TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE
ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2012. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. C. Imamo redom:

$$(-3)^2 - 4 : \frac{0.3}{0.2} = 9 - 4 \cdot \frac{0.2}{0.3} = 9 - 4 \cdot \frac{2}{3} = 9 - \frac{8}{3} = \frac{27-8}{3} = \frac{19}{3}.$$

2. B. Imamo redom:

$$\frac{2^0 - 2^1 + 2^2 - 2^3}{(2^0 : 2^1) \cdot (2^2 : 2^3)} = \frac{1-2+4-8}{2^{0-1} \cdot 2^{2-3}} = \frac{-5}{2^{0-1+2-3}} = \frac{-5}{2^{-2}} = -5 \cdot 2^2 = -5 \cdot 4 = -20.$$

3. A. U intervalu A nalaze se svi cijeli brojevi strogo veći od –10 i strogo manji od –5. To su –9, –8, –7 i –6. Očito ih ima točno četiri.
U intervalu B nalaze se svi cijeli brojevi ne manji od –2 i ne veći od 2. To su –2, –1, 0, 1 i 2. Očito ih ima točno pet.
U intervalu C nalaze se svi cijeli brojevi ne manji od –1 i strogo manji od 2. To su –1, 0 i 1. Očito ih ima točno tri.
U intervalu D nalaze se svi cijeli brojevi strogo veći od 4 i ne veći od 9. To su 5, 6, 7, 8 i 9. Očito ih ima točno 5.
Dakle, točno četiri cijela broja sadrži jedino interval A.

4. C. Ako 100 g kisela vrhnja sadrži 135 kcal, onda 200 g kiseloga vrhnja sadrži dvostruko više kcal, odnosno ukupno 2 · 135 = 270 kcal. Dakle, ako smo pojeli $\frac{2}{3}$ pakiranja od 200 g, onda smo u organizam unijeli ukupno $\frac{2}{3} \cdot 270 = \frac{540}{3} = 180$ kcal.

5. C. Iz zadane formule izrazimo veličinu p. Imamo redom:

$$n = \frac{(p-307) \cdot 20}{1.76} + d,$$
$$n - d = \frac{(p-307) \cdot 20}{1.76} \quad / \cdot 1.76$$
$$1.76 \cdot (n-d) = (p-307) \cdot 20 \quad / : 20$$
$$\frac{1.76 \cdot (n-d)}{20} = p - 307,$$
$$p = \frac{1.76 \cdot (n-d)}{20} + 307$$

Preostaje nam uvrstiti n = 3417 i p = 42 u posljednju formulu, pa izračunati pripadnu vrijednost veličine p. Dobivamo:

$$p = \frac{1.76 \cdot (3417 - 42)}{20} + 307 = \frac{1.76 \cdot 3375}{20} + 307 = \frac{5940}{20} + 307 = 297 + 307 = 604 \text{ proizvoda.}$$

6. **B.** Označimo s m broj mladića u toj školi. Prema podatcima u zadatku, broj djevojaka je trostruko veći od broja mladića, pa broj djevojaka iznosi $3 \cdot m$. Zbroj broja mladića i broja djevojaka treba biti jednak ukupnom broju maturanata, a taj je jednak 216. Tako dobivamo jednadžbu:

$$m + 3 \cdot m = 216,$$

odnosno

$$4 \cdot m = 216.$$

Odatle dijeljenjem s 4 dobivamo $m = 54$. Traženi broj x jednak je razlici broja djevojaka i broja mladića, pa dobivamo:

$$x = 3 \cdot m - m = 2 \cdot m = 2 \cdot 54 = 108.$$

7. **D.** Označimo traženi broj s x. Prema podatcima u zadatku vrijedi jednakost:

$$\frac{2}{100} \cdot x = 100.$$

Odatle izravno slijedi

$$x = \frac{100 \cdot 100}{2} = \frac{10000}{2} = 5000.$$

8. **D.** Rastavimo brojnik i nazivnik zadanoga razlomka na faktore. Imamo redom:

$2 \cdot a^2 + 4 \cdot a = 2 \cdot a \cdot (a + 2)$;
$a^2 - 4 = a^2 - 2^2$ = prema formuli za razliku kvadrata = $(a - 2) \cdot (a + 2)$.

