1. **B.** Prvi interval obuhvaća sve realne brojeve koji su strogo veći od –3 i strogo manji od –1. U tom intervalu se nalazi točno jedan cijeli broj i to je –2.

Drugi interval obuhvaća sve realne brojeve koji su strogo veći od –1 i strogo manji od 3. U tom se intervalu nalaze točno tri cijela broja i to su 0, 1 i 2.

Treći interval obuhvaća sve realne brojeve koji su jednaki ili veći od –1 i jednaki ili manji od 0. U tom se intervalu nalaze točno dva cijela broja i to su –1 i 0.

Četvrti interval obuhvaća sve realne brojeve koji su jednaki ili veći od –1 i strogo manji od 0. U tom se intervalu nalazi točno jedan cijeli broj i to je –1.
Dakle, u drugom intervalu se nalazi najviše cijelih brojeva.

2. **D.** Imamo redom:

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{0.3}{40}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{3}{400}} = \frac{2}{20}\cdot\sqrt{3}\cdot\pi = \frac{\sqrt{3}}{10}\cdot\pi \approx 0.54413981 \approx 0.544\,.$$

3. **B.** Najmanji kut pravokutnoga trokuta nalazi se nasuprot najkraće katete. Prema nejednakosti trokuta, mora vrijediti nejednakost $4+b>13$, a odatle je $b>9$. Dakle, dulja kateta ima duljinu strogo veću od 9 cm (a time i strogo veću od 4 cm), pa se traženi kut trokuta nalazi nasuprot kateti duljine 4 cm. Primjenom funkcije sinus dobijemo:

$$\sin\alpha = \frac{4}{13},$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{4}{13}\right) = 17.92021313939^\circ = 17^\circ 55' 13''$$

4. **B.** Svi ponuđeni trokutovi imaju najmanju stranicu duljine 10 cm. Najmanja stranica zadanoga trokuta ima duljinu 4 cm. Stoga je koeficijent sličnosti $k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, pa su duljine ostalih dviju stranica sličnoga trokuta jednake $\frac{5}{2}\cdot 5 = \frac{25}{2} = 12.5$ cm i $\frac{5}{2}\cdot 6 = 15$ cm. Dakle, duljine stranica traženoga trokuta su 10 cm, 12.5 cm i 15 cm.

5. **A.** Neka je v tražena prosječna brzina vlaka iskazana u km/h. Tada je $2\cdot v$ prosječna brzina automobila. Vrijeme potrebno za prelazak 260 km automobilom iznosi $t_1 = \frac{260}{2\cdot v} = \frac{130}{v}$ sati. Preostalih 520 – 260 = 260 km putnik je prešao vlakom i za to mu je trebalo $t_2 = \frac{260}{v}$ sati. Ukupno vrijeme provedeno na putu iznosi $t_1 + t_2$ sati. Ta vrijednost treba biti jednaka 6, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{130}{v} + \frac{260}{v} = 6\,.$$

Riješimo tu jednadžbu:

$$\frac{130}{v}+\frac{260}{v}=6,$$
$$\frac{390}{v}=6,$$
$$v=\frac{390}{6}=65.$$

Dakle, prosječna brzina vlaka iznosi 65 km/h.

6. **C.** Izrazimo a iz svake pojedine jednadžbe:

$$\frac{a+b}{c}=3 \Leftrightarrow a+b=3\cdot c \Leftrightarrow a=3\cdot c-b,$$
$$\frac{a+1}{b}=2 \Leftrightarrow a+1=2\cdot b \Leftrightarrow a=2\cdot b-1.$$

Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane:

$$3\cdot c-b=2\cdot b-1,$$
$$3\cdot c-b-2\cdot b=-1,$$
$$3\cdot c-3\cdot b=-1,$$
$$(-3)\cdot(b-c)=-1.$$

Odatle dijeljenjem s (–3) slijedi $b-c=\frac{1}{3}$.

7. **C.** Primijenimo binomni poučak. U ovome je slučaju $n = 5$, pa vrijedi jednakost:

$$(a+x)^5=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot a^{5-k}\cdot x^k \ .$$

Koeficijent uz x^2 dobijemo za $k=2$ i on iznosi $\binom{5}{2}\cdot a^{5-2}=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot a^3=10\cdot a^3$. Prema zahtjevu zadatka, taj broj mora biti jednak 640. Stoga dobivamo jednadžbu $10\cdot a^3=640$, odnosno, nakon dijeljenja s 10, $a^3=64$. Jedino realno rješenje ove jednadžbe je $a=4$.

8. **B.** Imamo redom:

$$5\cdot 2^{2016}+6\cdot 2^{2014}=2^{2014}\cdot(5\cdot 2^2+6)=2^{2014}\cdot(5\cdot 4+6)=2^{2014}\cdot(20+6)=2^{2014}\cdot 26=$$
$$=2^{2014}\cdot 2\cdot 13=13\cdot 2^{2015}.$$

9. **D.** Prvi član niza jednak je $a_1=502+3\cdot(1-1)=502+3\cdot 0=502$. 13. član niza jednak je $a_{13}=502+3\cdot(13-1)=502+3\cdot 12=502+36=538$. Stoga je traženi zbroj jednak:

$$S_{13}=\frac{13}{2}\cdot(a_1+a_{13})=\frac{13}{2}\cdot(502+538)=\frac{13}{2}\cdot 1040=13\cdot 520=6760.$$

10. C. Iz slike se vidi da graf kvadratne funkcije siječe os ordinata u točki čija je ordinata negativan broj. No, s druge je strane ta ordinata jednaka $f(0)=c$, pa zaključujemo da je $c<0$.

Parabola ima oblik $\cup$, što znači da je vodeći koeficijent pripadne kvadratne funkcije strogo pozitivan. Dakle, $a>0$.

Napokon, tjeme parabole nalazi se u trećem kvadrantu, što znači da su obje koordinate tjemena strogo negativni realni brojevi. Prva koordinata toga tjemena je $-\frac{b}{2\cdot a}$ i taj je broj, prema prethodnom zaključku, strogo negativan. Budući da je $a>0$, razlomak $-\frac{b}{2\cdot a}$ će biti strogo negativan ako i samo ako je $b>0$.

Zaključimo: $b>0$, $c<0$.

