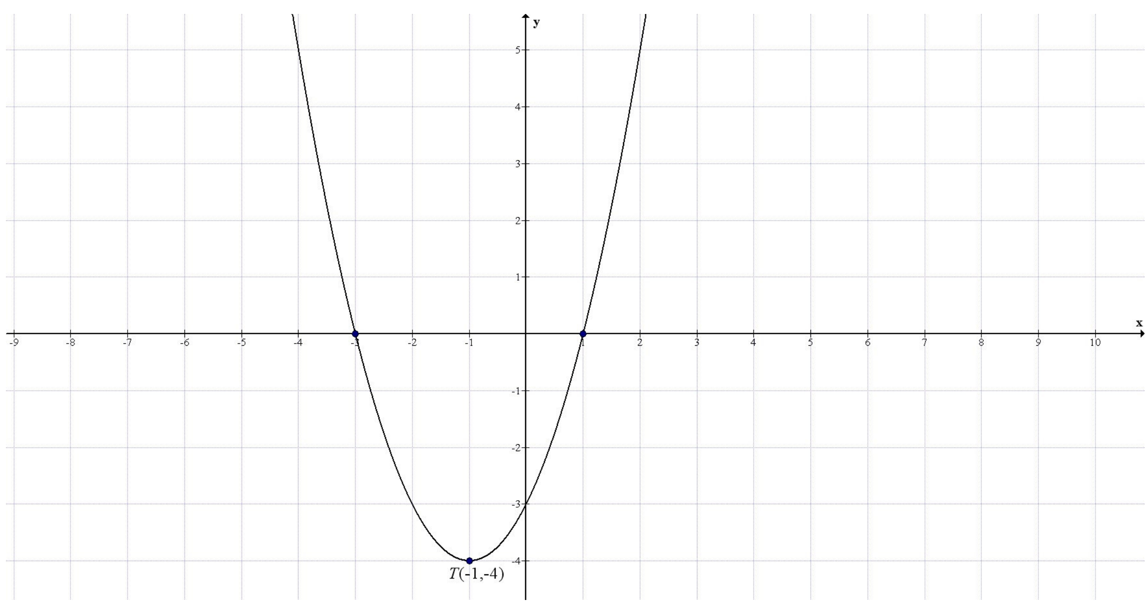
$$T\left(-\frac{2}{2\cdot 1},\ \frac{4\cdot 1\cdot(-3)-2^2}{4\cdot 1}\right)=\left(-\frac{2}{2},\ \frac{-12-4}{4}\right)=\left(-\frac{2}{2},\ \frac{-16}{4}\right)$$

$$T(-1,-4)$$

Budući da se tjeme nalazi u trećem kvadrantu, a parabola ima oblik $\cup$, zaključujemo da pripadna kvadratna funkcija sigurno ima dvije realne nultočke. Odredimo te nultočke. Rješavamo jednadžbu $f(x) = 0$:

$$x^2 + 2\cdot x - 3 = 0.$$

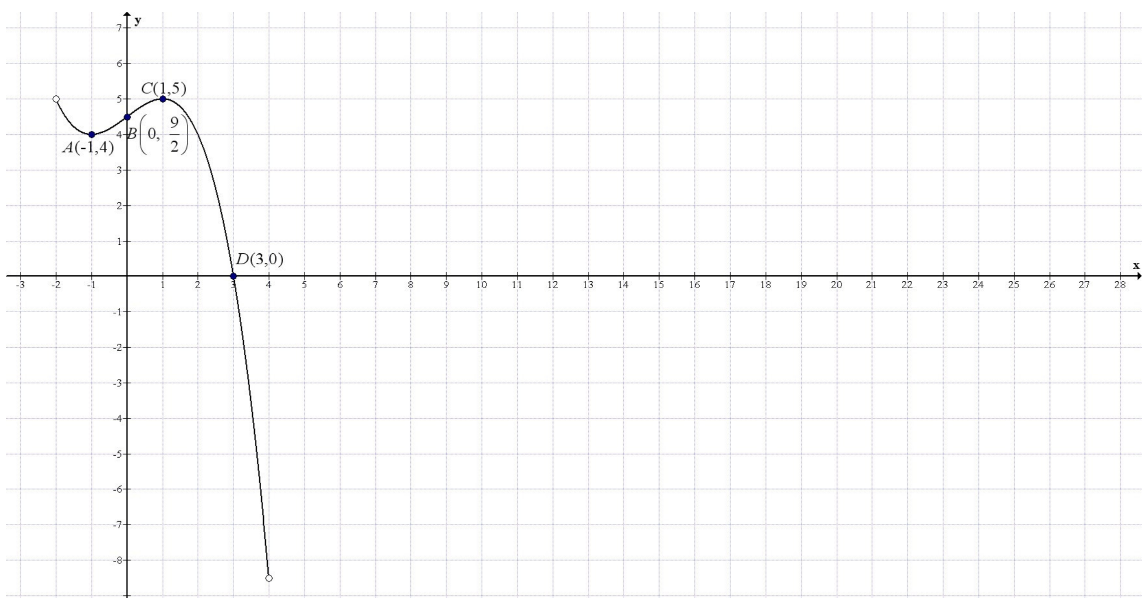
Tu jednadžbu najbrže rješavamo koristeći Vièteove formule: tražimo dva realna broja koja zbrojena daju -2, a pomnožena -3. Ti su brojevi očito $x_1 = -3$ i $x_2 = 1$. Stoga parabola siječe os x u točkama $S_1(-3, 0)$ i $S_2(1, 0)$. Time smo odredili sve tri različite točke potrebne za crtanje parabole.



Slika 3.

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

2.) Vidjeti Sliku 4. Iz podatka da je A točka lokalnoga minimuma, tj. da se minimum postiže za $x = -1$ zaključujemo da polinom p strogo pada na intervalu $\langle -2, -1\rangle$. Iz podatka da je C točka lokalnoga maksimuma, tj. da se maksimum postiže za $x = 1$ zaključujemo da polinom p strogo raste na intervalu $\langle -1, 1\rangle$ i strogo pada na intervalu $\langle 1, 4\rangle$. Njegov graf siječe os y u točki B, a os x u točki D. Navedeni zaključci dovoljni su za skicu grafa polinoma.