Stoga je

$$\frac{2 \cdot a^2 + 4 \cdot a}{a^2 - 4} = \frac{2 \cdot a \cdot (a + 2)}{(a - 2) \cdot (a + 2)} = \frac{2 \cdot a}{a - 2}.$$

9. **C.** Neka je E nožište visine povučene iz vrha C na stranicu AB. Trokut EBC je pravokutan trokut. Duljine njegovih kateta su $|EB| = 2 \cdot 15$ m $= 30$ m i $|EC| = |AD| = 4 \cdot 15$ m $= 60$ m. Prema Pitagorinu je poučku tada duljina hipotenuze BC jednaka

$$|BC| = \sqrt{30^2 + 60^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500} \approx 67 \text{ m.}$$

Tako je traženi opseg četverokuta $ABCD$ jednak

$O = |AB| + |BC| + |CD| + |DA| \approx 8 \cdot 15 + 67 + 6 \cdot 15 + 4 \cdot 15 = 120 + 67 + 90 + 60 = 337$ m.

10. B. Grafu funkcije f pripadaju točke $(x, f(x))$. Budući da je f funkcija, za svaki x postoji točno jedna vrijednost $f(x)$. Tako grafu funkcije f ne mogu pripadati točke $(-2, -1)$, $(0, 1)$ i $(2, -1)$ jer je $f(-2) = 0 \neq -1$, $f(0) = 2 \neq 1$ i $f(2) = -2 \neq -1$. Stoga grafu funkcije f pripada jedino točka $T_2(-1, 2)$ jer je $f(-1) = 2$.

11. C. Podijelimo 391 s 37:

$$391 : 37 = 10.567567567567\ldots = 10.\overline{567},$$

a potom 104 s duljinom perioda (ukupnim brojem znamenaka koje tvore period), tj. s 3:

$$104 : 3 = 34 \text{ i ostatak } 2.$$

Dakle, imamo ukupno 34 ponavljanja cijeloga perioda $\overline{567}$, te još jedno ponavljanje prvih dviju znamenaka perioda, tj. $\overline{56}$. Stoga se na 104. mjestu nalazi znamenka 6.

12. C. Vrijede jednakosti:

$$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm} = 10^3 \text{ mm}.$$

Stoga je promjer kuglice iskazan u mm

$$d = 2.2 \cdot 10^{-10} \cdot 10^3 = 2.2 \cdot 10^{-7} \text{ mm}.$$

Traženi obujam kuglice iznosi:

$$V = \frac{4}{3} \cdot r^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^3 \cdot \pi = \frac{4}{3} \cdot \frac{d^3}{8} \cdot \pi = \frac{d^3}{6} \cdot \pi = \frac{(2.2 \cdot 10^{-7})^3}{6} \cdot \pi = \frac{2.2^3 \cdot (10^{-7})^3}{6} \cdot \pi = \frac{10.648 \cdot 10^{-21}}{6} \cdot \pi \approx$$
$$\approx 5.5752797625706864 \cdot 10^{-21} \approx 5.575 \cdot 10^{-21} \text{ mm}^3.$$

13. B. Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga broja:

$$a = 2^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2^4 \cdot \frac{1^2}{2^2} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{2^4}{2^2} = 2^{4-2} = 2^2 = 4;$$
$$b = \sqrt[3]{27} : \frac{1}{3} = \sqrt[3]{3^3} \cdot 3 = 3 \cdot 3 = 9;$$
$$c = 2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3^2 - 5) = 2 \cdot (9 - 5) = 2 \cdot 4 = 8;$$
$$d = |8| \cdot \left|-\frac{1}{2}\right| - 1 = 8 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Najmanji od tih brojeva je $d = 3$, a najveći $b = 9$. Njihov je umnožak jednak $3 \cdot 9 = 27$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2012. – OSNOVNA RAZINA

14. B. Zadatak ćemo najbrže riješiti korištenjem identiteta:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot x \cdot y = (x + y)^2 - 2 \cdot (x \cdot y).$$

U zadatku je zadano:

$$x + y = 3,$$
$$x \cdot y = 1.$$

Stoga je traženi zbroj kvadrata jednak

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2 \cdot (x \cdot y) = 3^2 - 2 \cdot 1 = 9 - 2 = 7.$$