11. D. Koeficijent smjera povučene tangente jednak je koeficijentu smjera zadanoga pravca, a taj je jednak 5. Pronađimo sve točke grafa zadane funkcije u kojima je povučena tangenta ima koeficijent smjera jednak 5. Primijenimo geometrijsko značenje prve derivacije funkcije u točki. Riješimo jednadžbu $f'(x)=5$. Koristeći osnovna pravila za deriviranje, imamo redom:

$$
\begin{aligned}
&(x^3-6\cdot x^2+17\cdot x)'=5,\\
&(x^3)'-6\cdot(x^2)'+17\cdot(x)'=5,\\
&3\cdot x^{3-1}-6\cdot 2\cdot x^{2-1}+17\cdot x^{1-1}=5,\\
&3\cdot x^2-12\cdot x+17=5,\\
&3\cdot x^2-12\cdot x+17-5=0,\\
&3\cdot x^2-12\cdot x+12=0,\quad /:3\\
&x^2-4\cdot x+4=0,\\
&(x-2)^2=0,\\
&x-2=0,\\
&x=2.
\end{aligned}
$$

Dakle, prva koordinata dirališta tražene tangente je 2. Druga koordinata istoga dirališta jednaka je $f(2)=2^3-6\cdot 2^2+17\cdot 2=8-6\cdot 4+34=8-24+34=18.$ Prema tome, koordinate dirališta su (2, 18).

Preostaje napisati jednadžbu pravca koji prolazi točkom D = (2, 18) i ima koeficijent smjera jednak 5:

$$
\begin{aligned}
&t\ldots\ y-18=5\cdot(x-2),\\
&t\ldots\ y=5\cdot x-10+18,\\
&t\ldots\ y=5\cdot x+8.
\end{aligned}
$$

12. B. Neka su d, r_1 i r_2 redom duljina tetive, duljina polumjera prve kružnice i duljina polumjera druge kružnice. Iz podatka da je d duljina stranice kvadrata upisanoga u kružnicu čiji je polumjer r_1 zaključujemo da je $2 \cdot r_1$ duljina dijagonale kvadrata čija je stranica d. Stoga vrijedi jednakost:

$$2 \cdot r_1 = d \cdot \sqrt{2}\,.$$

Odatle dijeljenjem s $\sqrt{2}$ slijedi:

$$d = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot r_1 = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}} \cdot r_1 = \sqrt{2} \cdot r_1.$$

Nadalje, iz podatka da je d duljina stranice pravilnoga šesterokuta upisanoga u kružnicu polumjera r_2 zaključujemo da je $r_2 = d$ jer je duljina stranice pravilnoga šesterokuta ujedno jednaka i polumjeru tome šesterokutu opisane kružnice. Tako smo dobili jednakosti:

$$\begin{cases} d = \sqrt{2} \cdot r_1, \\ d = r_2. \end{cases}$$

Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Stoga je:

$$\sqrt{2} \cdot r_1 = r_2, \quad / : \sqrt{2} \cdot r_2$$

$$\frac{\sqrt{2} \cdot r_1}{\sqrt{2} \cdot r_2} = \frac{r_2}{\sqrt{2} \cdot r_2},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. A. Iz zadane slike slijedi da je duljina izvodnice stošca $s = 12$ cm. Duljina luka prikazanoga kružnoga isječka iznosi

$$l = \frac{12 \cdot \pi \cdot 147^\circ}{180^\circ} = \frac{49}{5} \cdot \pi\,.$$

Ta je duljina istodobno jednaka opsegu osnovke stošca. Označimo li s r polumjer osnovke stošca, iz jednadžbe $2 \cdot r \cdot \pi = \frac{49}{5} \cdot \pi$ slijedi $r = \frac{49}{10}$ cm. Preostaje izračunati duljinu visine stošca:

$$v = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{49}{10}\right)^2} = \sqrt{144 - \frac{2401}{100}} = \sqrt{\frac{144 \cdot 100 - 2401}{100}} = \sqrt{\frac{14400 - 2401}{100}} =$$

$$= \sqrt{\frac{11999}{100}} = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 71}{10^2}} = \frac{13}{10} \cdot \sqrt{71} \text{ cm.}$$

Prema tome, traženi obujam stošca jednak je:

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot v=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{49}{10}\right)^2\cdot\pi\cdot\frac{13}{10}\cdot\sqrt{71}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2401}{100}\cdot\pi\cdot\frac{13}{10}\cdot\sqrt{71}=$$
$$=\frac{31213}{3000}\cdot\sqrt{71}\cdot\pi=275.4186243\approx 275.42\ \text{cm}^3$$

14. A. Riješimo zadani sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Primijetimo najprije da moraju vrijediti nejednakosti $x>0$ i $y>0$ jer u suprotnom brojevi $\log_4 x$ i $\log_4 y$ nisu definirani.

Koristeći pravila za logaritmiranje, prvu jednadžbu toga sustava možemo transformirati ovako:

$$\log_4(x\cdot y)=1\Leftrightarrow x\cdot y=4^1\Leftrightarrow x\cdot y=4.$$

Koristeći pravila za potenciranje, drugu jednadžbu sustava možemo transformirati ovako:

$$3\cdot 3^x-(3^3)^y=0\Leftrightarrow 3^{1+x}=3^{3\cdot y}\Rightarrow 1+x=3\cdot y\Leftrightarrow x=3\cdot y-1.$$

Tako smo dobili polaznom sustavu ekvivalentan sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} x\cdot y=4, \\ x=3\cdot y-1. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Uvrstimo drugu jednadžbu toga sustava u prvu jednadžbu:

$$(3\cdot y-1)\cdot y=4\Leftrightarrow 3\cdot y^2-y=4\Leftrightarrow 3\cdot y^2-y-4=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 3\cdot(-4)}}{2\cdot 3}=\frac{1\pm\sqrt{1-(-48)}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{49}}{6}=\frac{1\pm 7}{6}$$
$$\Rightarrow y_1=\frac{1+7}{6}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3},\ y_2=\frac{1-7}{6}=-\frac{6}{6}=-1.$$

Zbog uvjeta $y>0$ rješenje $y_2=-1$ odbacujemo. Stoga je $y=y_1=\frac{4}{3}$, pa uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu gornjega sustava slijedi $x=3\cdot\frac{4}{3}-1=4-1=3$. Dakle, rješenje sustava je uređeni par $(x,y)=\left(3,\ \frac{4}{3}\right)$. Lako vidimo da vrijede jednakosti:

$$\frac{x}{y}=\frac{3}{\frac{4}{3}}=\frac{3\cdot 3}{4}=\frac{9}{4},$$
$$x-y=3-\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 3-4}{3}=\frac{9-4}{3}=\frac{5}{3},$$
$$x\cdot y=4,$$

$$x+y=3+\frac{4}{3}=\frac{3\cdot 3+4}{3}=\frac{9+4}{3}=\frac{13}{3}.$$

Zaključujemo da je istinita prva od četiriju ponuđenih jednakosti.

15. C. Zbog pretpostavke $A<0$, minimalna vrijednost funkcije T postiže se kad je $\cos(B\cdot t+C)=1$ i ta vrijednost iznosi $T_{\min}=A\cdot 1+D=A+D.$ Zbog iste pretpostavke, maksimalna vrijednost funkcije T postiže se kad je $\cos(B\cdot t+C)=-1$ i ta vrijednost iznosi $T_{\max}=A\cdot(-1)+D=-A+D$. Stoga dobivamo sljedeći sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} A+D=13, \\ -A+D=29. \end{cases}$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobijemo $2\cdot D=42$, a otuda dijeljenjem s 2 slijedi $D=21.$ Uvrštavanjem te vrijednosti u prvu jednadžbu sustava dobijemo $A+21=13,$ a otuda je $A=-8.$ Dakle, $(A, D) = (-8, 21)$.