Slika 4.

Napomena: Točke označene bijelim kružićem **ne** pripadaju traženom grafu. Nije teško pokazati da je $p(x) = -\frac{1}{4}\cdot x^3 + \frac{3}{4}\cdot x + \frac{9}{2}$. Naime, pretpostavimo li da je $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$, onda iz zadanih podataka dobivamo sustav četiri jednadžbe s četiri nepoznanice:

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 4 \\ d = \frac{9}{2} \\ a + b + c + d = 5 \\ 27 \cdot a + 9 \cdot b + 3 \cdot c + d = 0 \end{cases}$$

čije rješenje je $(a,b,c,d) = \left(-\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{4},\ \frac{9}{2}\right)$.

20. 1.) 80.50. Cijenu kod plaćanja dobijemo tako da osnovnu cijenu povećamo za 23% njezine vrijednosti:

$$C_1 = C + \frac{23}{100}\cdot C$$

$$C_1 = 65.45 + \frac{23}{100}\cdot 65.45$$

Stoga je C_1 = 80.5035. Budući da je najmanja novčana jedinica u RH 1 lipa = 0.01 kn, dobiveni rezultat moramo zaokružiti na dvije decimale. Dakle, C_1 = 80.50 kn.

2.) **1.12.** Neka su C osnovna cijena proizvoda, P iznos PDV-a i S cijena proizvoda kod plaćanja. Tada vrijedi jednakost:

$$P = \frac{23}{100} \cdot C$$

iz koje je

$$C = \frac{100}{23} \cdot P \, .$$

Cijena kod plaćanja (S) jednaka je zbroju osnovne cijene proizvoda (C) i iznosa PDV-a (P):

$$S = C + P.$$

Uvrstimo li izraz $C = \frac{100}{23} \cdot P$ u ovu jednakost, dobit ćemo:

$$\begin{aligned} S &= \frac{100}{23} \cdot P + P \\ S &= P \cdot \left(\frac{100}{23} + 1 \right) \\ S &= P \cdot \frac{123}{23} \quad / : \frac{123}{23} \\ P &= \frac{23}{123} \cdot S \end{aligned}$$

Za S = 6.00 kn dobivamo traženi iznos PDV-a (zaokružen na dvije decimale zbog razloga kao u **1.**)):

$$\begin{aligned} P &= \frac{23}{123} \cdot 6 \\ P &= 1.121951 \approx 1.12 \end{aligned}$$

Dakle, iznos PDV-a jednak je 1.12 kn.

21. **1.)** **10.** Koeficijent uz x u *bilo kojoj* kvadratnoj jednadžbi čiji je vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) jednak 1, prema Vièteovim formulama, jednak je broju suprotnom od zbroja svih rješenja te kvadratne jednadžbe. Dakle,

$$b = -(x_1 + x_2) = -(-5 - 5) = -(-10) = 10.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

2.) $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle 4, +\infty \right\rangle$**.** Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku

$$2 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4 > 0.$$

Kvadratna funkcija $f(x) = 2 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4$ ima vodeći koeficijent (koeficijent uz x^2) jednak 1 i taj je broj strogo pozitivan. To znači da funkcija f poprima strogo pozitivne vrijednosti na intervalu koji se dobije kad se iz skupa **R** „izbaci“ segment kojega određuju realne nultočke funkcije f. Riješimo li jednadžbu

$$2 \cdot x^2 - 7 \cdot x - 4 = 0,$$

dobit ćemo:

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4)}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 32}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{7 \pm 9}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{7-9}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{7+9}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

Dakle, rješenje polazne nejednadžbe je skup $S = \mathbf{R} \setminus \left[\frac{1}{2},\ 4\right]$. Taj skup, zapisan kao unija dvaju intervala, glasi: $S = \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \left\langle 4, +\infty \right\rangle$.

22. 1.) $\frac{4}{5} \cdot y - 6$. U prvu jednakost uvrstimo drugu, pa dobijemo:

$$y = \frac{5 \cdot \left[(z+8) - 2\right]}{4} \quad / : \frac{5}{4}$$
$$\frac{4}{5} \cdot y = z + 8 - 2$$
$$\frac{4}{5} \cdot y = z + 6$$
$$z = \frac{4}{5} \cdot y - 6$$

2.) $\left\langle \frac{3}{2},\ \frac{11}{4} \right]$**.** Iz prve nejednadžbe odmah dobivamo

$$x > 1 + \frac{1}{2}$$
$$x > \frac{3}{2}$$

a iz druge redom slijedi:

$$\begin{aligned}&2\cdot x+10\geq 6\cdot x-1\\&2\cdot x-6\cdot x\geq -1-10\\&(-4)\cdot x\geq -11 \quad /:(-4)\\&x\leq \frac{11}{4}\end{aligned}$$

(**Oprez**: Prigodom dijeljenja nejednakosti strogo negativnim realnim brojem znak $\geq$ mijenja se u znak $\leq$ i obrnuto.) Dakle, rješenje zadanoga sustava su svi realni brojevi strogo veći od $\frac{3}{2}$ i jednaki ili manji od $\frac{11}{4}$. Ti brojevi tvore interval $\left\langle \frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right]$.

23. 1.) –*a*, –1, 1. Lijevu stranu jednadžbe najprije rastavimo u faktore na sljedeći način:

$$x^3 + a\cdot x^2 - x - a = x^2\cdot(x + a) - (x + a) = (x + a)\cdot(x^2 - 1) = (x + a)\cdot(x - 1)\cdot(x + 1).$$

Umnožak triju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od njih jednak nuli. Iz jednadžbe $x + a = 0$ slijedi $x = -a$. Iz jednadžbe $x - 1 = 0$ slijedi $x = 1$. Iz jednadžbe $x + 1 = 0$ slijedi $x = -1$. Prema tome, skup svih realnih rješenja polazne jednadžbe je $S = \{-a, -1, 1\}$.