15. C. Oplošje bazena jednako je zbroju površine dna i površina svih bočnih strana bazena. Stoga je:

$$O = 50 \cdot 25 + 2 \cdot (50 \cdot 2.6 + 25 \cdot 2.6) = 1250 + 2 \cdot (130 + 65) = 1250 + 2 \cdot 195 = 1640 \text{ m}^2.$$

Površina jedne pločice (iskazana u m^2) iznosi:

$$P = (20 \text{ cm})^2 = (20 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2 = (20 \cdot 0.01 \text{ m})^2 = (0.2 \text{ m})^2 = 0.2^2 \text{ m}^2 = 0.04 \text{ m}^2.$$

Stoga je traženi broj pločica jednak

$$n = \frac{O}{P} = \frac{1640}{0.04} = 41000\,.$$

16. B. Zadana parabola ima oblik $\cup$, što znači da je $a > 0$. Nadalje, ona siječe os x u točno jednoj točki, što znači da pripadna kvadratna jednadžba $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ ima točno jedno rješenje, odnosno da je diskriminanta te jednadžbe

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0.$$

Iz ove jednakosti slijedi

$$b^2 = 4 \cdot a \cdot c.$$

Lijeva strana ove jednakosti je nenegativan realan broj jer je kvadrat bilo kojega realnoga broja uvijek nenegativan realan broj. Stoga takva mora biti i desna strana. Već smo zaključili da je $a > 0$, pa će umnožak $4 \cdot a \cdot c$ biti nenegativan realan broj ako i samo ako je $c \geq 0$.

Preostaje primijetiti: ako bi bilo $c = 0$, onda iz $b^2 = 4 \cdot a \cdot c$ slijedi $b^2 = 0$, odnosno $b = 0$. Tako bismo u tom slučaju imali kvadratnu funkciju $f(x) = a \cdot x^2$ čiji graf nužno prolazi točkom $(0, 0)$, tj. ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Zadani graf očito ne prolazi točkom $(0, 0)$, pa ne može biti $c = 0$.

Zaključimo: za veličine D, a i c vrijede nejednakosti $D = 0$, $a > 0$ i $c > 0$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U KOLOVOZU 2012. – OSNOVNA RAZINA

II. ZADATCI KRATKOGA ODGOVORA

17. **4.97.** Ako 200 g sira ribanca kupimo samo u vrećicama po 40 g, kupit ćemo ukupno $n_1 = \frac{200}{40} = 5$ vrećica i platiti ih $C_1 = 5 \cdot 6.99 = 34.95$ kn. Kupimo li sir u vrećicama po 100 g, kupit ćemo ukupno $n_2 = \frac{200}{100} = 2$ vrećice i platiti ih $C_2 = 2 \cdot 14.99 = 29.98$ kn. Stoga je tražena razlika u cijeni jednaka $\Delta C = C_1 - C_2 = 34.95 - 29.98 = 4.97$ kn.

18. $\frac{2}{3}\cdot(1-a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot a = \frac{2-2\cdot a}{3}$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{3\cdot b}{2} = 1 - a \;/\cdot 2\\
&3\cdot b = 2\cdot(1-a) \;/:3\\
&b = \frac{2}{3}\cdot(1-a) = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\cdot a = \frac{2-2\cdot a}{3}
\end{aligned}$$

19. $-a^2 - 2\cdot a - 3$**.** Imamo redom:

$$(a+3)\cdot(2\cdot a-1) - 3\cdot a\cdot(a+1) = 2\cdot a^2 + 6\cdot a - a - 3 - 3\cdot a^2 - 3\cdot a = -a^2 + 2\cdot a - 3.$$

20. **–1.** Pomnožimo zadanu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj. Ti nazivnici su 2 i 3, njihov najmanji zajednički višekratnik jednak je 6, pa zadanu jednadžbu množimo sa 6. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&\frac{x+1}{2} - 1 = \frac{x-2}{3} \;/\cdot 6\\
&3\cdot(x+1) - 6 = 2\cdot(x-2)\\
&3\cdot x + 3 - 6 = 2\cdot x - 4\\
&3\cdot x - 2\cdot x = -4 - 3 + 6\\
&x = -1.
\end{aligned}$$

21. $x \le -\frac{1}{2}$ ili $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right]$**.** Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&1 - 7\cdot x \ge 2 - 5\cdot x\\
&-7\cdot x + 5\cdot x \ge 2 - 1\\
&-2\cdot x \ge 1
\end{aligned}$$