16. $\frac{35}{2}=17.5$ **kv. jed.** Iz slike očitamo da su vrhovi trokuta točke $A=(-2,-1),\ B=(5,-3)$ i $C=(-2,4)$. Stoga je tražena površina trokuta jednaka:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2)\cdot(-3-4)+5\cdot[4-(-1)]+(-2)\cdot[(-1)-(-3)]\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2)\cdot(-7)+5\cdot(4+1)+(-2)\cdot(-1+3)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2)\cdot(-7)+5\cdot 5+(-2)\cdot 2\right|=\cdot$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left|14+25+(-4)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|14+25-4\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|35\right|=\frac{1}{2}\cdot 35=\frac{35}{2}=17.5 \text{ kv. jed.}$$

17. 2.36. Imamo redom:

$$135^\circ 30' = 135^\circ+\left(\frac{30}{60}\right)^\circ=135^\circ+\left(\frac{1}{2}\right)^\circ=135^\circ+0.5^\circ=135.5^\circ=$$

$$=\frac{135.5^\circ\cdot\pi}{180^\circ}\text{ rad}=\frac{1355\cdot\pi}{1800}=\frac{271\cdot\pi}{360}\approx 2.3649211\approx 2.36 \text{ rad.}$$

(Treća znamenka iza decimalne točke je jednaka 4, pa pri zaokruživanju prve dvije znamenke iza decimalne točke prepisujemo.)

18. 1.) 15. Neka su S_1 cijena karte u pretprodaji i S_2 cijena karte na dan koncerta. Iz podataka u zadatku slijedi:

$$S_2=S_1+\frac{20}{100}\cdot S_1=S_1\cdot\left(1+\frac{20}{100}\right)=\frac{100+20}{100}\cdot S_1=\frac{120}{100}\cdot S_1=\frac{6}{5}\cdot S_1.$$

Odatle dijeljenjem s $\frac{6}{5}$ slijedi:

$$S_1 = \frac{S_2}{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6} \cdot S_2 \cdot$$

Tada je ušteda, odnosno razlika cijene na dan koncerta i cijene u pretprodaji, jednaka:

$$U = S_2 - S_1 = S_2 - \frac{5}{6} \cdot S_2 = S_2 \cdot \left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{6-5}{6} \cdot S_2 = \frac{1}{6} \cdot S_2 \ .$$

U zadatku je zadano $S_2 = 90\,\text{kn}$, pa tražena ušteda iznosi $U = \frac{1}{6} \cdot 90 = 15\,\text{kn}$.

2.) 11. Primijenimo formulu $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$. Neka su A = = {dan u mjesecu kad je najviša temperatura bila viša od 10°C} i B = {dan u mjesecu kad je najviša temperatura bila niža od 14°C}. Tada su $A \cap B$ = {dan u mjesecu kad je najviša temperatura bila viša od 10°C i niža od 14°C} i $A \cup B$ = cijeli mjesec. Znamo da je card(A) = 22, card(B) = 20 i card($A \cup B$) = 31, pa uvrštavanjem u navedenu formulu dobivamo:

$$31 = 22 + 20 - \text{card}(A \cap B).$$

Odatle je card($A \cap B$) = 22 + 20 – 31 = 11. Dakle, u 11 dana je najviša dnevna temperatura bila između 10°C i 14°C.

19. 1.) $x \geq -5$ **ili** $x \in [-5, +\infty\rangle$**.** Pomnožimo zadanu nejednadžbu sa 4. Dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (x-1) - 8 \leq 3 \cdot x - 5, \\
&2 \cdot x - 10 \leq 3 \cdot x - 5, \\
&2 \cdot x - 3 \cdot x \leq -5 + 10, \\
&-x \leq 5.
\end{aligned}$$

Odavde dijeljenjem s (–1) dobivamo $x \geq -5$. Skup svih rješenja zadane nejednadžbe možemo zapisati i kao poluzatvoreni interval $[-5, +\infty\rangle$**.**

2.) $x \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$**.** Uzimanjem drugoga korijena svakoga faktora na lijevoj i desnoj strani zadane nejednadžbe dobivamo ekvivalentnu nejednadžbu:

$$\begin{aligned}
&2 \cdot |x-1| < 3, \quad / : 2 \\
&|x-1| < \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Prema definiciji funkcije apsolutne vrijednosti dalje slijedi:

$$\begin{aligned}
&-\frac{3}{2} < x - 1 < \frac{3}{2} \quad / + 1 \\
&-\frac{3}{2} + 1 < x - 1 + 1 < \frac{3}{2} + 1, \\
&-\frac{1}{2} < x < \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Dakle, skup svih rješenja zadane nejednadžbe je otvoreni inteval $\left\langle -\frac{1}{2}, \frac{5}{2} \right\rangle$.

20. 1.) $\boldsymbol{S = (0, -4)}$. Prva koordinata traženoga sjecišta je jednaka 0 jer svaka točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku 0. Druga koordinata traženoga sjecišta jednaka je $f(0)$. Stoga izračunajmo $f(0)$:

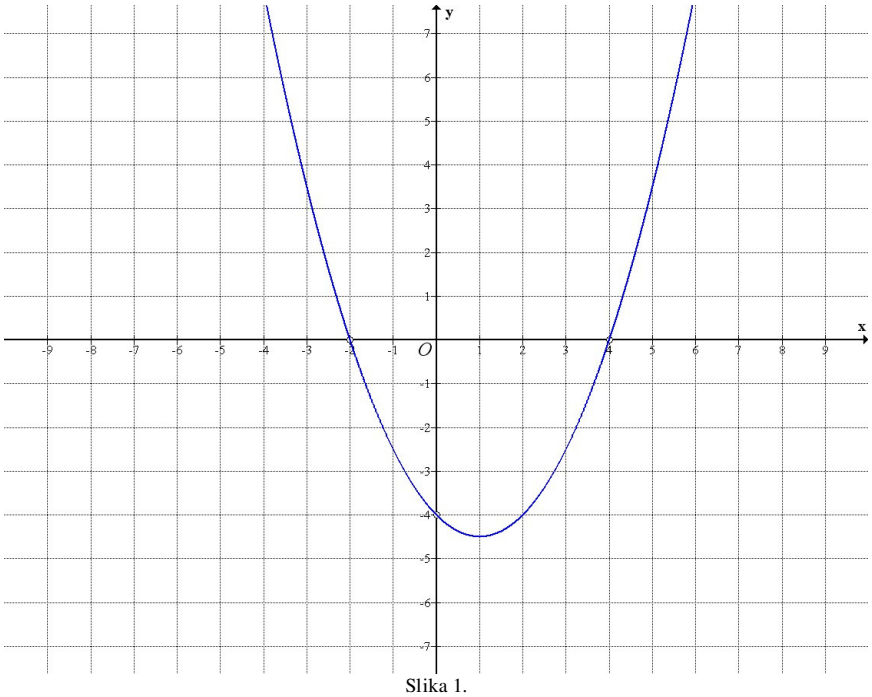
$$f(0) = \frac{1}{2} \cdot (0+2) \cdot (0-4) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-4) = -4.$$

Prema tome, traženo sjecište je točka $S = (0, -4)$.