2.) ⟨12, +∞⟩. Logaritamska funkcija $f(x) = \log(x - 2)$ definirana je za sve realne brojeve x takve da je $x - 2 > 0$, tj. za sve $x > 2$. Stoga u nastavku rješavamo nejednadžbu pretpostavljajući da je $x > 2$. Funkcija f je strogo rastuća realna funkcija, pa se antilogaritmiranjem (tj. potenciranjem lijeve i desne strane s bazom 10) znak nejednakosti neće promijeniti. Stoga je:

$$\begin{gathered}x - 2 > 10^1,\\x - 2 > 10,\\x > 10 + 2,\\x > 12.\end{gathered}$$

Svaki realan broj strogo veći od 12 ujedno je i strogo veći od 2, tj. pripada prirodnom području definicije funkcije f. Prema tome, rješenje zadatka je skup $S = \langle 12, +\infty\rangle$.

24. 1.) $a_1 = 2\cdot p - 2$. Prvi član zadanoga niza dobit ćemo uvrstimo li $n = 1$ u formulu za opći član niza. Tako dobivamo:

$$\begin{gathered}a_1 = 2\cdot(1 + p) - 4,\\a_1 = 2 + 2\cdot p - 4,\\a_1 = 2\cdot p - 2.\end{gathered}$$

2.) 5. Izraz za opći član zadanoga niza transformirajmo na sljedeći način:

$$a_n = 2\cdot(n + p) - 4,$$

$$a_n = 2 \cdot n + 2 \cdot p - 4\,,$$
$$a_n = (2 \cdot p - 2) + 2 \cdot n - 2.$$
$$a_n = (2 \cdot p - 2) + (n - 1) \cdot 2.$$

Odatle zaključujemo da je zadani niz aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = 2 \cdot p - 2$, a razlika $d = 2$. Izrazimo zbroj prvih n članova toga niza pomoću varijabli n i p:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot (2 \cdot p - 2) + (n-1) \cdot 2\right]$$
$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (4 \cdot p - 4 + 2 \cdot n - 2)$$
$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (4 \cdot p + 2 \cdot n - 6)$$

Prema uvjetu zadatka, za $n = 5$ mora biti $S_n = 60$. Uvrštavanjem tih podataka u posljednju jednakost dobijemo:

$$60 = \frac{5}{2} \cdot (4 \cdot p + 2 \cdot 5 - 6) \quad / : \frac{5}{2}$$
$$60 \cdot \frac{2}{5} = 4 \cdot p + 10 - 6$$
$$24 = 4 \cdot p + 4$$
$$24 - 4 = 4 \cdot p$$
$$4 \cdot p = 20$$

Odatle je $p = 5$. Dakle, za $p = 5$ je zbroj prvih pet članova zadanoga niza jednak 60.

25. 1.) ≈ 28°29'44'' ili ≈ 0.49734271 radijana. Očitajmo najprije koordinate svih triju vrhova zadanoga trokuta: $A(3, -3)$, $B(2, 1)$, $C(-3, 2)$. Odredimo vektore $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CA} = (x_A - x_C) \cdot \vec{i} + (y_A - y_C) \cdot \vec{j} = \left[3 - (-3)\right] \cdot \vec{i} + (-3 - 2) \cdot \vec{j} = 6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j},$$
$$\overrightarrow{CB} = (x_B - x_C) \cdot \vec{i} + (y_B - y_C) \cdot \vec{j} = \left[2 - (-3)\right] \cdot \vec{i} + (1 - 2) \cdot \vec{j} = 5 \cdot \vec{i} - \vec{j}.$$

Izračunajmo skalarni umnožak tih dvaju vektora, te duljinu svakoga od njih:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (6 \cdot \vec{i} - 5 \cdot \vec{j}) \cdot (5 \cdot \vec{i} - \vec{j}) = 6 \cdot 5 + (-5) \cdot (-1) = 30 + 5 = 35,$$
$$\left|\overrightarrow{CA}\right| = \sqrt{6^2 + (-5)^2} = \sqrt{36 + 25} = \sqrt{61},$$
$$\left|\overrightarrow{CB}\right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}.$$

Kosinus traženoga kuta jednak je količniku skalarnoga umnoška vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ i umnoška duljina tih dvaju vektora:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|}$$
$$\cos\varphi = \frac{35}{\sqrt{61}\cdot\sqrt{26}}$$
$$\cos\varphi = \frac{35}{61\cdot 26}\cdot\sqrt{61}\cdot\sqrt{26}$$
$$\cos\varphi = \frac{35}{1586}\cdot\sqrt{1586}$$

Jedino rješenje ove trigonometrijske jednadžbe u intervalu $\langle 0,\ 180°\rangle$ je $\varphi = 28.4956386° \approx 28°29'44''$ ili $\varphi \approx 0.49734271$ radijana.

2.) ≈ 2.43 cm. Izračunajmo najprije površinu trokuta *ABC* pomoću koordinata vrhova toga trokuta:

$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|x_A\cdot(y_B - y_C) + x_B\cdot(y_C - y_A) + x_C\cdot(y_A - y_B)\right|$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|3\cdot(1-2) + 2\cdot\left[2-(-3)\right] + (-3)\cdot(-3-1)\right|$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|3\cdot(-1) + 2\cdot 5 + (-3)\cdot(-4)\right|$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|-3+10+12\right|$$
$$P_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot\left|19\right|$$
$$P_{ABC} = \frac{19}{2}\ \text{kv. jed.}$$

Duljina stranice $\overline{AC}$ jednaka je udaljenosti točaka *A* i *C*:

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-3-3)^2 + \left[2-(-3)\right]^2} = \sqrt{(-6)^2 + 5^2} = \sqrt{36+25} = \sqrt{61}\,.$$

Tako iz

$$P = \frac{1}{2}\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot v$$

slijedi

$$v = \frac{2 \cdot P}{|AB|} = \frac{2 \cdot \frac{19}{2}}{\sqrt{61}} = \frac{19}{\sqrt{61}} = \frac{19}{61} \cdot \sqrt{61} \approx 2.4327 \text{ cm}.$$

3.) $\overrightarrow{AB} = (-1) \cdot \vec{i} + 4 \cdot \vec{j}.$**.** Odmah imamo:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A) \cdot \vec{i} + (y_B - y_A) \cdot \vec{j} = (2-3) \cdot \vec{i} + [1-(-3)] \cdot \vec{j} = -\vec{i} + 4 \cdot \vec{j}.$$