Dijeljenjem s (–2) mijenja se znak nejednakosti, pa slijedi:

$$x \leq -\frac{1}{2},$$

odnono, zapisano u obliku intervala,

$$x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right].$$

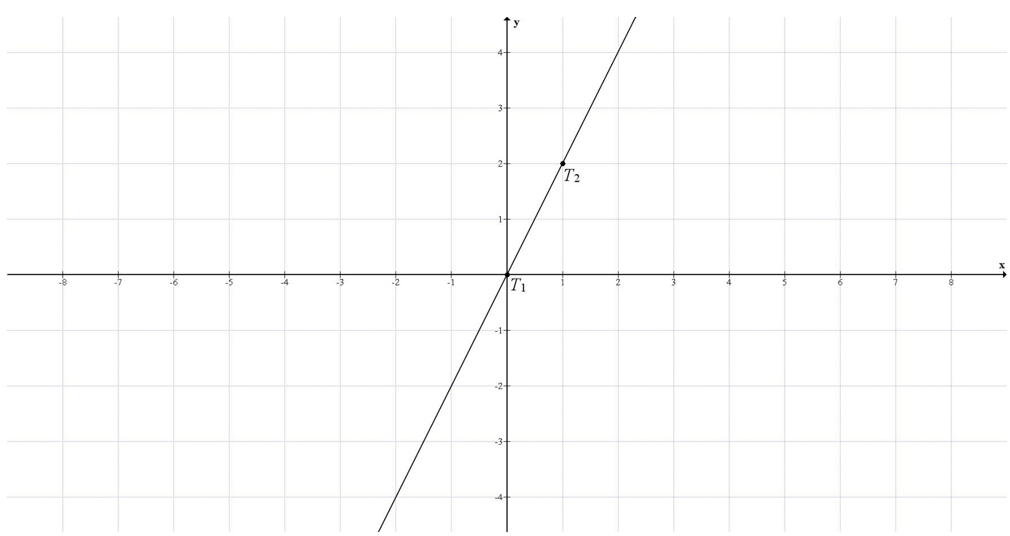
22. –9; 1 ili 1; –9. Budući da vrijede jednakosti $25 = 5^2$ i $25 = (-5)^2$, moguća su točno dva slučaja:

1.) $x + 4 = -5$, a odavde je $x = -5 - 4 = -9$;
2.) $x + 4 = 5$, a odavde je $x = 5 - 4 = 1$.

23. Vidjeti Sliku 1 i Sliku 2. Krivulja zadana prvom jednadžbom je pravac. Da bismo ga nacrtali, dovoljno je odrediti neke dvije njegove međusobno različite točke. U jednadžbu pravca uvrstimo npr. $x = 0$ i $x = 1$, pa dobijemo:

$$y_1 = 2 \cdot 0 = 0$$
$$y_2 = 2 \cdot 1 = 2.$$

Dakle, traženi pravac prolazi točkama $T_1(0, 0)$ i $T_2(1, 2)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojimo ih jednim pravcem. Tako dobijemo sljedeću sliku:



Slika 1.

Krivulja zadana drugom jednadžbom je parabola. Svaka je parabola jednoznačno određena zadavanjem bilo kojih triju njezinih međusobno različitih točaka. Mi ćemo odrediti nultočke pripadne kvadratne funkcije (tj. sjecišta parabole s osi x) i tjeme parabole.

Riješimo li kvadratnu jednadžbu

$$x^2 - 1 = 0,$$

dobit ćemo $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$. Dakle, sjecišta parabole s osi x su točke $T_1(-1, 0)$ i $T_2(1, 0)$.