2.) Vidjeti Sliku 1. Zadana funkcija je kvadratna funkcija jer je umnožak konstante (polinoma stupnja 0) i dvaju polinoma 1. stupnja. Njezin graf je parabola. Da bismo nacrtali tu parabolu, potrebne su nam (barem) tri njezine različite točke. Jednu točku te parabole znamo: to je $S = (0, -4)$. Preostale dvije točke parabole odredit ćemo koristeći nultočke funkcije *f*.

Dakle, riješimo jednadžbu $f(x) = 0$. Znamo da je umnožak triju realnih brojeva jednak nuli ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak nuli. Prvi faktor, a to je $\frac{1}{2}$, očito ne može biti jednak nuli. Drugi faktor, a to je $x+2$, jednak je nuli kad je $x = -2$. Treći faktor, a to je $x-4$, jednak je nuli kad je $x = 4$. Stoga su sve nultočke zadane funkcije $x_1 = -2$ i $x_2 = 4$, pa graf te funkcije prolazi točkama $S_1 = (-2,\ 0)$ i $S_2 = (4,\ 0)$.

Preostaje ucrtati točke S, S_1 i S_2 u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, te ih spojiti parabolom. Dobivamo krivulju prikazanu na Slici 1.



Slika 1.

21. 1.) 0; 2 ili obratno. Lijevu stranu zadane jdnadžbe rastavimo na faktore koristeći formulu za kub binoma. Imamo redom:

$$x \cdot (x^3 - 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 8) = 0,$$
$$x \cdot (x-2)^3 = 0.$$

Odatle slijedi $x = 0$ ili $x - 2 = 0$, odnosno $x_1 = 0$ i $x_2 = 2$. Dakle, traženi skup je $S = \{0, 2\}$.

2.) $\langle -2,\ 1 \rangle$**.** Funkcija raste na otvorenom intervalu I kad povećanje vrijednosti nezavisne varijable $x \in I$ povlači povećanje vrijednosti zavisne varijable y. Na grafu se povećanje „iščitava“ kao „penjanje“ grafa funkcije u pozitivnom smjeru osi ordinata. Lako vidimo da se graf „penje“ kad se varijabla x nalazi između brojeva –2 i 1. Dakle, traženi interval je $\langle -2,\ 1 \rangle$**.**

22. 1.) $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$**.** Zadana funkcija je definirana kad je izraz pod drugim korijenom nenegativan. Tako dobivamo nejednadžbu:

$$2 \cdot x - 5 \geq 0.$$

Odatle odmah slijedi $x \geq \frac{5}{2}$. Stoga je tražena domena interval $\left[\frac{5}{2}, +\infty\right)$**.**

2.) $14 \cdot x^2 - 19.$ Imamo redom:

$$(f \circ g)(x) = f(7 \cdot x^2 - 11) = 2 \cdot (7 \cdot x^2 - 11) + 3 = 14 \cdot x^2 - 22 + 3 = 14 \cdot x^2 - 19.$$

23. 1.) $\frac{1}{a \cdot b}$**.** Imamo redom:

$$\frac{1}{a^2 + ab} + \frac{1}{ab + b^2} = \frac{1}{a \cdot (a+b)} + \frac{1}{b \cdot (a+b)} = \frac{b+a}{a \cdot b \cdot (a+b)} = \frac{a+b}{a \cdot b \cdot (a+b)} = \frac{1}{a \cdot b}.$$

2.) $\frac{11}{4}$ **.** Obje strane jednadžbe napisat ćemo kao potencije s bazom 5. Imamo redom:

$$\sqrt[4]{5^3} = (5^{2-x})^{-1},$$
$$5^{\frac{3}{4}} = 5^{(2-x)\cdot(-1)},$$
$$5^{\frac{3}{4}} = 5^{-2+x},$$
$$-2 + x = \frac{3}{4},$$
$$x = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}.$$

24. 1.) $\frac{10077696}{390625} = 25.79890176$**.** Iz rekurzivne formule kojom je definiran opći član niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaključujemo da se svaki član toga niza, osim prvoga, dobije tako da se neposredno prethodni član niza pomnoži s $1.2 = \frac{6}{5}$. Stoga je niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geometrijski niz čiji je količnik $q = 1.2 = \frac{6}{5}$. Tražimo 10. član toga niza, pa odmah imamo:

$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1} = a_1 \cdot q^9 = 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^9 = 5 \cdot \frac{6^9}{5^9} = \frac{6^9}{5^8} = \frac{10077696}{390625} = 25.79890176.$$

2.) $a = 3$**.** Imamo redom:

$$a \cdot x - 3 \cdot x = 2,$$
$$x \cdot (a - 3) = 2.$$

Ova jednadžba nema realnih rješenja ako i samo ako je $a - 3 = 0$ (ne postoji nijedan realan broj koji pomnožen s 0 daje 2). Odatle je odmah $a = 3$.

25. 1.) 2. Zapišimo lijevu i desnu stranu zadane jednakosti u algebarskom obliku. Imamo redom:

$$-4 + 2 \cdot i + 4 \cdot b \cdot i - 2 \cdot b \cdot i^2 = 10 \cdot i,$$
$$-4 + 2 \cdot i + 4 \cdot b \cdot i - 2 \cdot b \cdot (-1) = 10 \cdot i,$$
$$(2 \cdot b - 4) + (4 \cdot b + 2) = 10 \cdot i.$$

Dobiveni kompleksni brojevi će biti jednaki ako i samo ako vrijede jednakosti $\begin{cases} 2 \cdot b - 4 = 0, \\ 4 \cdot b + 2 = 10. \end{cases}$ Iz obiju jednakosti lako slijedi $b = 2$.