26. 2; $-\frac{\pi}{6}$. Primijetimo odmah da za vrijednosti varijabli A i C vrijede nejednakosti $A > 0$ i $C < 0$. Naime, A je vrijednost amplitude zadane harmonijske funkcije i ona je uvijek strogo pozitivan realan broj. C je pomak u fazi zadane harmonijske funkcije, tj. vrijednost za koju smo osnovnu sinusoidu pomakli po osi x ulijevo ili udesno. Ovdje je osnovna sinusoida očito pomaknuta udesno jer umjesto u točki (0, 0) siječe os x u točki čija je apscisa strogo veća od nule. Zbog toga je vrijednost varijable C strogo manja od nule. (Da smo osnovnu sinusoidu pomaknuli po osi x ulijevo, vrijednost varijable C bila bi strogo veća od nule.)
Vrijednost amplitude A jednaka je najvećoj vrijednosti koju poprima zadana funkcija. Sa slike se vidi da je ta najveća vrijednost jednaka 2. Dakle, $A = 2$.
Nadalje, graf zadane funkcije očito prolazi točkom $T(0, -1)$. U propis funkcije uvrstimo $x = 0$, $f(x) = 1$ i $A = 2$, pa dobijemo:

$$-1 = 2 \cdot \sin(0 + C).$$

Odatle je $\sin C = -\frac{1}{2}$. Najveće strogo negativno rješenje ove jednadžbe je $C = -\frac{\pi}{6}$. Dakle, $A = 2$, $C = -\frac{\pi}{6}$.

***Napomena*: Uz zadane uvjete zadatak nema jedinstveno rješenje. Još neka rješenja zadatka su npr. $A = 2$, $C = \frac{11}{6} \cdot \pi$, tj. $f(x) = 2 \cdot \sin\left(x + \frac{11}{6} \cdot \pi\right)$, te $A = -2$, $C = \frac{5}{6} \cdot \pi$, tj. $f(x) = (-2) \cdot \sin\left(x + \frac{5}{6} \cdot \pi\right)$. Da bi se dobilo službeno rješenje, treba dodati uvjete $A > 0$ i npr. $C \in \langle -\pi, \pi \rangle$.**

Primjedba: Pretpostavimo da je zadana harmonijska funkcija $f(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + c)$, pri čemu, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da vrijede nejednakosti A, $\omega > 0$. Doista, ako vrijede nejednakosti $A < 0$ ili $\omega < 0$, onda primjenom svojstva neparnosti funkcije sinus i identiteta $\sin x = \sin(\pi - x)$ možemo postići da oba parametra A i ω budu pozitivna. Neka je x_0 najveća strogo negativna točka u kojoj funkcija f poprima lokalni ekstrem, a x_1 najmanja strogo pozitivna točka u kojoj funkcija f poprima lokalni ekstrem. (Takve točke sigurno postoje, što slijedi iz aksiomatike definiranja skupa **R** u koju ovdje nećemo ulaziti.) Tvrdimo da tada funkcija f siječe os x u točki $T\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, 0\right)$ i da se za vrijednost parametra c može uzeti vrijednost izraza $-\omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2}$.
Bez smanjenja općenitost možemo pretpostaviti da vrijede jednakosti $f(x_0) = A$, $f(x_1) = -A$. To znači da vrijede jednakosti:

$$A = A \cdot \sin(\omega \cdot x_0 + c),$$
$$-A = A \cdot \sin(\omega \cdot x_1 + c).$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

Zbrajanjem ovih jednakosti dobijemo:

$$0 = A \cdot [\sin(\omega \cdot x_0 + c) + \sin(\omega \cdot x_1 + c)].$$

Prema pretpostavci je $A > 0$, pa dijeljenjem posljednje jednakosti s A dobijemo:

$$\sin(\omega \cdot x_0 + c) + \sin(\omega \cdot x_1 + c) = 0.$$

Primjenom formule za pretvorbu zbroja sinusa u umnožak dobivamo:

$$2 \cdot \sin\left(\frac{\omega \cdot x_0 + \omega \cdot x_1 + 2 \cdot c}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot x_0 - \omega \cdot x_1}{2}\right) = 0 ,$$

odnosno

$$2 \cdot \sin\left(\omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2} + c\right) \cdot \cos\left(\frac{\omega \cdot x_0 - \omega \cdot x_1}{2}\right) = 0 .$$

Izjednačimo li prvi faktor s nulom, dobijemo:

$$\sin\left(\omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2} + c\right) = 0$$
$$\omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2} + c = k \cdot \pi$$
$$c = k \cdot \pi - \omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2},\ k \in \mathbf{Z}$$

Stoga za vrijednost parametra c možemo uzeti bilo koji broj oblika $k \cdot \pi - \omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2},\ k \in \mathbf{Z}$. Posebno, za $k = 0$ dobivamo $c = -\omega \cdot \frac{x_0 + x_1}{2}$. To znači da je $f(x) = A \cdot \sin\left[\omega \cdot \left(x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right)\right]$, pa za $x = \frac{x_0 + x_1}{2}$ dobivamo $f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = 0$, što znači da graf funkcije f siječe os x u točki $T\left(\frac{x_0 + x_1}{2}, 0\right)$. Time je tvrdnja dokazana.