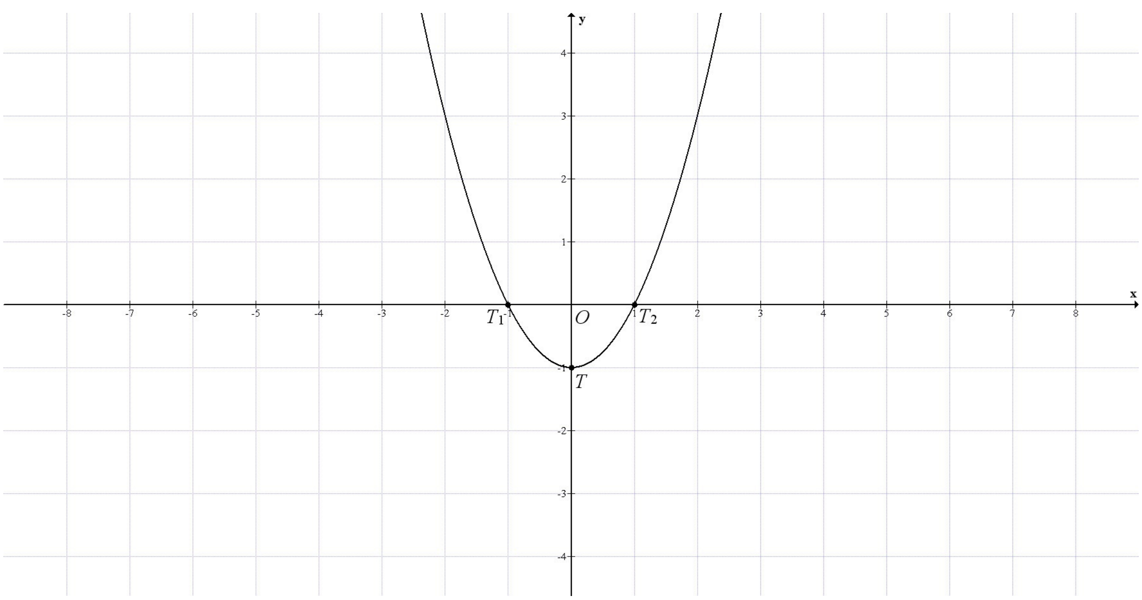
Tjeme parabole odredit ćemo tako da najprije očitamo koeficijente pripadne kvadratne funkcije:

$$a = 1,\ b = 0,\ c = -1,$$

pa izračunamo:

$$T\left(-\frac{b}{2\cdot a}, \frac{4\cdot a\cdot c - b^2}{4\cdot a}\right) = \left(-\frac{0}{2\cdot 1}, \frac{4\cdot 1\cdot(-1) - 0^2}{4\cdot 1}\right) = \left(0, \frac{-4-0}{4}\right) = (0, -1)$$

Dakle, parabola prolazi točkama $T(0, -1)$, $T_1(-1, 0)$ i $T_2(1, 0)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo parabolom kao na Slici 2.



Slika 2.

24. 96°46'; ≈8.5. Zbroj mjera svih triju kutova trokuta treba biti jednak 180°. Mjera dvaju od tih triju kutova jednaka je 41°37', pa slijedi:

β = 180° – 2 · 41°37' = 180° – 82°74' = 180° – (82° + 60' + 14') = 180° – (82° + 1° + 14') = 180° – – 83°14' = 179°60' – 83°14' = (179 – 83)° + (60 – 14)' = 96°46'.

Nadalje, površinu jednakostraničnoga trokuta čija stranica ima duljinu a računamo prema formuli:

$$P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \ .$$

Iz te formule izrazimo vrijednost a:

$$\begin{aligned}
&P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \ \ / \cdot 4 \\
&4 \cdot P = a^2 \cdot \sqrt{3} \ / : \sqrt{3} \\
&a^2 = \frac{4 \cdot P}{\sqrt{3}} \ \ / \sqrt{\ } \\
&a = \sqrt{\frac{4 \cdot P}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{P}}{\sqrt{\sqrt{3}}} = \frac{2 \cdot \sqrt{P}}{\sqrt[4]{3}}
\end{aligned}$$

U posljednju jednakost uvrstimo P = 31.3, pa dobijemo:

$$a = \frac{2 \cdot \sqrt{31.3}}{\sqrt[4]{3}} \approx \frac{2 \cdot 5.59464029228}{1.316074013} \approx 8.502014685 \approx 8.5 \text{ cm.}$$

25. 1.) $\frac{4}{7} \cdot a$ **.** Pomnožimo prvu jednadžbu sustava s 5, a drugu s 3:

$$\begin{aligned}
5 \cdot x - 15 \cdot y = 5 \cdot a \\
9 \cdot x + 15 \cdot y = 3 \cdot a
\end{aligned}.$$

Zbrojimo dobivene jednadžbe:

$$14 \cdot x = 8 \cdot a.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 14 dobijemo $x = \frac{8}{14} \cdot a = \frac{4}{7} \cdot a$.