2.) $\frac{5}{6} \cdot \pi$**.** Kompleksnom broju i u Gaussovoj ravnini odgovara točka $(0,\ 1)$. Spojnica te točke s ishodištem Gaussove ravnine zatvara kut od $\frac{\pi}{2}$ radijana s pozitivnim dijelom osi apscisa. Stoga je $\operatorname{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$. Prigodom množenja kompleksnih brojeva zapisanih u trigonometrijskom obliku argumenti se zbrajanju, pa je traženi argument jednak:

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} \cdot \pi$$

26. 1.) 12. Koristit ćemo činjenicu da su vektori međusobno okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak 0. Stoga odredimo skalarni umnožak zadanih vektora:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(4 \cdot \vec{i} - 6 \cdot \vec{j}\right) \cdot \left(\lambda \cdot \vec{i} + 8 \cdot \vec{j}\right) = 4 \cdot \lambda + (-6) \cdot 8 = 4 \cdot \lambda - 48.$$

Tako iz jednadžbe $4 \cdot \lambda - 48 = 0$ odmah slijedi $\lambda = 12$.

2.) $y^2 = 6 \cdot x$**.** Prema definiciji, parabola je skup svih točaka koje su jednako udaljene od fiksirane točke F i fiksiranoga pravca d. Posebno, ako je $p > 0$, onda parabola $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$ predstavlja skup svih točaka koje su jednako udaljene od točke $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$ i pravca $x = -\frac{p}{2}$. U ovome je slučaju očito $p = 3$, pa je rješenje zadatka parabola $y^2 = 2 \cdot 3 \cdot x = 6 \cdot x$.

27. 1.) $1.4 \cdot \log 5 \approx 0.97856$. Tražena visina jednaka je vrijednosti funkcije h za $t = 4$:

$$h(4) = 1.4 \cdot \log(4+1) = 1.4 \cdot \log 5 = 0.97855800607.$$

2.). $10^{\frac{25}{14}} - 1 \approx 60.05$. Tražimo vrijeme t takvo da je $h(t) = 2.5$. Trebamo riješiti jednadžbu $1.4 \cdot \log(t+1) = 2.5$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&1.4 \cdot \log(t+1) = 2.5, \quad / \cdot 10 \\
&14 \cdot \log(t+1) = 25, \quad / : 14 \\
&\log(t+1) = \frac{25}{14}, \\
&t + 1 = 10^{\frac{25}{14}}, \\
&t = 10^{\frac{25}{14}} - 1 \approx 60.054023 \text{ minute.}
\end{aligned}$$

3.) $\frac{11 - \sqrt[14]{10}}{\sqrt[14]{10} - 1} \approx 54.94.$. Neka je t traženo vrijeme. Primijetimo najprije da je funkcija h strogo rastuća funkcija jer je ona umnožak strogo pozitivne konstante 1.4 i strogo rastuće funkcije $\log(t+1)$. Ova potonja funkcija je strogo rastuća jer je kompozicija strogo rastuće funkcije $\log t$ i strogo rastuće funkcije $t+1$. To znači da što zrakoplov dulje leti, njegova visina će biti veća. Odatle zaključujemo da je vrijeme leta prvoga zrakoplova jednako t + 10 minuta jer se taj zrakoplov nalazi na 100 metara većoj visini. Visina na kojoj se nalazi drugi zrakoplov iznosi

$$h_2 = 1.4 \cdot \log(t+1),$$

a visina na kojoj se nalazi prvi zrakoplov iznosi

$$h_1 = 1.4 \cdot \log\left[(t+10)+1\right] = 1.4 \cdot \log(t+11).$$

Razlika tih dviju visina $h_1 - h_2$ treba biti jednaka 100 metara = $\frac{100}{1000} = 0.1$ km (obje visine su iskazane u kilometrima, pa i njihova razlika mora biti iskazana u kilometrima), pa dobivamo jednadžbu:

$$1.4 \cdot \log(t+11) - 1.4 \cdot \log(t+1) = 0.1$$

To je logaritamska jednadžba koju rješavamo na uobičajen način:

$$1.4\cdot\log(t+11)-1.4\cdot\log(t+1)=0.1,$$
$$1.4\cdot\left[\log(t+11)-\log(t+1)\right]=0.1,\quad /\cdot 10$$
$$14\cdot\left[\log(t+11)-\log(t+1)\right]=1,\quad /:14$$
$$\log(t+11)-\log(t+1)=\frac{1}{14},$$
$$\log\left(\frac{t+11}{t+1}\right)=\frac{1}{14},$$
$$\frac{t+11}{t+1}=10^{\frac{1}{14}},\quad /\cdot(t+1)$$
$$t+11=\sqrt[14]{10}\cdot(t+1),$$
$$t+11=\sqrt[14]{10}\cdot t+\sqrt[14]{10},$$
$$t-\sqrt[14]{10}\cdot t=\sqrt[14]{10}-11,\quad /\cdot(-1)$$
$$\sqrt[14]{10}\cdot t-t=11-\sqrt[14]{10},$$
$$t\cdot\left(\sqrt[14]{10}-1\right)=11-\sqrt[14]{10},\quad /:\left(\sqrt[14]{10}-1\right)$$
$$t=\frac{11-\sqrt[14]{10}}{\sqrt[14]{10}-1}=54.9382243 \text{ minute.}$$

28. 1.) $-1;\ 5$**.** Treba riješiti jednadžbu $f(x)=0$. Imamo redom:

$$f(x)=0,$$
$$|x-2|-3=0$$
$$|x-2|=3\Leftrightarrow\begin{cases}x-2=3 \text{ ili}\\ x-2=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+2=5,\\ x=-3+2=-1.\end{cases}$$

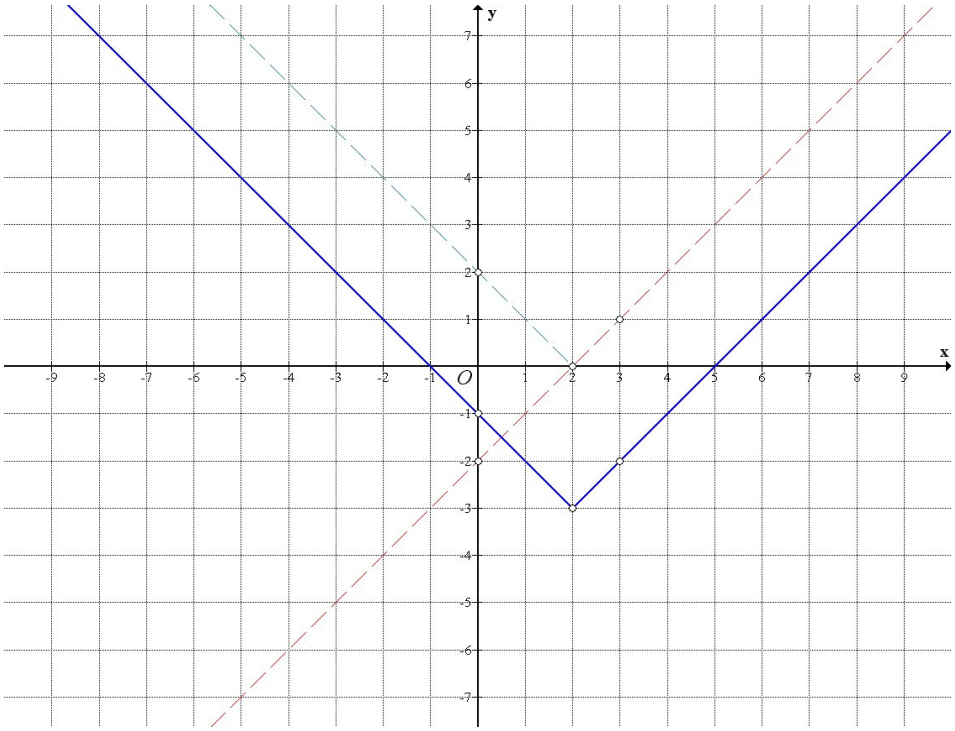
Dakle, tražene nultočke su $x_1=-1$ i $x_2=5$.