27. **1.)** $\sqrt{193}$ Trokut AED je pravokutan trokut s pravim kutom u vrhu A. Duljine njegovih kateta su $|AE| = |AB| + |BE| = 7 + 5 = 12$ cm i $|AD| = 7$ cm. Tražimo duljinu njegove hipotenuze $|DE|$. Prema Pitagorinu poučku je

$$|DE| = \sqrt{|AE|^2 + |AD|^2} = \sqrt{12^2 + 7^2} = \sqrt{144 + 49} = \sqrt{193} \text{ cm.}$$

2.) **7 : 5 .** Trokutovi BEH i AED su slični prema poučku $K - K$ (imaju jedan zajednički šiljasti kut kod vrha D i točno jedan pravi kut). Stoga možemo postaviti razmjer:

$$|BE| : |BH| = |AE| : |AD|.$$

Odavde je

$$|BH| = \frac{|BE| \cdot |AD|}{|AE|} .$$

Stoga je

$$|HG| = |BG| - |BH|,$$
$$|HG| = |BG| - \frac{|BE| \cdot |AD|}{|AE|},$$

što zbog jednakosti $|BG| = |BE|$ (stranice istoga kvadrata) možemo zapisati u obliku

$$|HG| = |BE| - \frac{|BE| \cdot |AD|}{|AE|},$$
$$|HG| = \frac{|BE|}{|AE|} \cdot (|AE| - |AD|),$$
$$|HG| = \frac{|BE|}{|AE|} \cdot (|AB| + |BE| - |AD|),$$

a ta je jednakost, zbog jednakosti $|AB| = |AD|$ (stranice istoga kvadrata) ekvivaletna s

$$|HG| = \frac{|BE|^2}{|AE|}.$$

Tako konačno dobivamo:

$$\frac{|BH|}{|HG|} = \frac{\frac{|BE| \cdot |AD|}{|AE|}}{\frac{|BE|^2}{|AE|}},$$
$$\frac{|BH|}{|HG|} = \frac{|AD|}{|BE|}.$$

Budući da je $|AD| = 7$, $|BE| = 5$, traženi je omjer jednak 7 : 5.

28. 1.) . Odredimo najprije sjecište zadanih pravaca, tj. riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 3 \cdot x + 4 \cdot y - 24 = 0, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu sustava s 6. Dobivamo:

$$3 \cdot x - 2 \cdot y = 6,$$

a odavde je

$$3 \cdot x = 2 \cdot y + 6.$$

Ovu jednakost uvrstimo u prvu jednadžbu sustava, pa dobijemo:

$$2 \cdot y + 6 + 4 \cdot y - 24 = 0,$$
$$6 \cdot y = 18.$$

Odavde dijeljenjem s 6 dobivamo $y = 3$. Uvrstimo tu vrijednost u izraz $3 \cdot x = 2 \cdot y + 6$, pa dobijemo:

$$3 \cdot x = 2 \cdot 3 + 6,$$
$$3 \cdot x = 12,$$

a odavde je $x = 4$. Stoga je sjecište zadanih pravaca točka $S(4,3)$.

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkama T i S:

$$p \ldots y - 3 = \frac{3-3}{6-4} \cdot (x-6)$$
$$p \ldots y - 3 = 0 \cdot (x-6)$$
$$p \ldots y - 3 = 0$$
$$p \ldots y = 3$$

Dakle, traženi pravac je $p \ldots y = 3$.

2.) $(-12 \cdot \sqrt{2}, 0)$; $(12 \cdot \sqrt{2}, 0)$**.** Podijelimo lijevu i desnu stranu zadane jednadžbe hiperbole sa 144, pa dobijemo:

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{144} = 1.$$

Odatle očitamo kvadrat duljine velike, odnosno kvadrat duljine male poluosi hiperbole:

$$a^2 = b^2 = 144.$$

Stoga su žarišta hiperbole:

$$F_1(-\sqrt{a^2+b^2}, 0) = (-\sqrt{144+144}, 0) = (-\sqrt{2 \cdot 144}, 0) = (-\sqrt{144} \cdot \sqrt{2}, 0) = (-12 \cdot \sqrt{2}, 0),$$
$$F_2(\sqrt{a^2+b^2}, 0) = (\sqrt{144+144}, 0) = (\sqrt{2 \cdot 144}, 0) = (\sqrt{144} \cdot \sqrt{2}, 0) = (12 \cdot \sqrt{2}, 0).$$

Dakle,

$$F_{1,2} = \left(\pm 12 \cdot \sqrt{2}, 0\right)$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

3.) $5.21553 \cdot 10^{12}$. Neka je a duljina velike poluosi elipse, a e njezin linearni ekscentricitet. Iz podatka o numeričkom ekscentricitetu slijedi:

$$\frac{e}{a} = 0.967\,.$$

Najkraća udaljenost neke točke na elipsi od žarišta te elipse postiže se kad se ta točka nalazi na onom kraju male poluosi elipse kojoj pripada dotično žarište[1]. Tada je ta udaljenost jednaka razlici duljine velike poluosi elipse i linearnoga ekscentriciteta elipse (tj. razlici duljinâ dužina $|OB$ i $|OF_1|$, gdje je O ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava, OB velika poluos elipse, a F_1 ono žarište elipse koje pripada dužini OB). U našem je slučaju:

$$a - e = 8.75 \cdot 10^{10}.$$

Najveća udaljenost točke na elipsi od dotičnoga žarišta postiže se kad je točka na drugom kraju velike osi elipse kojoj pripada to žarište[2]. Preciznije, ako je AB velika os elipse (čije je polovište u ishodištu O koordinatnoga sustava) i ako je $F_1 \in OB$, onda se najveća udaljenost točke na elipsi od žarišta F_1 postiže kad je ta točka jednaka točki A i tada je tražena udaljenost jednaka

$$d = |AF_1| = |OA| + |OF_1| = a + e.$$

Iz jednakosti $\frac{e}{a} = 0.967$ slijedi

$$e = 0.967 \cdot a,$$

pa uvrštavanjem u jednakost $a - e = 8.75 \cdot 10^{10}$ dobijemo:

$$a - 0.967 \cdot a = 8.75 \cdot 10^{10},$$
$$0.033 \cdot a = 8.75 \cdot 10^{10}.$$

Stoga je konačno

$$d = a + e,$$
$$d = a + 0.967 \cdot a,$$
$$d = 1.967 \cdot a,$$
$$d = \frac{1.967}{0.033} \cdot (0.033 \cdot a)$$
$$d = \frac{1.967}{0.033} \cdot 8.75 \cdot 10^{10} \approx 521.553 \cdot 10^{10} = 5.21553 \cdot 10^{2} \cdot 10^{10} = 5.21553 \cdot 10^{12} \text{ m.}$$

[1] Dokaz ove tvrdnje vidjeti u Dodatku.
[2] Dokaz ove tvrdnje vidjeti u Dodatku.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) D_f **= R**, x **= 3, -7.969.** Eksponencijalna funkcija 2^x definirana je za svaki realan broj x. Konstantna funkcija 8 definirana je za svaki realan broj x. Stoga je i razlika $f(x) = 2^x - 8$ definirana za svaki realan broj x, pa je traženo prirodno područje definicije skup **R**.