2.) –2. Iz zadane jednadžbe slijedi:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot 10^{1+x} = 0.3 \ /:3 \\
&10^{1+x} = 0.1 \\
&10^{1+x} = \frac{1}{10} \\
&10^{1+x} = 10^{-1}.
\end{aligned}$$

Odatle izjednačavanjem eksponenata dobivamo jednadžbu

$$1 + x = -1,$$

iz koje je izravno $x = -1 - 1 = -2$.

26. 1.) 127.324. U zadanu formulu za g uvrstimo $r = 2$. Dobivamo:

$$g = \frac{200}{\pi} \cdot 2 = \frac{400}{\pi} \approx 127.3239544735 \approx 127.324 \text{ gradi.}$$

2.) $\frac{3}{4} \cdot \pi$. Iz zadane formule izrazimo veličinu r. Imamo:

$$g = \frac{200}{\pi} \cdot r \quad / \cdot \pi$$
$$g \cdot \pi = 200 \cdot r \quad / : 200$$
$$r = \frac{\pi}{200} \cdot g$$

U dobivenu formulu uvrstimo $g = 150$, pa dobijemo:

$$r = \frac{\pi}{200} \cdot 150 = \frac{150}{200} \cdot \pi = \frac{3}{4} \cdot \pi \text{ radijana}$$

27. 1.) 80. Iz zadanoga grafa slijedi da su količina u mjericama i cijena jagoda upravno razmjerne veličine, te da se za 20 kn mogu kupiti 3 mjerice jagoda. Stoga postavljamo shemu:

$$\begin{array}{l|l} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ \;\; x \text{ kn} & 12 \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$x : 20 = 12 : 3,$$

iz kojega je

$$3 \cdot x = 20 \cdot 12.$$

Odatle dijeljenjem s 3 dobijemo $x = 80$.

28. 2.) 15. Postavljamo shemu:

$$\begin{array}{l|l} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ 100 \text{ kn} & y \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$y : 3 = 100 : 20,$$

iz kojega je

$$20 \cdot y = 100 \cdot 3.$$

Odatle dijeljenjem s 20 dobijemo $y = 15$.

3.) 150. Od 9 kg = 900 dag jagoda može se napraviti $m = \dfrac{900}{40} = 22.5$ mjerica. Kao u **1.)** postavljamo shemu:

$$\begin{array}{ll} \uparrow 20 \text{ kn} & \uparrow 3 \text{ mjerice} \\ z \text{ kn} & 22.5 \text{ mjerica} \end{array}$$

Primjenom jednostavnoga pravila trojnog dobivamo razmjer:

$$z : 20 = 22.5 : 3,$$

iz kojega je

$$3 \cdot z = 22.5 \cdot 20.$$

Odatle dijeljenjem s 3 dobijemo $z = 150$.

29. 1.) 153.75. Cijena prijevoza paketa od 15 kg je 35 kn, a cijena prijevoza jednoga bicikla je 90 kn. Stoga cijena prijevoza paketa i bicikla bez obračunanoga PDV-a iznosi

$$C = 35 + 90 = 125 \text{ kn}.$$

Traženu cijenu dobit ćemo tako da cijenu C povećamo za postotak PDV-a, odnosno za 23% njezine vrijednosti:

$$C_1 = C + \frac{23}{100} \cdot C = \left(1 + \frac{23}{100}\right) \cdot C = (1 + 0.23) \cdot C = 1.23 \cdot C = 1.23 \cdot 125 = 153.75 \text{ kn}.$$

2.) 36.9. Cijena prijevoza paketa mase 52 kg (bez obračunanoga PDV-a) iznosi 60 kn. Na tu cijenu treba obračunati i dodati iznos PDV-a. Analogno kao u **1.)**, dobijemo:

$$C_1 = 1.23 \cdot C = 1.23 \cdot 60 = 73.8 \text{ kn}.$$

Dakle, Ivan je prijevoz platio 73.80 kn. Nadoplata u slučaju vraćanja pošiljke iznosi 50% te vrijednosti, pa je Ivan morao nadoplatiti još

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot C_1 = \frac{1}{2} \cdot 73.8 = 36.9 \text{ kn}.$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, dipl.ing.mat., predavač