2.) $[-3,+\infty\rangle$. Primijetimo da je zadana funkcija definirana za svaki $x\in\mathbb{R}$. To znači da je skup $\mathbb{R}$ prirodna domena funkcije *f*. Također, znamo da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $|x|\geq 0$. Stoga redom imamo:

$$|x-2|\geq 0,\quad /-3$$
$$|x-2|-3\geq 0-3,$$
$$f(x)\geq -3.$$

Prema tome, za svaki $x\in\mathbb{R}$, odnosno za svaki *x* iz domene funkcije *f*, vrijedi nejednakost $f(x)\geq -3$. To znači da je slika funkcije *f* skup svih realnih brojeva jednakih ili većih od –3. Svi ti brojevi tvore interval $[-3,+\infty\rangle$.

3.) Vidjeti Sliku 2. Zadanu krivulju je najjednostavnije nacrtati tako da nacrtamo pravac $y = x - 2$ (crvena iscrtkana krivulja na Slici 2.) dio toga pravca ispod osi apscisa zrcalimo s obzirom na os apscisa (zelena iscrtkana krivulja na Slici 2.) i dobivenu krivulju potom translatiramo za tri jedinične dužine prema dolje. Tako dobivamo krivulju prikazanu plavom punom crtom na Slici 2.



Slika 2.

Pritom pravac $y = x - 2$ najlakše i najbrže crtamo tako da njegovu jednadžbu zapišemo u segmentnom obliku:

$$y = x - 2,$$
$$-x + y = -2, \quad / : (-2)$$
$$\frac{x}{2} + \frac{y}{-2} = 1,$$

pa iz toga oblika očitamo da pravac prolazi točkama (2, 0) i (0, –2).

Zrcalnu sliku dijela toga pravca ispod osi apscisa najlakše dobijemo tako da točku (0, –2) zrcalimo s obzirom na os apscisa, pri čemu prva koordinata točke ostaje nepromijenjena, a drugoj mijenjamo predznak. Tako dobijemo točku (0, 2). Povučemo polupravac kojemu je početak u točki (2, 0) i koji prolazi točkom (0, 2).

Napokon, prigodom pomicanja svake točke krivulje dobivene u prethodnom koraku za tri jedinične dužine prema dolje prva koordinata točke ostaje nepromijenjena, a druga se smanjuje za 3. Tako se točka (2, 0) preslika u točku (2, –3), točka (0, 2) u točku (0, –1), a npr. točka (3, 1) pravca $y = x - 2$ u točku (3, –2). Preostaje nacrtati dva polupravca kojima je početak u točki (2, –3). Prvi polupravac prolazi točkom (0, –1), a drugi točkom (3, –2). Tako se dobije tražena krivulja.

29. 1.) $\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi$, pri čemu je $k\in\mathbb{Z}$. Primijenimo osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, odnosno njemu ekvivalentan identitet $\sin^2 x=1-\cos^2 x$. Dobivamo:

$$2\cdot(1-\cos^2 x)-3\cdot\cos x=0,$$
$$2-2\cdot\cos^2 x-3\cdot\cos x=0,\quad /:(-1)$$
$$2\cdot\cos^2 x+3\cdot\cos x-2=0.$$

Zamijenimo $t:=\cos x$. Budući da za svaki $x\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $-1\le\cos x\le 1$, vrijedi i nejednakost $-1\le t\le 1$. Navedenom zamjenom dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$2\cdot t^2+3\cdot t-2=0.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 2\cdot(-2)}}{2\cdot 2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-(-16)}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4},$$
$$t_1=\frac{-3+5}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ t_2=\frac{-3-5}{4}=-\frac{8}{4}=-2.$$

Rješenje $t_2=-2$ ne zadovoljava nejednakost $-1\le t\le 1$, pa to rješenje odbacujemo. Tako preostaje $t=t_1=\frac{1}{2}$, odnosno $\cos x=\frac{1}{2}$.

Ova jednadžba u segmentu $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$ ima jedinstveno rješenje $x=\frac{\pi}{3}$. Zbog parnosti funkcije kosinus, rješenje jednadžbe je i $x_1=-\frac{\pi}{3}$. Zbog $(2\cdot\pi)-$periodičnosti funkcije kosinus, zaključujemo da su sva rješenja polazne jednadžbe

$$x_k=\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi,$$
$$x_l=-\frac{\pi}{3}+l\cdot 2\cdot\pi,$$

pri čemu su $k,l\in\mathbb{Z}$. Ekvivalentno, sva rješenja polazne jednadžbe dana su izrazom

$$x_k=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\cdot\pi,\ \text{pri čemu je } k\in\mathbb{Z}.$$

2.) $c\in\left\{-2\cdot\sqrt{13},\ 2\cdot\sqrt{13}\right\}$. Zapišimo jednadžbu tangente u eksplicitnom obliku:

$$2\cdot y=-3\cdot x+c,\quad /:2$$
$$y=-\frac{3}{2}\cdot x+\frac{c}{2}.$$

Očitamo obje koordinate središta kružnice, kvadrat polumjera kružnice, koeficijent smjera tangente i odsječak tangente na osi ordinata:

$$p=4,\ q=-6,\ r^2=4,\ k=-\frac{3}{2},\ l=\frac{c}{2}.$$

Preostaje primijeniti uvjet tangencijalnosti za kružnicu $(q-k\cdot p-l)^2=r^2\cdot(1+k^2)$. Uvrštavanjem gornjih podataka dobijemo:

$$\left[-6-\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 4-\frac{c}{2}\right]^2=4\cdot\left[1+\left(-\frac{3}{2}\right)^2\right],$$

$$\left[-6-(-6)-\frac{c}{2}\right]^2=4\cdot\left(1+\frac{9}{4}\right),$$

$$\left(-6+6-\frac{c}{2}\right)^2=4+9,$$

$$\left(-\frac{c}{2}\right)^2=13,$$

$$\frac{c^2}{4}=13,\quad /\cdot 4$$

$$c^2=4\cdot 13,$$

$$c_{1,2}=\pm\sqrt{4\cdot 13}=\pm\sqrt{4}\cdot\sqrt{13}=\pm 2\cdot\sqrt{13},$$

$$c_1=2\cdot\sqrt{13},\ c_2=-2\cdot\sqrt{13}.$$

Dakle, sve tražene vrijednosti tvore skup $S=\left\{-2\cdot\sqrt{13},\ 2\cdot\sqrt{13}\right\}$.