Nadalje, sve realne nultočke zadane funkcije su realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$2^x - 8 = 0,$$
$$2^x = 8,$$
$$2^x = 2^3,$$

pa izjednačavanjem eksponenata dobivamo $x = 3$. Stoga je jedina realna nultočka zadane funkcije $x = 3$.

Napokon, $f(-5) = 2^{-5} - 8 = \frac{1}{2^5} - 8 = \frac{1}{32} - 8 = \frac{1-32\cdot 8}{32} = -\frac{-255}{32} = -7.96875$. Zaokružimo li ovaj broj na tri decimale, dobivamo $f(-5) \approx -7.969$. (Treću decimalu moramo povećati za 1 jer je četvrta decimala (to je znamenka 7) jednaka ili veća od 5.)

2.) sin x + x · cos x. Zadanu funkciju deriviramo prema pravilu za deriviranje umnoška dviju funkcija:

$$f'(x) = (x)' \cdot \sin x + x \cdot (\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x.$$

3.) 1. Odredimo najprije stacionarne točke zadane funkcije. Izračunajmo njezinu prvu i drugu derivaciju primjenom pravila za deriviranje zbroja funkcija i pravila za deriviranje umnoška konstante i funkcije:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot(x^3)' - \frac{1}{2}\cdot(x^2) - (6)'$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^{2-1} - 0$$
$$f'(x) = x^2 - x^1$$
$$f'(x) = x^2 - x$$
$$f''(x) = (x^2)' - (x^1)'$$
$$f''(x) = 2\cdot x^{2-1} - 1\cdot x^{1-1}$$
$$f''(x) = 2\cdot x^1 - 1\cdot x^0$$
$$f''(x) = 2\cdot x - 1$$

Tako smo dobili:

$$f'(x) = x^2 - x,$$
$$f''(x) = 2\cdot x - 1.$$

Stacionarne točke zadane funkcije su ona rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$ koja pripadaju prirodnu području definicije funkcije f. Budući da je f polinom trećega stupnja, njezino prirodno područje definicije je skup **R** (jer je prirodno područje definicije *svakoga* polinoma skup **R**). Stoga su stacionarne točke funkcije f realna rješenja jednadžbe $f'(x) = 0$.

Iz $f'(x) = 0$ slijedi

$$x^2 - x = 0,$$
$$x \cdot (x - 1) = 0.$$

Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Tako odmah dobivamo $x_1 = 0$, dok iz $x - 1 = 0$ slijedi $x_2 = 1$. Stoga su stacionarne točke $x_1 = 0$ i $x_2 = 1$.

Izračunajmo vrijednosti druge derivacije funkcije f u stacionarnim točkama:

$$f''(0) = 2 \cdot 0 - 1 = -1,$$
$$f''(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1.$$

Budući da je $f''(0) = -1 < 0$, zaključujemo da funkcija f postiže lokalni maksimum za $x = 0$. Taj maksimum jednak je $f(0) = -6$. Analogno, iz $f''(1) = 1 > 0$ slijedi da funkcija f postiže lokalni minimum za $x = 1$. Taj minimum jednak je $f(1) = -\frac{37}{6}$.

4.) [–3, +∞⟩. Prirodno područje definicije (D_f) zadane funkcije je skup **R**, tj. funkcija je definirana za svaki realan broj x. Nadalje, za svaki $x \in$ **R** vrijedi nejednakost $|x + 1| \geq 0$, pri čemu se znak jednakosti postiže za $x = -1$. Od lijeve i desne strane ove nejednakosti oduzmemo 3, pri čemu se znak nejednakosti neće promijeniti. Dobijemo:

$$|x + 1| - 3 \geq 0 - 3,$$

a odatle izravno slijedi:

$$f(x) \geq -3, \text{ za svaki } x \in \mathbf{R},$$

tj.

$$f(x) \geq -3, \text{ za svaki } x \in D_f.$$

To znači da sliku funkcije f tvore svi realni brojevi jednaki ili veći od –3. Ti realni brojevi tvore interval $[-3, +\infty\rangle$. Dakle, $\mathrm{Im}(f) = [3, +\infty\rangle$.

5.) $125 \cdot \sqrt{5} \approx 279.508497$. Imamo redom:

$$(f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f(\log_5 x) = 2 \cdot \log_5 x .$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

Iz uvjeta $(f \circ g)(x) = 7$ slijedi:

$$2 \cdot \log_5 x = 7,$$
$$\log_5 x = \frac{7}{2},$$
$$x = 5^{\frac{7}{2}},$$
$$x = \sqrt{5^7} = \sqrt{5^6 \cdot 5} = \sqrt{5^6} \cdot \sqrt{5} = 5^3 \cdot \sqrt{5} = 125 \cdot \sqrt{5},$$
$$x \approx 279.508497.$$

30. **≈ 58.5217.** Neka je r polumjer unutrašnje (manje) kružnice kružnoga vijenca, a α središnji kut naznačenoga kružnoga isječka. Tada očito vrijede jednakosti:

$$\begin{cases} l_1 = \dfrac{r \cdot \pi \cdot \alpha}{180°} \\ l_2 = \dfrac{(r+d) \cdot \pi \cdot \alpha}{180°} \end{cases}$$

Dijeljenjem tih jednakosti dobijemo:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{r}{r+d},$$
$$(r+d) \cdot l_1 = r \cdot l_2,$$
$$r \cdot l_1 + d \cdot l_1 = r \cdot l_2,$$
$$r \cdot l_2 - r \cdot l_1 = d \cdot l_1,$$
$$r \cdot (l_2 - l_1) = d \cdot l_1,$$
$$r = \frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1}.$$

Sada iz prve jednakosti slijedi:

$$\alpha = \frac{180° \cdot l_1}{r \cdot \pi},$$
$$\alpha = \frac{180° \cdot l_1}{\frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1} \cdot \pi}, \qquad .$$
$$\alpha = \frac{180° \cdot (l_2 - l_1)}{d \cdot \pi}.$$

Najveći mogući broj etiketa koje možemo izrezati jednak je

$$n_{max} = \left\lfloor \frac{360°}{\alpha} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{360°}{\frac{180° \cdot (l_2 - l_1)}{d \cdot \pi}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 \cdot d \cdot \pi}{l_2 - l_1} \right\rfloor,$$

gdje je s $\lfloor \; \rfloor$ označena funkcija „najveće cijelo“ koja svakom realnom broju x pridružuje najveći cijeli broj jednak ili manji od x.

Površina jedne etikete iznosi

$$P_e = \frac{1}{2} \cdot (r + d) \cdot l_2 - \frac{1}{2} \cdot r \cdot l_1,$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1} + d \right) \cdot l_2 - \frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1} \cdot l_1 \right],$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{d \cdot l_1 + d \cdot l_2 - d \cdot l_1}{l_2 - l_1} \right) \cdot l_2 - \frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1} \cdot l_1 \right],$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d \cdot l_2^2}{l_2 - l_1} - \frac{d \cdot l_1^2}{l_2 - l_1} \right),$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot (l_2^2 - l_1^2)}{l_2 - l_1},$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot \frac{d \cdot (l_2 - l_1) \cdot (l_2 + l_1)}{l_2 - l_1},$$
$$P_e = \frac{1}{2} \cdot d \cdot (l_2 + l_1).$$

Površina cijeloga recikliranoga kartona jednaka je

$$P_k = (r + d)^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi,$$
$$P_k = r^2 \cdot \pi + 2 \cdot r \cdot d \cdot \pi + d^2 \cdot \pi - r^2 \cdot \pi,$$
$$P_k = 2 \cdot r \cdot d \cdot \pi + d^2 \cdot \pi,$$
$$P_k = (2 \cdot r + d) \cdot d \cdot \pi,$$
$$P_k = \left(2 \cdot \frac{d \cdot l_1}{l_2 - l_1} + d \right) \cdot d \cdot \pi,$$
$$P_k = \left(\frac{2 \cdot d \cdot l_1 + d \cdot l_2 - d \cdot l_1}{l_2 - l_1} \right) \cdot d \cdot \pi,$$

$$P_k = \left(\frac{d \cdot l_1 + d \cdot l_2}{l_2 - l_1} \right) \cdot d \cdot \pi,$$

$$P_k = \frac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1} \cdot d^2 \cdot \pi.$$

Stoga je tražena površina ostatka jednaka:

$$P = P_k - n_{\max} \cdot P_e,$$

$$P = \frac{l_2 + l_1}{l_2 - l_1} \cdot d^2 \cdot \pi - \left\lfloor \frac{2 \cdot d \cdot \pi}{l_2 - l_1} \right\rfloor \cdot \frac{1}{2} \cdot d \cdot (l_2 + l_1),$$

$$P = \left[\frac{d \cdot \pi}{l_2 - l_1} - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{2 \cdot d \cdot \pi}{l_2 - l_1} \right\rfloor \right] \cdot d \cdot (l_1 + l_2),$$

$$P = \left[\frac{9.3 \cdot \pi}{21.6 - 14.6} - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{2 \cdot 9.3 \cdot \pi}{21.6 - 14.6} \right\rfloor \right] \cdot 9.3 \cdot (14.6 + 21.6),$$

$$P = \left[\frac{9.3 \cdot \pi}{7} - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{18.6 \cdot \pi}{7} \right\rfloor \right] \cdot 9.3 \cdot 36.2,$$

$$P = \left[\frac{9.3 \cdot \pi}{7} - \frac{1}{2} \cdot \left\lfloor \frac{18.6 \cdot \pi}{7} \right\rfloor \right] \cdot 9.3 \cdot 36.2,$$

$$P = \left[\frac{9.3 \cdot \pi}{7} - \frac{1}{2} \cdot \lfloor 8.35 \rfloor \right] \cdot 9.3 \cdot 36.2,$$

$$P = \left(\frac{9.3 \cdot \pi}{7} - \frac{1}{2} \cdot 8 \right) \cdot 9.3 \cdot 36.2,$$

$$P = \left(\frac{9.3 \cdot \pi}{7} - 4 \right) \cdot 9.3 \cdot 36.2 \approx 58.52168852$$

Dakle, $P \approx 58.5217$ cm^2.

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, predavač

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2011. – VIŠA RAZINA

DODATAK

Poučak 1: Neka je O ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Neka je E središnja elipsa[3] takva da su točke A i B vrhovi njezine velike osi, a točke C i D vrhovi njezine male osi. Neka je F žarište elipse koje pripada dužini $\overline{OB}$. Tada je točka B točka na elipsi koja je najbliža žarištu F, a točka A točka na elipsi koja je najudaljenija od žarišta F.

Dokaz: Neka su $a = \left|\overline{OB}\right|$ duljina velike poluosi elipse, $b = \left|\overline{OC}\right|$ duljina male poluosi elipse i $e = \left|\overline{OF}\right|$ linearni ekscentricitet elipse. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A(-a, 0)$, $B(a, 0)$, $C(0, -b)$ i $D(0, b)$. Primijetimo da, prema definiciji elipse, vrijede sljedeće jednakosti:

$$a > b > 0 \qquad (1)$$
$$a > e > 0 \qquad (2)$$

Naime, duljina velike poluosi teoretski nije manja od duljine male poluosi. Međutim, u slučaju $a = b$ elipsa prelazi u središnju kružnicu polumjera a. Tada se žarište elipse podudara sa središtem kružnice, tj. s ishodištem O, a svaka točka kružnice je, prema definiciji kružnice, jednako udaljena od njezina središta, pa nema smisla govoriti o žarištu najbližoj, odnosno od žarišta najudaljenijoj točki. Nejednakost $a > e$ npr. slijedi iz činjenice da točke O, C i F tvore pravokutan trokut (s pravim kutom u vrhu O) čije duljine kateta su $|OC| = b$ i $|OF| = e$, a duljina hipotenuze $|CF| = a$.[4]

Iz pretpostavke da je E središnja elipsa slijedi da njezinu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3)$$

Neka je $T(x_T, y_T)$ proizvoljna točka elipse. Odmah primijetimo da za vrijednosti x_T i y_T vrijede nejednakosti:

$$-a \le x_T \le a, \qquad (4)$$
$$-b \le y_T \le b. \qquad (5)$$

Naime, apsolutna vrijednost apscise niti jedne točke elipse ne može biti strogo veća od duljine velike osi i, analogno, apsolutna vrijednost ordinate niti jedne točke elipse ne može biti strogo veća od duljine male osi.

---

[3] Elipsa sa središtem u točki O takva da su koordinatne osi njezine osi simetrije.

[4] Tvrdnja $|CF| = a$ lagano se dokazuje koristeći definiciju elipse. Naime, ako je $F_1 \in \overline{OA}$ drugo žarište elipse, onda su trokutovi OFC i OF_1C sukladni prema poučku $S - K - S$ (oba trokuta su pravokutna i imaju sukladne katete). Stoga vrijedi jednakost $|CF| = |CF_1|$. Budući da je C točka elipse, prema definiciji elipse, zbroj udaljenosti te točke od obaju žarišta elipse mora biti jednak duljini velike osi, tj. $2 \cdot a$. Tako iz $|CF| = |CF_1|$ i $|CF| + |CF_1| = 2 \cdot a$ odmah slijedi $|CF| = a$.

Točka F, tj. žarište elipse koje pripada dužini $\overline{OB}$, ima koordinate $F(e, 0)$. Prema formuli za udaljenost dviju točaka u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, udaljenost točke T od žarišta F jednaka je:

$$d = \sqrt{(x_T - e)^2 + y_T^2}\,. \tag{6}$$

Točka T pripada elipsi E, pa njezine koordinate moraju zadovoljavati jednadžbu (3). To znači da vrijedi jednakost:

$$\frac{x_T^2}{a^2} + \frac{y_T^2}{b^2} = 1\,. \tag{7}$$

Izrazimo li iz jednakosti (7) veličinu y_T^2, dobit ćemo:

$$y_T^2 = b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_T^2}{a^2}\right). \tag{8}$$

Uvrstimo li jednakost (8) u jednakost (6), dobit ćemo:

$$d = \sqrt{(x_T - e)^2 + b^2 \cdot \left(1 - \frac{x_T^2}{a^2}\right)}\,. \tag{9}$$

Primjenom jednakosti

$$a^2 = b^2 + e^2 \tag{10}$$

koja slijedi izravnom primjenom Pitagorina poučka na pravokutan trokut OCF, odnosno toj jednakosti ekvivalentne jednakosti

$$b^2 = a^2 - e^2, \tag{11}$$

izraz (9) tranformiramo na sljedeći način:

$$d = \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x_T^2}\,,$$

$$d = \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + (a^2 - e^2) - \frac{a^2 - e^2}{a^2} \cdot x_T^2}\,,$$

$$d = \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + e^2 + a^2 - e^2 - (1 - \frac{e^2}{a^2}) \cdot x_T^2}\,,$$

$$d = \sqrt{x_T^2 - 2 \cdot x_T \cdot e + a^2 - x_T^2 + \frac{e^2}{a^2} \cdot x_T^2}\,,$$

$$d=\sqrt{\frac{e^2}{a^2}\cdot x_T^2-2\cdot x_T\cdot e+a^2},$$

$$d=\sqrt{\left(\frac{e}{a}\cdot x_T-a\right)^2},$$

$$d=\left|\frac{e}{a}\cdot x_T-a\right|. \tag{12}$$

Iz nejednakosti (2) slijedi

$$0<\frac{e}{a}<1, \tag{13}$$

pa množenjem nejednakosti (4) sa strogo pozitivnim brojem $\frac{e}{a}$ dobivamo:

$$-a\cdot\frac{e}{a}\le\frac{e}{a}\cdot x_T\le a\cdot\frac{e}{a}, \tag{14}$$

odnosno

$$-e\le\frac{e}{a}\cdot x_T\le e. \tag{15}$$

Zbog nejednakosti $a > e$, iz (15) slijedi

$$\frac{e}{a}\cdot x_T<a. \tag{16}$$

Stoga je

$$\left|\frac{e}{a}\cdot x_T-a\right|=a-\frac{e}{a}\cdot x_T \tag{17}$$

jer je izraz pod apsolutnom vrijednošću strogo negativan. Prema tome, jednakost (12) prelazi u

$$d=a-\frac{e}{a}\cdot x_T. \tag{18}$$

Budući da iz (13) slijedi

$$-\frac{e}{a}<0, \tag{19}$$

funkcija $f(x_T) = -\frac{e}{a} \cdot x_T + a$ je strogo padajuća linearna funkcija. Prema (4), ta je funkcija definirana na segmentu [–a, a]. Poznato je da svaka strogo padajuća funkcija definirana na segmentu postiže najveću vrijednost u početnoj točki segmenta, a najmanju vrijednost u krajnjoj točki segmenta. To znači da funkcija $f(x_T) = -\frac{e}{a} \cdot x_T + a$ postiže najveću vrijednost f_{max} za $x_T = -a$ i ta je vrijednost jednaka

$$f_{\max} = f(-a) = -\frac{e}{a} \cdot (-a) + a = a + e\,, \tag{20}$$

te da ista funkcija postiže najmanju vrijednost f_{min} za $x_T = a$ i ta je vrijednost jednaka

$$f_{\min} = f(a) = -\frac{e}{a} \cdot a + a = a - e\,. \tag{21}$$

No, jedina točka elipse čija je prva koordinata jednaka –a je upravo točka A, a jedina točka elipse čija je prva koordinata jednaka a je upravo točka B. Stoga je odabranom žarištu F najbliža točka elipse upravo točka B (i udaljenost tih dviju točaka je $a - e$), a od toga žarišta najudaljenija točka elipse upravo točka A (i udaljenost tih dviju točaka jednaka je $a + e$). Time je poučak dokazan. ■