3.) 15 cm; 8 cm. Neka je m duljina male, a v duljina velike kazaljke (obje duljine su iskazane u cm). Prema prirodi problema vrijedi nejednakost $0<m<v$ jer je duljina male kazaljke uvijek strogo manja od duljine velike kazaljke.

Podioci koji označavaju sate dijele kružnicu na 12 jednakih dijelova, a kut mjere 360° na 12 jednakih dijelova. Stoga je kut koji kazaljke zatvaraju u 14:00 sati jednak $2\cdot\frac{360^\circ}{12}=60^\circ$, dok je kut koji kazaljke zatvaraju u 9:00 sati $9\cdot\frac{360^\circ}{12}=270^\circ$, odnosno - gledajući manji kut – $360^\circ-270^\circ=90^\circ$.

Najprije promotrimo položaj kazaljki u 14:00 sati. Spojimo njihove vrhove dužinom. Tako dobijemo trokut kojemu su duljine dviju stranica m i v, kut između tih stranica 60°, a duljina treće stranice 13 cm. Prema kosinusovu poučku vrijedi jednakost

$$13^2=m^2+v^2-2\cdot m\cdot v\cdot\cos(60^\circ),$$

odnosno

$$169=m^2+v^2-2\cdot m\cdot v\cdot\frac{1}{2},$$

$$m^2+v^2-m\cdot v=169.$$

Sad promotrimo položaj kazaljki u 9:00 sati. Postupimo analogno. Spojimo vrhove kazaljki dužinom. Tako dobijemo trokut kojemu su duljine dviju stranica m i v, kut između tih stranica 90°, a duljina treće stranice 17 cm. Taj trokut je pravokutan, pa prema Pitagorinu poučku vrijedi jednakost:

$$17^2 = m^2 + v^2,$$

odnosno

$$m^2 + v^2 = 289.$$

Tako smo dobili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} m^2 + v^2 - m \cdot v = 169, \\ m^2 + v^2 = 289. \end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Uvrstimo drugu jednadžbu sustava u prvu jednadžbu, pa dobijemo:

$$289 - m \cdot k = 169,$$

a otuda je

$$m \cdot k = 289 - 169 = 120,$$
$$2 \cdot m \cdot k = 2 \cdot 120 = 240.$$

Sad jednadžbi $m^2 + v^2 = 289$ najprije dodajmo jednadžbu $2 \cdot m \cdot k = 240$, a potom od jednadžbe $m^2 + v^2 = 289$ oduzmimo jednadžbu $2 \cdot m \cdot k = 240$. Dobijemo redom:

$$m^2 + v^2 + 2 \cdot m \cdot v = 289 + 240,$$
$$m^2 + 2 \cdot m \cdot v + v^2 = 529,$$
$$(m + v)^2 = 529, \quad / \sqrt{\ }$$
$$m + v = 23.$$

(Smjeli smo korjenovati obje strane pretposljednje jednakosti jer iz nejednakosti $0 < m < v$ slijedi $m + v > 0$, pa su i lijeva i desna strana pretposljednje jednakosti kvadrati strogo pozitivnih realnih brojeva.)

Analogno je

$$m^2 + v^2 - 2 \cdot m \cdot v = 289 - 240,$$
$$m^2 - 2 \cdot m \cdot v + v^2 = 49,$$
$$(m - v)^2 = 49, \quad / \sqrt{\ }$$
$$|m - v| = 7.$$

Međutim, iz nejednakosti $0 < m < v$ slijedi $m - v < 0$, pa je $|m - v| = -(m - v) = v - m$, odnosno

$$v - m = 7.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} m+v=23, \\ v-m=7. \end{cases}$$

Zbrajanjem obiju jednadžbi dobijemo $2\cdot v=30,$ a otuda je $v=15$. Oduzimanjem druge jednadžbe od prve dobijemo $2\cdot m=16,$ a odatle je $m=8$.

Dakle, duljina velike kazaljke je 15 cm, a duljina male kazaljke 8 cm.

4.) $T=\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$ **.** Povucimo točkom A pravac p_1 okomit na zadani pravac. Njegov koeficijent smjera je suprotan i recipročan u odnosu na koeficijent smjera zadanoga pravca. Koeficijent smjera zadanoga pravca jednak je 2, pa je koeficijent smjera pravca p_1 jednak

$$k_1=-\frac{1}{2}.$$

Odredimo jednadžbu pravca p_1. Poznati su nam jedna točka $A=(4,-2)$ i koeficijent smjera $k_1=-\frac{1}{2}$ toga pravca, pa imamo:

$$p_1 \ldots\ y-(-2)=-\frac{1}{2}\cdot(x-4),$$

$$p_1 \ldots\ y=-\frac{1}{2}\cdot x+2-2,$$

$$p_1 \ldots\ y=-\frac{1}{2}\cdot x.$$

Odredimo sjecište zadanoga pravca i pravca p_1. U tu svrhu riješimo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y=2\cdot x-3, \\ y=-\frac{1}{2}\cdot x. \end{cases}$$

Primijenimo metodu komparacije. Lijeve strane tih jednadžbi su jednake, pa i njihove desne strane moraju biti jednake. Izjednačavanjem desnih strana dobijemo:

$$2\cdot x-3=-\frac{1}{2}\cdot x,$$

$$2\cdot x+\frac{1}{2}\cdot x=3,$$

$$\frac{5}{2}\cdot x=3.$$

Odatle dijeljenjem s $\frac{5}{2}$ slijedi $x=\frac{6}{5}$.

Uvrštavanjem te vrijednosti u drugu jednadžbu sustava odmah dobijemo

$$y=-\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Dakle, sjecište zadanoga pravca i pravca p_1 je točka $S=\left(\frac{6}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

Napokon, neka je $T=(x_T,\ y_T)$ tražena točka. Iz podatka da je ta točka simetrična točki A s obzirom na zadani pravac zaključujemo da je točka S polovište dužine $\overline{AT}$. Polovište dužine $\overline{AT}$ u općem slučaju ima koordinate

$$P=\left(\frac{x_A+x_T}{2},\frac{y_A+y_T}{2}\right)=\left(\frac{4+x_T}{2},\frac{-2+y_T}{2}\right).$$

Ta točka se mora podudarati s točkom S. To znači da prva koordinata točke P treba biti jednaka prvoj koordinati točke S i da druga koordinata točke P treba biti jednaka drugoj koordinati točke S. Tako dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases}\frac{4+x_T}{2}=\frac{6}{5},\\ \frac{-2+y_T}{2}=-\frac{3}{5}.\end{cases}$$

Riješimo taj sustav. Pomnožimo obje jednadžbe s 2:

$$\begin{cases}4+x_T=\frac{12}{5},\\ -2+y_T=-\frac{6}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_T=\frac{12}{5}-4=-\frac{8}{5},\\ y_T=-\frac{6}{5}+2=\frac{4}{5}.\end{cases}$$

Dakle, tražena točka je $T=\left(-\frac{8}{5},\frac{4}{5}\right)$.

30. ≈1.92 kn. Neka su r duljina polumjera osnovke limenke i v duljina visine limenke (obje duljine su iskazane u metrima). Obujam limenke je 0.35 L = 0.35 dm^3 = $0.35\cdot10^{-3}$ m^3 = 0.00035 m^3, što znači da vrijedi jednakost

$$r^2\cdot\pi\cdot v=0.00035.$$

Prigodom izrade limenke potroši se onoliko četvornih metara materijala koliko iznosi oplošje te limenke. Oplošje limenke iznosi:

$$O=2\cdot r^2\cdot\pi+2\cdot r\cdot\pi\cdot v.$$

Želimo li da za izradu limenke bude potrošeno najmanje materijala, oplošje limenke mora

biti najmanje. Tako dobivamo sljedeći optimizacijski problem:

$$\begin{aligned}
&\text{minimizirati } O = 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot v\\
&\text{pod uvjetima}\\
&r^2\cdot\pi\cdot v = 0.00035,\\
&r, v > 0.
\end{aligned}$$

Svedimo taj problem na optimizacijski problem funkcije jedne varijable. Iz uvjeta $r^2\cdot\pi\cdot v = 0.00035$ izrazimo varijablu v:

$$v = \frac{0.00035}{r^2\cdot\pi},$$

pa uvrstimo dobiveni izraz u funkciju cilja O:

$$O = 2\cdot r^2\cdot\pi + 2\cdot r\cdot\pi\cdot\frac{0.00035}{r^2\cdot\pi},$$

$$O = 2\cdot r^2\cdot\pi + \frac{0.0007}{r}.$$

Tražimo globalni minimum toga izraza. Promatramo taj izraz kao realnu funkciju jedne realne varijable r. Prva derivacija toga izraza po varijabli r je:

$$O' = 2\cdot\pi\cdot(2\cdot r^{2-1}) + \frac{(0.0007)'\cdot r - 0.0007\cdot(r)'}{r^2},$$

$$O' = 4\cdot\pi\cdot r^1 + \frac{0\cdot r - 0.0007\cdot 1}{r^2},$$

$$O' = 4\cdot\pi\cdot r - \frac{0.0007}{r^2}.$$

Izjednačimo taj izraz s nulom. Dobivamo jednadžbu:

$$4\cdot\pi\cdot r - \frac{0.0007}{r^2} = 0.$$

Zbog prirodnoga uvjeta $r > 0$, gornju jednadžbu smijemo pomnožiti s r^2. Slijedi:

$$\begin{aligned}
&4\cdot\pi\cdot r - \frac{0.0007}{r^2} = 0 \quad /\cdot r^2\\
&4\cdot\pi\cdot r^3 - 0.0007 = 0,\\
&4\cdot\pi\cdot r^3 = 0.0007, \quad /:4\cdot\pi\\
&r^3 = \frac{0.0007}{4\cdot\pi} = \frac{0.7\cdot 10^{-3}}{4\cdot\pi} = \frac{7\cdot 10^{-1}\cdot 10^{-3}}{4\cdot\pi} = \frac{7\cdot 10^{-3}}{4\cdot 10^{1}\cdot\pi} = \frac{7\cdot 10^{-3}}{40\cdot\pi} = \frac{7\cdot 10^{-3}}{8\cdot 5\cdot\pi}.
\end{aligned}$$

Ova kubna jednadžba ima jedinstveno realno rješenje jer je funkcija $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definirana pravilom $h(x) = x^3$ bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ u samoga sebe. To jedinstveno rješenje je:

$$r=\sqrt[3]{\frac{7\cdot 10^{-3}}{8\cdot 5\cdot \pi}}=\sqrt[3]{\frac{10^{-3}}{8}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}=\frac{\sqrt[3]{10^{-3}}}{\sqrt[3]{8}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}=\frac{10^{-1}}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}=\frac{1}{2\cdot 10^{1}}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}=\frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}.$$

Izračunamo li približnu vrijednost polumjera *r*, dobit ćemo:

$$r\approx 0.038191.$$

Treba provjeriti da se za tu vrijednost doista postiže globalni minimum na intervalu $\langle 0,+\infty\rangle$. Odaberimo $r_1=0.01$ i $r_2=1$, pa izračunamo:

$$O'(0.01)=4\cdot\pi\cdot 0.01-\frac{0.0007}{0.01^2}=0.04\cdot\pi\cdot-\frac{0.0007}{0.0001}=0.04\cdot\pi-7<0,$$

$$O'(1)=4\cdot\pi\cdot 1-\frac{0.0007}{1^2}=4\cdot\pi\cdot-\frac{0.0007}{1}=4\cdot\pi-0.0007>0.$$

Naime, iz nejednakosti $\pi<7$ slijedi $0.04\cdot\pi<0.04\cdot 7=0.28<7$, pa je $0.04\cdot\pi-7<0$. Analogno, iz nejednakosti $\pi>0.0007$ slijedi $4\cdot\pi>4\cdot 0.0007=0.0028>0.0007$, odnosno $4\cdot\pi-0.0007>0$.

Iz dobivenih vrijednosti zaključujemo da funkcija O strogo pada na intervalu $\langle 0,r\rangle$, a strogo raste na intervalu $\langle r,+\infty\rangle$, pa O doista ima najmanju vrijednost za $r=\frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}$.

Izračunajmo tu vrijednost:

$$O_{\min}=2\cdot\left(\frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}\right)^2\cdot\pi+\frac{0.0007}{\frac{1}{20}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}}=2\cdot\frac{1}{400}\cdot\sqrt[3]{\frac{7^2}{5^2\cdot\pi^2}}\cdot\pi+\frac{20\cdot 0.0007}{\sqrt[3]{\frac{7}{5\cdot\pi}}}=$$

$$=\frac{1}{200}\cdot\sqrt[3]{\frac{7^2}{5^2\cdot\pi^2}\cdot\pi^3}+\frac{0.014\cdot\sqrt[3]{5\cdot\pi}}{\sqrt[3]{7}}=\frac{1}{200}\cdot\sqrt[3]{\frac{49}{25}\cdot\pi}+\frac{7\cdot\sqrt[3]{5\cdot\pi}}{500\cdot\sqrt[3]{7}}\approx 0.027493\ \mathrm{m}^2.$$

Stoga je tražena cijena materijala (približno) jednaka

$$C=O_{\min}\cdot 70=1.92453\ \mathrm{kn}\approx 1.92\ \mathrm{kn}.$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač