TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. D. Zadatak rješavamo koristeći kalkulator. Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga izraza:

$\log_2 9 = \dfrac{\log 9}{\log 2} = \dfrac{0.9542425094393248745900558065 1023}{0.30102999566398119521373889472449} \approx 3.169925$ (ovdje smo primijenili identitet $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$, a mogli smo primijeniti i identitet $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ s istim rezultatom);

$\sin(47°15') = \sin\left(47° + \dfrac{15}{60}^{\circ}\right) = \sin\left(47° + \dfrac{1}{4}^{\circ}\right) = \sin\left(47° + 0.25°\right) = \sin 47.25° \approx 0.73432251$;

$\left|\dfrac{5}{3} : \dfrac{1}{2} - 5\right| = \left|\dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{2}{1} - 5\right| = \left|\dfrac{10}{3} - 5\right| = \left|\dfrac{10-15}{3}\right| = \left|-\dfrac{5}{3}\right| = \dfrac{5}{3} = 1.\dot{6} \approx 1.6666667$;

$2 \cdot 10^{0.34} \approx 2 \cdot 2.18776162394955256222611491638 42 \approx 4.3755232478991$.

Tako vidimo da su prve tri jednakosti točne, a četvrta pogrešna.

2. D. Iz zadane jednakosti uzimanjem drugoga korijena dobijemo:

$$|a| \le \sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \approx 2.82842712474619.$$

Budući da a mora biti cijeli broj, zapravo tražimo ukupan broj svih cijelih brojeva a takvih da vrijedi nejednakost

$$|a| \le 2,$$

odnosno

$$-2 \le a \le 2.$$

Pet je cijelih brojeva koji zadovoljavaju posljednju nejednakost. To su –2, –1, 0, 1 i 2.

3. C. Riješimo zadanu jednadžbu koristeći formulu za kvadrat zbroja i uobičajena pravila za rješavanje jednadžbe. Imamo redom:

$$(2 \cdot x)^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 - (x^2 + 3 \cdot x - 2 \cdot x - 6) = 2 - (x - 3 \cdot x^2),$$
$$4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25 - x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot x + 6 = 2 - x + 3 \cdot x^2,$$
$$4 \cdot x^2 - 20 \cdot x + 25 - x^2 - 3 \cdot x + 2 \cdot x + 6 - 2 + x - 3 \cdot x^2 = 0,$$
$$-20 \cdot x + 29 = 0$$
$$-20 \cdot x = -29.$$

Odatle dijeljenjem s (–20) dobivamo $x = \dfrac{29}{20}$ i to je jedino rješenje polazne jednadžbe.

4. B. Oplošje tetraedra jednako je zbroju površina četiriju sukladnih jednakostraničnih trokutova koji tvore osnovku i plašt tetraedra. Površina jednoga od tih trokutova je $P = \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$ kv.jed. , pri čemu je a duljina osnovnoga brida tetraedra. Stoga je oplošje tetraedra

$$O = 4 \cdot P = 4 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = a^2 \cdot \sqrt{3} \text{ kv. jed.}$$

Preostaje nam u navedeni izraz uvrstiti $a = 3$ cm, pa odmah slijedi $O = 3^2 \cdot \sqrt{3} = 9 \cdot \sqrt{3}$ cm^2.

5. B. Iz podatka da je brzina omjer prijeđenoga puta i vremena slijedi da je prijeđeni put jednak umnošku brzine i vremena. Pretpostavimo da jedna godina ima ukupno 365 dana, pa zaključujemo da je:

4.3 godine = 4.3 · 365 dana = 4.3 · 365 · 24 sata = 4.3 · 365 · 24 · 60 minuta = 4.3 · 365 · 24 · 60 · 60 sekundi = 135 604 800 sekundi ≈ 1.356 · 10^8 sekundi.

Iz podatka da svjetlost prijeđe 300 milijuna metara u sekundi zaključujemo da svjetlost prijeđe 300 000 kilometara u sekundi (tj. 1000 puta manje kilometara nego metara). Stoga je tražena udaljenost (iskazana u kilomterima) približno jednaka:

s = 300 000 kilometara/sekunda · 1.356 · 10^8 sekunda = 3 · 10^5 km/s ·1.356 ·10^8 s ≈ 4.1 · 10^{13} km,

odnosno, ako koeficijent uz potenciju zaokružimo na njemu najbliži prirodan broj, $s \approx 4 \cdot 10^{13}$ km.

6. B. Točku u kojoj graf zadane funkcije siječe os x dobit ćemo tako da riješimo jednadžbu $f(x) = 0$ po nepoznanici x, a točku u kojoj graf zadane funkcije siječe os y dobit ćemo tako da u propis zadane funkcije uvrstimo $x = 0$. Krenimo redom:

$$\begin{gathered} f(x) = 0, \\ \log_2(x+2) + 1 = 0, \\ \log_2(x+2) = -1, \\ x + 2 = 2^{-1}, \\ x = 2^{-1} - 2 = \frac{1}{2} - 2 = \frac{1 - 2 \cdot 2}{2} = \frac{1-4}{2} = -\frac{3}{2}. \end{gathered}$$

Dakle, graf zadane funkcije siječe os x u točki $S_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$. Odredimo sjecište s osi y:

$$f(0) = \log_2(0+2) + 1 = \log_2 2 + 1 = 1 + 1 = 2.$$

(Primijenili smo identitet $\log_a a = 1$, za svaki $a > 0$.) Stoga graf zadane funkcije siječe os y u točki $S_2(0, 2)$. Prema tome, tražena sjecišta su $S_1\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ i $S_2(0, 2)$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

7. **D.** Označimo s C ortogonalnu projekciju točke B na ravninu. Trokut ABC je pravokutan s pravim kutom u točki C. Znamo dva njegova elementa: $c = |AB| = 12$ cm i

$$\alpha = \angle BAC = 32°12' = 32° + \frac{12}{60}^{\circ} = 32° + \frac{1}{5}^{\circ} = 32° + 0.2° = 32.2°.$$

Tražena duljina ortogonalne projekcije dužine AB jednaka je duljini katete $b = \overline{AC}$ uočenoga trokuta. Izračunat ćemo je pomoću jednakosti

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}.$$

Iz te jednakosti odmah slijedi:

$$b = \left|\overline{AC}\right| = c \cdot \cos\alpha = 12 \cdot \cos(32.2°) = 12 \cdot 0.846193 \approx 10.154318 \approx 10.15 \text{ cm}.$$

8. **A.** Neka su a i b duljine stranica polaznoga pravokutnika. Njegova je površina

$$P = a \cdot b \text{ kv. jed.}$$

Poveća li se duljina polaznoga pravokutnika za 10%, nova duljina pravokutnika bit će

$$a' = a + \frac{10}{100} \cdot a = a \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = a \cdot (1 + 0.1) = 1.1 \cdot a.$$

Smanji li se širina polaznoga pravokutnika za 15%, nova širina pravokutnika bit će

$$b' = b - \frac{15}{100} \cdot b = b \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right) = b \cdot (1 - 0.15) = 0.85 \cdot b.$$

Površina pravokutnika čije stranice imaju duljine a' i b' jednaka je:

$$P' = a' \cdot b' = (1.1 \cdot a) \cdot (0.85 \cdot b) = (1.1 \cdot 0.85) \cdot a \cdot b = 0.935 \cdot (a \cdot b) = 0.935 \cdot P \text{ kv. jed.}$$

Stoga zaključujemo da se površina polaznoga pravokutnika smanjila za

$$\Delta P = P - P' = P - 0.935 \cdot P = (1 - 0.935) \cdot P = 0.065 \cdot P = \frac{0.065 \cdot 100}{100} \cdot P = \frac{6.5}{100} \cdot P = 6.5\% \cdot P$$

ili, kraće i nepreciznije, za 6.5%.

9. **A.** Dužina $\overline{BC}$ je tetiva trokutu opisane kružnice. Jedan njezin obodni kut je kut prvi vrhu A, točnije, $\angle BAC = 46°$. No, i kut $\angle BDC$ je također obodni kut nad tom tetivom. Budući da su obodni kutovi nad istom tetivom međusobno sukladni, slijedi $\angle BDC = \angle BAC = 46°$. Nadalje, pravac CD je simetrala kuta u vrhu C, što znači da je $\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$. Tako konačno dobivamo:

$$\angle CBD = 180° - (\angle BCD + \angle CDB) = 180° - (30° + 46°) = 180° - 76° = 104°.$$

10. B. Prema podatcima iz zadatka, težina astronauta obrnuto je razmjerna kvadratu njegove udaljenosti od središta Zemlje. To znači da vrijedi jednakost

$$T = \frac{k}{d^2} ,$$

pri čemu je T težina astronauta, a d njegova udaljenost od središta Zemlje. Iz te jednakosti slijedi

$$k = T \cdot d^2.$$

Primjenom navedene jednakosti na slučajeve kad je astronaut težak T_1 = 874 N udaljen od površine Zemlje za d_1 = 6 400 km i kad je astronaut težak T_2 = 74 N udaljen od površine Zemlje za d_2 km dobivamo:

$$T_1 \cdot d_1^2 = T_2 \cdot d_2^2 .$$

Odavde lagano slijedi

$$d_2 = \sqrt{\frac{T_1 \cdot d_1^2}{T_2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \cdot d_1 ,$$

pa uvrštavanjem podataka T_1 = 824, T_2 = 74 i d_1 = 6 400 dobivamo:

$$d_2 = \sqrt{\frac{824}{74}} \cdot 6400 \approx 21\ 356.38394 \approx 21\ 356 \text{ km.}$$

Tražena udaljenost astronauta od površine Zemlje je za 6 400 km manja i iznosi približno

$$d' = d_2 - 6\ 400 = 14\ 956 \text{ km.}$$

11. A. Primijenit ćemo sljedeće identitete:

$x^3 + 8 = x^3 + 2^3 = (x + 2) \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 4),$
$x^4 - 16 = (x^2)^2 - 4^2 = (x^2 - 4) \cdot (x^2 + 4) = (x^2 - 4^2) \cdot (x^2 + 4) = (x - 2) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 4);$
$x^3 - 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 8 = x^2 \cdot (x - 2) + 4 \cdot (x - 2) = (x - 2) \cdot (x^2 + 4).$

Tako je baza potencije jednaka:

$$\frac{(x+2)\cdot(x^2-2\cdot x+4)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)}+\frac{2\cdot x}{(x-2)\cdot(x^2+4)}=\frac{x^2-2\cdot x+4}{(x-2)\cdot(x^2+4)}+\frac{2\cdot x}{(x-2)\cdot(x^2+4)}=$$
$$=\frac{x^2-2\cdot x+4+2\cdot x}{(x-2)\cdot(x^2+4)}=\frac{x^2+4}{(x-2)\cdot(x^2+4)}=\frac{1}{x-2}$$

Stoga je polazni izraz jednak

$$\left(\frac{1}{x-2}\right)^{-2}=\left[(x-2)^{-1}\right]^{-2}=(x-2)^2 .$$

12. B. Riješimo zasebno svaku nejednadžbu. Imamo redom:

I. $\frac{2\cdot x-1}{x+2}<1\Leftrightarrow\frac{2\cdot x-1}{x+2}-1<0\Leftrightarrow\frac{2\cdot x-1-(x+2)}{x+2}<0\Leftrightarrow\frac{2\cdot x-1-x-2}{x+2}<0\Leftrightarrow\frac{x-3}{x+2}<0$. Tako imamo ukupno dvije mogućnosti:

a) $x-3<0$ i $x+2>0$, otkuda je $x<3$ i $x>-2$, što daje interval $\langle -2, 3\rangle$;
b) $x-3>0$ i $x+2<0$, otkuda je $x>3$ i $x<-2$, što je nemoguće.

Dakle, rješenje prve nejednadžbe je interval $\langle -2, 3\rangle$.

II. Iz $3\cdot x+3<0$ slijedi $3\cdot x<-3$, odnosno dijeljenjem s 3 (pri čemu se znak nejednakosti ne mijenja) $x<-1$. Stoga je rješenje druge nejednadžbe interval $\langle -\infty, -1\rangle$.

Tako je skup svih rješenja zadanoga sustava nejednadžbi jednak $\langle -2, 3\rangle\cap\langle -\infty, -1\rangle=\langle -2, -1\rangle$.

13. C. Iz zadane slike razabiremo da graf polazne linearne funkcije prolazi točkom (0, 1), što znači da je $f(0)=1$. Stoga za funkciju $f_1=\frac{1}{f}$ vrijedi $f_1(0)=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{1}=1$, pa i njezin graf prolazi točkom (0, 1).
Nadalje, graf funkcije f siječe os x u točki $S_1(x_0, 0)$, što znači da je $f(x_0)=0$. No, to znači da $f_1(x_0)$ ne postoji jer je $f_1(x_0)=\frac{1}{f(x_0)}=\frac{1}{0}$, a vrijednost toga izraza nije definirana. Stoga graf funkcije f_1 ima okomitu asimptotu $x=x_0$. Budući da je očito $x_0<0$, ta okomita asimptota nalazi se lijevo od osi ordinata.
Jedini od svih četiriju ponuđenih grafova koji ima okomitu asimptotu lijevo od osi ordinata i prolazi točkom (0, 1) je graf C. (Grafovi B i D ne prolaze točkom (0, 1), a graf A nema niti jednu okomitu asimptotu.)

14. B. Odredimo najprije koji redni broj odgovara svakom pojedinom datumu. Datumu 22. veljače odgovara redni broj $d_1=31+22=53$, a datumu 2. veljače odgovara redni broj $d_2=31+2=33$. Stoga je temperatura zraka 22. veljače jednaka $T(53)$, tj.

$$T(53)=a\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi}{365}\cdot(53-123)\right]=a\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi}{365}\cdot(-70)\right]=a\cdot\sin\left(-\frac{28}{73}\cdot\pi\right)=-a\cdot\sin\left(\frac{28}{73}\cdot\pi\right).$$

Ovdje smo primijenili činjenicu da je funkcija sinus neparna funkcija, tj. da vrijedi identitet:

$$\sin(-x) = -\sin x, \text{ za svaki } x \in \mathbf{R}.$$

Analogno, temperatura zraka 2. veljače jednaka je $T(33)$, tj.

$$T(33)=a\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi}{365}\cdot(33-123)\right]=a\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi}{365}\cdot(-90)\right]=a\cdot\sin\left(-\frac{36}{73}\cdot\pi\right)=-a\cdot\sin\left(\frac{36}{73}\cdot\pi\right).$$

Prema uvjetu zadatka mora vrijediti jednakost

$$T(53) - T(33) = 1.3,$$

pa uvrštavanjem gornjih jednakosti dobivamo jednadžbu:

$$-a\cdot\sin\left(\frac{28}{73}\cdot\pi\right)-\left[-a\cdot\sin\left(\frac{36}{73}\cdot\pi\right)\right]=1.3,$$

odnosno

$$a\cdot\left[\sin\left(\frac{36}{73}\cdot\pi\right)-\sin\left(\frac{28}{73}\cdot\pi\right)\right]=1.3,$$

a odatle je

$$a=\frac{1.3}{\sin\left(\frac{36}{73}\cdot\pi\right)-\sin\left(\frac{28}{73}\cdot\pi\right)}\approx\frac{1.3}{0.9997685-0.9338372}\approx 19.7175\approx 19.7\ .$$

15. B. Primijetimo najprije da je broj $n!$ djeljiv s brojem $k!$ ako i samo ako vrijedi nejednakost $n \geq k$. Ta tvrdnja slijedi izravno iz identiteta

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k\cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n = k!\cdot (k+1)\cdot \ldots \cdot (n-1)\cdot n.$$

Znamo da je $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ i taj je broj djeljiv s 30. Prema iskazanoj tvrdnji, brojevi 6!, 7!, 8!, …, 13!, 14! i 15! djeljivi su s $5! = 120$, pa je posebno svaki od njih djeljiv i s 30. Stoga je traženi ostatak jednak ostatku koji daje zbroj $1! + 2! + 3! + 4!$ pri dijeljenju s 30. Budući da je

$$1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 1\cdot 2 + 1\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 1 + 2 + 6 + 24 = 33,$$

zapravo tražimo ostatak pri dijeljenju broja 33 s 30. Taj je ostatak očito jednak 3.

Primijetimo da isti zaključak vrijedi i za zbroj $1! + 2! + 3! + \ldots + n!$, gdje je $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 5$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

16. $\frac{b-a}{d}+1$**.** Imamo redom:

$$b - a = (n - 1) \cdot d \quad /:d$$
$$\frac{b-a}{d} = n-1,$$
$$n = \frac{b-a}{d}+1.$$

17. 160° i 55°. Prisjetimo se činjenice da je u *svakom* trapezu zbroj dvaju susjednih kutova jednak 180°. Zbroj mjera dvaju zadanih kutova jednak je 20° + 125° = 145° ≠ 180°, pa zaključujemo da zadani kutovi nisu susjedni, nego nasuprotni. Stoga su mjere preostalih dvaju kutova jednake

$$180° - 20° = 160° \text{ i } 180° - 55° = 125°.$$

18. 1.) –1. Zadanu jednadžbu transformirajmo na sljedeći način:

$$10 \cdot x^2 - 10 = 21 \cdot x,$$
$$10 \cdot x^2 - 21 \cdot x - 10 = 0, \quad /:10$$
$$x^2 - \frac{21}{10} \cdot x - 1 = 0\,.$$

Tako smo dobili normiranu kvadratnu jednadžbu (onu u kojoj je koeficijent uz x^2 jednak 1). Prema Vièteovim formulama, umnožak obaju rješenja te jednadžbe jednak je slobodnom članu u toj jednadžbi, tj. –1.

2.) $S = \mathbf{R} \setminus \left\langle \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\rangle = \left\langle -\infty, \frac{4}{3} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$. Zadanu nejednadžbu možemo zapisati u obliku:

$$6 \cdot x^2 - 17 \cdot x + 12 \geq 0.$$

Na lijevoj strani te nejednadžbe je polinom 2. stupnja (kvadratna funkcija). Njezin vodeći koeficijent je 6 > 0, pa njezin graf ima oblik ∪. Stoga je vrijednost te funkcije nenegativna na intervalu koji se dobije kad se iz skupa **R** „izbaci“ otvoreni interval određen realnim nultočkama te funkcije. Riješimo li kvadratnu jednadžbu

$$6 \cdot x^2 - 17 \cdot x + 12 = 0,$$

dobit ćemo:

$$x_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{17^2 - 4 \cdot 6 \cdot 12}}{2 \cdot 6} = \frac{17 \pm \sqrt{289-288}}{12} = \frac{17 \pm 1}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{17-1}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3},\ x_2 = \frac{17+1}{12} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

Dakle, skup svih rješenja polazne nejednadžbe je $S = \mathbf{R} \setminus \left\langle \frac{4}{3}, \frac{3}{2} \right\rangle$. Taj skup možemo zapisati i kao uniju dvaju disjunktnih poluzatvorenih intervala, tj. kao $S = \left\langle -\infty, \frac{4}{3} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$.

19. 1.) $\frac{9}{k+1}$ **za** $\boldsymbol{k \neq -1}$. Iz druge jednadžbe sustava slijedi:

$$\frac{x}{y} = k,$$
$$x = k \cdot y$$

Uvrštavanjem te jednakosti u prvu jednadžbu sustava dobijemo:

$$\sqrt{k \cdot y + y} = 3 \quad /^2$$
$$k \cdot y + y = 3^2,$$
$$y \cdot (k+1) = 9,$$
$$y = \frac{9}{k+1}.$$

Odmah primijetimo da izraz za y nije definiran ako je $k = -1$ jer uvrštenjem te vrijednosti u polazni sustav dobivamo nemoguću jednakost $0 = 3$. Stoga je izraz za y definiran uz dodatnu pretpostavku $k \neq -1$.

2.) 57. Neka su x polazni broj, d njegova znamenka desetica, a j njegova znamenka jedinica. Tada vrijedi jednakost:

$$x = 10 \cdot d + j.$$

Zamijenimo li znamenke, tj. postane li j znamenka desetica, a d znamenka jedinica, dobit ćemo broj

$$y = 10 \cdot j + d.$$

Prema uvjetu zadatka moraju vrijediti jednakosti:

$$d + j = 12,$$
$$y - x = 18.$$

Uvrštavanjem izraza $x = 10 \cdot d + j$ i $y = 10 \cdot j + d$ u drugu od gornjih dviju jednakosti dobijemo:

$$10 \cdot j + d - (10 \cdot d + j) = 18,$$
$$10 \cdot j + d - 10 \cdot d - j = 18,$$
$$9 \cdot j - 9 \cdot d = 18,$$

$$9 \cdot (j - d) = 18, \ /:9$$
$$j - d = 2.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} d + j = 12 \\ j - d = 2 \end{cases}$$

Zbrajanjem tih dviju jednadžbi dobivamo $j = 7$, a oduzimanjem $d = 5$. Stoga je polazni broj

$$x = 10 \cdot d + j = 10 \cdot 5 + 7 = 57.$$

20. 1.) $(a^2 - 1) + a \cdot i$. Koristeći jednakost $i^2 = -1$ i formulu za kvadrat zbroja imamo redom:

$$z = a^2 + 2 \cdot a \cdot i + i^2 + \frac{a \cdot i}{i \cdot i} = a^2 + 2 \cdot a \cdot i + (-1) + \frac{a \cdot i}{-1} = (a^2 - 1) + 2 \cdot a \cdot i - a \cdot i = (a^2 - 1) + a \cdot i \ .$$

2.) 2. Zadani je broj već zapisan u trigonometrijskom obliku, tj. u obliku $z = r \cdot \text{cis } \varphi = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, gdje je r apsolutna vrijednost broja z, a φ njegov argument. Naime,

$$z = 2 \cdot \cos\left(\frac{2}{7} \cdot \pi\right) + 2 \cdot i \cdot \sin\left(\frac{2}{7} \cdot \pi\right) = 2 \cdot \left[\cos\left(\frac{2}{7} \cdot \pi\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2}{7} \cdot \pi\right)\right] ,$$

pa lagano očitamo $r = 2$ i $\varphi = \frac{2}{7} \cdot \pi$. Dakle, apsolutna vrijednost zadanoga broja jednaka je $r = 2$.

21. 1.) 37.89. Primijenimo sinusov poučak u obliku:

$$\frac{\left|\overline{MK}\right|}{\sin \angle KNM} = \frac{\left|\overline{KN}\right|}{\sin \angle KMN}$$

Odavde izravno slijedi:

$$\left|\overline{KN}\right| = \frac{\sin \angle KMN}{\sin \angle KNM} \cdot \left|\overline{MK}\right| = \frac{\sin 42°}{\sin 62°} \cdot 50 = \frac{0.66913061}{0.88294759} \cdot 50 \approx 37.891864 \approx 37.89 \text{ cm.}$$

2.). $5 \cdot \sqrt{22} \approx 23.45$. Neka je S nožište težišnice povučene iz vrha A. Produljimo uočenu težišnicu preko vrha S za njezinu duljinu i na taj način konstruirajmo točku D. Četverokut $ABDC$ je usporednik (paralelogram) jer mu se dijagonale AD i BC raspolavljaju u točki S. Naime, prema konstrukciji točke D, točka S je polovište dužine $\overline{AD}$, dok je S polovište dužine $\overline{BC}$ prema definiciji težišnice povučene iz vrha A na stranicu $a = \overline{BC}$.

Uočimo da je kut pri vrhu A četverokuta $ABDC$ jednak kutu α trokuta ABC. To znači da je kut pri vrhu B četverokuta $ABCD$ jednak

$$\beta' = 180° - \alpha$$

jer je zbroj dvaju susjednih kutova u svakom usporedniku jednak 180°. Primijenimo li kosinusov poučak na trokutove ABC i ABD, dobit ćemo:

$$a^2 = \left|\overline{BC}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{AC}\right|^2 - 2\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|\cdot\cos\angle CAB = c^2 + b^2 - 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha,$$
$$(2\cdot t_a)^2 = \left|\overline{AD}\right|^2 = \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{BD}\right|^2 - 2\cdot\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{BD}\right|\cdot\cos\angle ABD = c^2 + b^2 - 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\beta'.$$

Budući da za svaki $x \in \mathbf{R}$ vrijedi identitet

$$\cos(180° - x) = -\cos x,$$

to je

$$\cos\beta' = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Uvrštenjem toga identiteta u drugu od gornjih jednakosti dobivamo jednadžbe:

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha,$$
$$(2\cdot t_a)^2 = c^2 + b^2 + 2\cdot c\cdot b\cdot\cos\alpha.$$

Njihovim zbrajanjem dobijemo:

$$a^2 + 4\cdot t_a^2 = 2\cdot(c^2 + b^2) \quad /:2$$
$$\frac{a^2 + 4\cdot t_a^2}{2} = c^2 + b^2,$$
$$c^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{4\cdot t_a^2}{2},$$
$$c^2 = \frac{1}{2}\cdot a^2 + 2\cdot t_a^2 - b^2$$

Preostaje uvrstiti zadane podatke $a = 20$, $b = 30$, $t_a = 25$, pa konačno imamo:

$$c^2 = \frac{1}{2}\cdot 20^2 + 2\cdot 25^2 - 30^2 = \frac{1}{2}\cdot 400 + 2\cdot 625 - 900 = 200 + 1250 - 900 = 550,$$
$$c = \sqrt{550} = \sqrt{25\cdot 22} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{22} = 5\cdot\sqrt{22} \approx 23.4520788 \text{ cm}$$

22. **1.)** $-\frac{2}{3}$. Članove jednadžbe zapisat ćemo kao potencije s bazom 2 koristeći jednakosti $4 = 2^2$ i $8 = 2^3$. Pri sređivanju izraza primijenit ćemo pravilo da se potencija potencira tako da se njezina baza prepiše, a eksponenti pomnože. Imamo redom:

$$(2^2)^{3\cdot x-2}=\left(\frac{1}{2^3}\right)^{2-x},$$
$$2^{2\cdot(3\cdot x-2)}=\left[(2^3)^{-1}\right]^{2-x},$$
$$2^{6\cdot x-4}=2^{-6+3\cdot x}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobijemo:

$$6\cdot x-4=-6+3\cdot x,$$
$$6\cdot x-3\cdot x=-6+4,$$
$$3\cdot x=-2.$$

Dijeljenjem s 3 dobijemo $x=-\frac{2}{3}$.

2.) $x < 4$ ili $x \in \langle -\infty, 4\rangle$. Imamo redom:

$$6^x<16\cdot 3^x \quad /:3^x$$
$$\frac{6^x}{3^x}<16$$
$$\left(\frac{6}{3}\right)^x<16,$$
$$2^x<2^4$$

Budući da je eksponencijalna funkcija $f(x) = 2^x$ strogo rastuća (jer joj je baza strogo veća od 1), prigodom usporedbe eksponenata znak nejednakosti ostaje nepromijenjen. Tako se odmah dobije $x < 4$ ili, ekvivalentno, $x \in \langle -\infty, 4\rangle$.

23. 1.) 961. Traženi broj jednak je prirodnom broju koji je najbliži vrijednosti $B(21)$. Budući da je

$$B(21) = 300\cdot 1.057^{21} \approx 960.94,$$

traženi broj bakterija jednak je 961.

2.) 74.0804%. Traženi postotak jednak je vrijednosti $\frac{B(t+10)-B(t)}{B(t)}\cdot 100=\left[\frac{B(t+10)}{B(t)}-1\right]\cdot 100$.

Budući da je $B(t + 10) = 300\cdot 1.057^{t+10}$, uvrštavanjem redom dobivamo:

$$p=\left(\frac{300\cdot 1.057^{t+10}}{300\cdot 1.057^{t}}-1\right)\cdot 100$$
$$p=(1.057^{10}-1)\cdot 100$$
$$p\approx 74.0804\ \%.$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

24. 1.) 0.4636. Primijenit ćemo identitet:

$$\sin(2\cdot x) = 2\cdot \sin x\cdot \cos x,$$

te činjenicu da za svaki $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ vrijedi nejednakost $\cos x > 0$. Imamo redom:

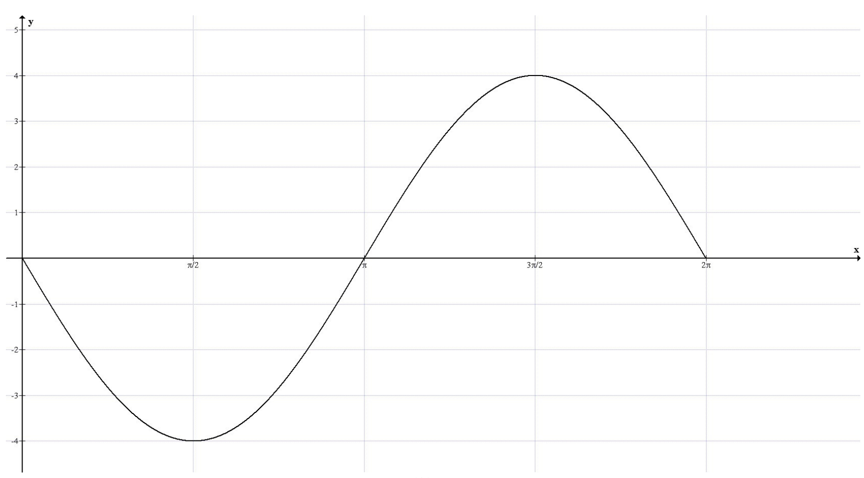
$$\begin{aligned}
\cos^2 x &= \sin(2\cdot x),\\
\cos^2 x &= 2\cdot \sin x\cdot \cos x \quad /:\cos^2 x > 0,\\
1 &= 2\cdot\frac{\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}\\
1 &= 2\cdot\frac{\sin x}{\cos x},\\
1 &= 2\cdot \operatorname{tg} x \quad /:2\\
\operatorname{tg} x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Otuda slijedi $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} \approx 0.463647609 \approx 0.4636$ radijana.

2.) Vidjeti Sliku 1. Zadanu funkciju možemo nacrtati izravno ili koristeći transformaciju:

$$f(x) = 4\cdot\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = 4\cdot\left(\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right) = 4\cdot(-\sin x) = -4\cdot\sin x.$$

Ovako transformiranu funkciju je lako nacrtati. Osnovnu sinusoidu (graf funkcije $g(x) = \sin x$) „izdužimo“ 4 puta, pa konstruiramo osno simetričnu sliku tako dobivene krivulje s obzirom na os x. Dobijemo krivulju kao na Slici 1.



Slika 1.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

25. 1.) $-\pi\cdot\sin x$. Zadanu funkciju deriviramo tako da konstantu π prepišemo, a izraz $\cos x$ deriviramo. Derivacija funkcije $g(x) = \cos x$ je $g'(x) = -\sin x$, pa je

$$f'(x) = \pi\cdot(-\sin x) = -\pi\cdot\cos x.$$

2.) 9. Odredimo najprije $g'(x)$. Uočimo da je $g(x) = (2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}}$, pa primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo redom:

$$g'(x) = \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{3}{2}-1}\cdot(2\cdot x-3)'$$
$$g'(x) = \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(2\cdot x)'-3'\right]$$
$$g'(x) = \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot(2-0),$$
$$g'(x) = \frac{3}{2}\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}}\cdot 2,$$
$$g'(x) = 3\cdot(2\cdot x-3)^{\frac{1}{2}},$$
$$g'(x) = 3\cdot\sqrt{2\cdot x-3}$$

Stoga je

$$g'(6) = 3\cdot\sqrt{2\cdot 6-3} = 3\cdot\sqrt{12-3} = 3\cdot\sqrt{9} = 3\cdot 3 = 9\ .$$

3.) –5. Odredimo najprije prve dvije derivacije funkcije h. Primjenom osnovnih pravila za deriviranje i tablice derivacija elementarnih funkcija dobivamo redom:

$$h'(x) = \frac{2}{3}\cdot 3\cdot x^{3-1} + \frac{9}{2}\cdot 2\cdot x^{2-1} - 5 - 0 = 2\cdot x^2 + 9\cdot x - 5,$$
$$h''(x) = 2\cdot 2\cdot x^{2-1} + 9 - 0 = 4\cdot x + 9$$

Uočimo da je $h''(x) < 0$ ako i samo ako je

$$4\cdot x + 9 < 0,$$

odnosno

$$4\cdot x < -9,$$

odnosno

$$x < -\frac{9}{4}.$$

Stoga tražimo onu stacionarnu točku zadane funkcije čija je prva koordinata strogo manja od $-\frac{9}{4}$.

Riješimo li jednadžbu $h'(x) = 0$, tj. kvadratnu jednadžbu

$$2 \cdot x^2 + 9 \cdot x - 5 = 0,$$

dobit ćemo:

$$x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+40}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{-9 \pm 11}{4} \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{-9+11}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{-9-11}{4} = -\frac{20}{4} = -5$$

Vrijednost x_1 je očito strogo veća od $-\frac{9}{4}$, pa je jedino moguće $x = -5$. Dakle, za $x = -5$ zadana funkcija postiže lokalni maksimum $h(-5) = = \frac{2}{3} \cdot (-5)^3 + \frac{9}{2} \cdot (-5)^2 - 5 \cdot (-5) - \frac{5}{6} = \frac{160}{3}$.

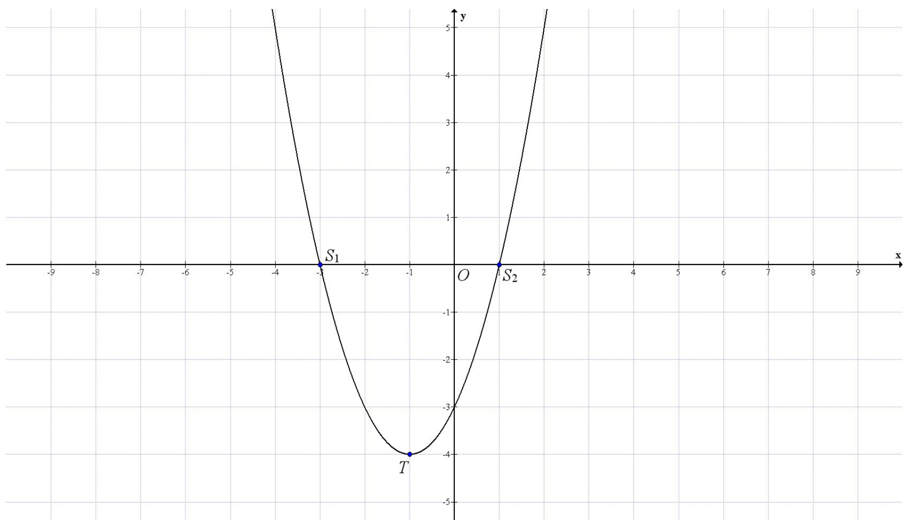
26. (–1,–4). Vidjeti Sliku 2. Iz propisa zadane funkcije očitamo $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$, pa uvrstimo te podatke u formulu za izračunavanje tjemena grafa kvadratne funkcije:

$$T\left(-\frac{b}{2 \cdot a}, \frac{4 \cdot a \cdot c - b^2}{4 \cdot a}\right) = \left(-\frac{2}{2 \cdot 1}, \frac{4 \cdot 1 \cdot (-3) - 2^2}{4 \cdot 1}\right) = \left(-\frac{2}{2}, \frac{-12-4}{4}\right) = \left(-1, -\frac{16}{4}\right) = (-1, -4) \ .$$

Budući da je vodeći koeficijent $a = 1$ strogo veći od nule, graf zadane funkcije je parabola oblika $\cup$. Za njezino jednoznačno definiranje (jer je svaki graf polinoma 2. stupnja jednoznačno određen zadavanjem bilo kojih triju različitih točaka toga grafa) odredimo još realne nultočke zadane funkcije:

$$x^2 + 2 \cdot x - 3 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \Rightarrow$$
$$x_1 = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3,\ x_2 = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Stoga traženi graf prolazi točkama $T(-1, -4)$, $S_1(-3, 0)$ i $S_2(1, 0)$. On je prikazan na Slici 2.



Slika 2.

27. 1.) $\boldsymbol{D_f = [-2,\ 1]}$**.** Svaki od drugih korijena koji se pojavljuje u propisu funkcije f definiran je za nenegativni radikand. Drugim riječima, svaki od izraza pod drugim korijenom mora biti nenegativan. Tako dobivamo sustav dviju linearnih nejednadžbi s jednom nepoznanicom:

$$\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases}$$

Iz prve nejednadžbe je $x \leq 1$, a iz druge $x \geq -2$. Svi realni brojevi koji istodobno nisu veći od 1 i nisu manji od –2 tvore segment [–2, 1]. Stoga je taj tražena domena zadane funkcije.

2.) $\boldsymbol{x = -\frac{1}{2}}$**.** Za $x \in D_f = [-2,\ 1]$ svaki od korijena iz propisa funkcije f je dobro definiran nenegativan realan broj. Stoga imamo redom:

$$\begin{aligned} &f(x) = 0 \\ &\sqrt{1-x} - \sqrt{x+2} = 0 \\ &\sqrt{1-x} = \sqrt{x+2} \quad /^2 \\ &1 - x = x + 2 \\ &-x - x = 2 - 1 \\ &(-2)\cdot x = 1 \quad / : (-2) \\ &x = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Očito je $x = \frac{1}{2} \in D_f$ i to je jedino rješenje polazne jednadžbe.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU
POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

28. 1.) $\frac{729}{4}$ **= 182.25.** Podsjetimo se osnovnoga svojstva geometrijskoga niza $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ čiji je prvi član a_1, a količnik q (pri čemu su g_1, $q \neq 0$). Za svaki prirodan broj n vrijedi jednakost

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q\,.$$

Posebno, za $n = 3$ vrijedi:

$$\frac{a_4}{a_3} = q\,.$$

Iz jednakosti $a_4 = \frac{3}{2} \cdot a_3$ zadane u zadatku dijeljenjem s a_3 dobijemo:

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}\,.$$

(Pritom koristimo očitu činjenicu da iz podatka $a_1 = 16$ i pretpostavke $q \neq 0$ slijedi da su svi članovi geometrijskoga niza različiti od nule, pa smijemo množiti i dijeliti jednakosti tim brojevima.) Uspoređivanjem jednakosti

$$\frac{a_4}{a_3} = q$$

$$\frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2}$$

slijedi $q = \frac{3}{2}$. (Lijeve strane tih jednakosti su jednake, pa takve moraju biti i desne strane.) Tako odmah imamo:

$$a_7 = a_1 \cdot q^{7-1} = 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = 2^4 \cdot \frac{3^6}{2^6} = \frac{3^6}{2^2} = \frac{729}{4} = 182.25\ .$$

2.) 476. Formulu za opći član zadanoga niza transformirajmo na sljedeći način::

$a_n = 24.2 - 0.6 \cdot n = 24.2 - 0.6 \cdot n + 0.6 - 0.6 = (24.2 - 0.6) + (-0.6 \cdot n - 1) = 23.6 + (-0.6) \cdot$
$\cdot (n - 1) = 23.6 + (n - 1) \cdot (-0.6)$.

Odatle zaključujemo da je $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = 23.6$, a razlika $d = -0.6$. Budući da je $d < 0$, riječ je o strogo padajućem aritmetičkom nizu. Odredimo koliko je ukupno njegovih članova strogo pozitivno. U tu svrhu u skupu prirodnih brojeva **N** riješimo nejednadžbu

$$a_n > 0.$$

Imamo redom:

$$24.2 - 0.6 \cdot n > 0,$$
$$-0.6 \cdot n > -24.2 \quad /:(-0.6),$$
$$n < \frac{24.2}{0.6} = \frac{242}{6} = \frac{121}{3} = 40\frac{1}{3}$$

Najveći prirodan broj koji zadovoljava posljednju nejednakost je $n = 40$. Stoga je svaki od prvih 40 članova zadanoga niza strogo pozitivan realan broj. Mi tražimo zbroj svih tih 40 članova. Taj ćemo zbroj izračunati prema formuli za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot \left[2 \cdot a_1 + (n-1) \cdot d\right].$$

Uvrstimo $n = 40$, $a_1 = 23.6$ i $d = -0.6$, pa dobijemo:

$$S_{40} = \frac{40}{2} \cdot \left[2 \cdot 23.6 + (40-1) \cdot (-0.6)\right] = 20 \cdot (47.2 - 39 \cdot 0.6) = 20 \cdot (47.2 - 23.4) = 20 \cdot 23.8 = 476.$$

3.) 20. Koristimo osnovnu formulu složenoga kamatnoga računa (dekurzivan obračun kamata): Ako se glavnica C uloži na n godina uz godišnju kamatnu stopu $p\%$, onda je njezina vrijednost na kraju n–te godine

$$C_n = C_0 \cdot \left(1 + p\%\right)^n \;,$$

dok je iznos ukupnih pripisanih kamata

$$K = C_n - C_0 = C_0 \cdot \left[\left(1 + p\%\right)^n - 1\right].$$

U našem zadatku je $C_0 = 5000$, $p = 1.7$ i $K = 2000$. Tako dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$2000 = 5000 \cdot [(1 + 1.7\%)^n - 1].$$

Nju rješavamo na uobičajen način:

$$2000 \;=\; 5000 \cdot \left[(1+1.7\%)^n - 1\right]$$
$$\left(1 + \frac{1.7}{100}\right)^n - 1 = \frac{2000}{5000}$$
$$(1+0.017)^n = \frac{2}{5} + 1$$
$$1.017^n = 0.4 + 1$$
$$1.017^n = 1.4$$
$$n = \log_{1.017} 1.4 = \frac{\log 1.4}{\log 1.017} = \frac{0.146128}{0.007321} \approx 19.96 \approx 20$$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – VIŠA RAZINA

III. ZADATCI PRODUŽENIH ODGOVORA

29. 1.) $\left(\frac{2}{3},0\right)$ **.** Možemo pretpostaviti da je jednadžba hiperbole $b^2 \cdot x^2 - a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$, gdje su a, b > 0 realne konstante. Hiperbola očito prolazi točkom $T = (2, 0)$, pa uvrštavanjem koordinata te točke u jednadžbu hiperbole dobivamo:

$$b^2 \cdot 2^2 - a^2 \cdot 0^2 = a^2 \cdot b^2,$$
$$b^2 \cdot 4 - a^2 \cdot 0 = a^2 \cdot b^2,$$
$$b^2 \cdot 4 = a^2 \cdot b^2 \;\; /:b^2$$
$$a^2 = 4.$$

Nadalje, hiperbola prolazi točkom $A = (6,2)$, pa uvrštavanjem koordinata te točke i $a^2 = 4$ u jednadžbu hiperbole dobivamo:

$$b^2 \cdot 6^2 - 4 \cdot 2^2 = 4 \cdot b^2,$$
$$b^2 \cdot 36 - 4 \cdot 4 = 4 \cdot b^2,$$
$$36 \cdot b^2 - 4 \cdot b^2 = 16,$$
$$32 \cdot b^2 = 16, \;\; /:32$$
$$b^2 = \frac{1}{2}.$$

Dakle, jednadžba hiperbole glasi:

$$\frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot 4,$$
$$\frac{1}{2} \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 2.$$

Jednadžba tangente na graf funkcije f u točki $T(x_T, y_T)$ dana je izrazom

$$t \ldots \; y - y_T = f'(x_T) \cdot (x - x_T).$$

Apscisu njezina sjecišta S s osi x dobijemo uvrstimo li u gornju jednadžbu $y = 0$:

$$0 - y_T = f'(x_T) \cdot (x - x_T) \;\; / : f'(x_T)$$
$$-\frac{y_T}{f'(x_T)} = x - x_T$$
$$x = x_T - \frac{y_T}{f'(x_T)}$$

pa je $S\left(x_T - \frac{y_T}{f'(x_T)}, 0\right)$. Stoga nam preostaje odrediti prvu derivaciju funkcije čiji je graf zadana hiperbola. Tu funkciju možemo zadati propisom ako iz jednadžbe hiperbole izrazimo y pomoću varijable x, ali brže i bolje je postupiti ovako:

Shvaćajući varijablu y kao funkciju varijable x, deriviramo izraz koji zadaje hiperbolu:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot x^2\right)' - \left(4\cdot y^2\right)' = 2',$$

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^{2-1} - 4\cdot 2\cdot y^{2-1}\cdot y' = 0$$

$$x - 8\cdot y\cdot y' = 0$$

$$8\cdot y\cdot y' = x$$

$$y' = \frac{x}{8\cdot y}$$

Stoga tangenta na zadanu hiperbolu povučena u bilo kojoj točki T siječe os x u točki

$$S\left(x_T - \frac{y_T}{f'(x_T)}, 0\right) = \left(x_T - \frac{y_T}{\frac{x_T}{8\cdot y_T}}, 0\right) = \left(x_T - \frac{8\cdot y_T^2}{x_T}, 0\right) = \left(\frac{x_T^2 - 8\cdot y_T^2}{x_T}, 0\right)$$

Primijenimo dobivene rezultate na točku $A(6, 2)$. Traženo sjecište tangente u točki A dobijemo tako da u gornji izraz uvrstimo $x_T = 6$, $y_T = 2$. Tako je konačno:

$$S\left(\frac{6^2 - 8\cdot 2^2}{6}, 0\right) = \left(\frac{36 - 8\cdot 4}{6}, 0\right) = \left(\frac{36-32}{6}, 0\right) = \left(\frac{4}{6}, 0\right) = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$$

2.) $2\cdot\vec{i} - 5\cdot\vec{j}$**.** Imamo redom:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = (x_N - x_M)\cdot\vec{i} + (y_N - y_M)\cdot\vec{j} + (x_P - x_M)\cdot\vec{i} + (y_P - y_M)\cdot\vec{j}$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \left[(x_N - x_M) + (x_P - x_M)\right]\cdot\vec{i} + \left[(y_N - y_M) + (y_P - y_M)\right]\cdot\vec{j},$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = (x_N + x_P - 2\cdot x_M)\cdot\vec{i} + (y_N + y_P - 2\cdot y_M)\cdot\vec{j},$$

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = (-1+7-2\cdot 2)\cdot\vec{i} + (4-3-2\cdot 3)\cdot\vec{j} = (-1+7-4)\cdot\vec{i} + (4-3-6)\cdot\vec{j} = 2\cdot\vec{i} - 5\cdot\vec{j}$$

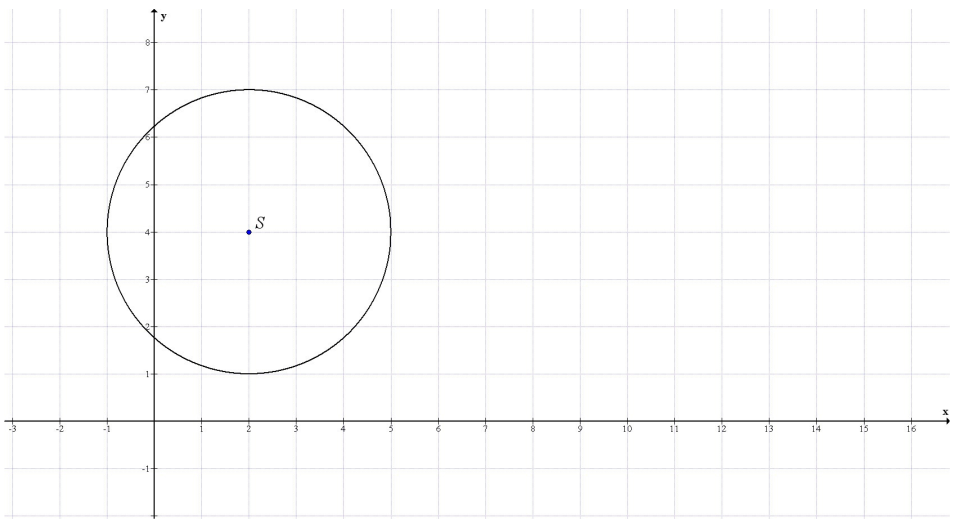
3.) $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$ **ili** $x^2 + y^2 - 4\cdot x - 8\cdot y + 11 = 0$**. Vidjeti Sliku 3.** Skup svih točaka koje su od zadane točke S udaljene za $r > 0$ je, po definiciji, kružnica sa središtem u točki S i polumjerom r. U ovom je slučaju rješenje zadatka kružnica sa središtem u točki $S(2, 4)$ i polumjerom $r = 3$. Jednadžba te kružnice je:

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 9,$$

ili, nakon kvadriranja, u razvijenom obliku:

$$x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = 9,$$
$$x^2 - 4 \cdot x + 4 + y^2 - 8 \cdot y + 16 - 9 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 8 \cdot y + 11 = 0.$$

Dobivena kružnica prikazana je na Slici 3.



Slika 3.

4.) $\frac{85}{8} = 10.625$ **jed**. Uočimo da je zadana krivulja parabola oblika $y^2 = 2 \cdot p \cdot x$. Naime, dijeljenjem jednadžbe zadane krivulje s 2 dobivamo

$$y^2 = \frac{5}{2} \cdot x ,$$

pa je riječ o paraboli za koju je $2 \cdot p = \frac{5}{2}$. Stoga je žarište zadane parabole

$$F\left(\frac{p}{2},0\right) = \left(\frac{2 \cdot p}{4},0\right) = \left(\frac{\frac{5}{2}}{4},0\right) = \left(\frac{5}{8},0\right).$$

Odredimo nepoznatu koordinatu točke T. U propis kojim je definirana parabola uvrstimo $x = 10$, pa dobijemo:

$$y^2 = \frac{5}{2} \cdot 10$$
$$y^2 = 25$$

Odatle vađenjem drugoga korijena (zbog pretpostavke $y_T > 0$) dobijemo $y = 5$. Stoga je $T(10, 5)$.

Preostaje izračunati udaljenost točaka F i T:

$$|FT| = \sqrt{(x_T - x_F)^2 + (y_T - y_F)^2} = \sqrt{\left(10 - \frac{5}{8}\right)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{10 \cdot 8 - 5}{8}\right)^2 + 5^2} = \sqrt{\left(\frac{80-5}{8}\right)^2 + 5^2}$$

$$|FT| = \sqrt{\left(\frac{75}{8}\right)^2 + 25} = \sqrt{\frac{5625}{64} + 25} = \sqrt{\frac{5625 + 64 \cdot 25}{64}} = \sqrt{\frac{5625 + 1600}{64}} = \sqrt{\frac{7225}{64}} = \frac{85}{8} = 10.625$$

4.) ≈1.678541 m. Budući da je duljina male osi elipse strogo manja od duljine satelita, satelit nužno moramo postaviti po dužini rakete (usporedno s velikom osi). Smjestimo li raketu i satelit u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, onda raketu možemo zamisliti kao elipsu čija je velika os $2 \cdot a = 4.8$ m, a mala os $2 \cdot b = 4.2$ m. Odatle slijedi $a = 2.4$ m, $b = 2.2$ m, pa je jednadžba elipse:

$$\frac{x^2}{2.4^2} + \frac{y^2}{2.1^2} = 1.$$

Satelit možemo zamisliti kao pravokutnik simetričan s obzirom na obje koordinatne osi (jer je takva i elipsa). Duljina pravokutnika je 4.4 m, što znači da su mu apscise svih četiriju vrhova jednake $\pm\frac{4.4}{2} = \pm 2.2$. Ordinate tih vrhova dobijemo tako da u jednadžbu elipse uvrstimo $x = 2.2$ (ili $x = -2.2$, svejedno je). Dobivamo:

$$\frac{2.2^2}{2.4^2} + \frac{y^2}{2.1^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{2.1^2} = 1 - \frac{2.2^2}{2.4^2}$$

$$y^2 = 2.1^2 \cdot \left(1 - \frac{2.2^2}{2.4^2}\right) = \left(\frac{21}{10}\right)^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{11}{12}\right)^2\right] = \frac{1127}{1600} = \frac{49 \cdot 23}{1600}$$

$$y = \pm\frac{7 \cdot \sqrt{23}}{40}$$

Prema tome, širina pravokutnika jednaka je udaljenosti dvaju susjednih točaka s istim apscisama. Lako se vidi da je ta širina jednaka $2 \cdot |y|$. Stoga je konačno:

$$b_{\max} = 2 \cdot \frac{7 \cdot \sqrt{23}}{40} = \frac{7 \cdot \sqrt{23}}{20} \approx 1.678541 \text{ m}.$$

30. $\boldsymbol{a \in \mathbf{R} \backslash [-2, 2] = \langle -\infty, -2 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle}$. „Kritične“ točke su $x = -1$ i $x = 2$, tj. vrijedi:

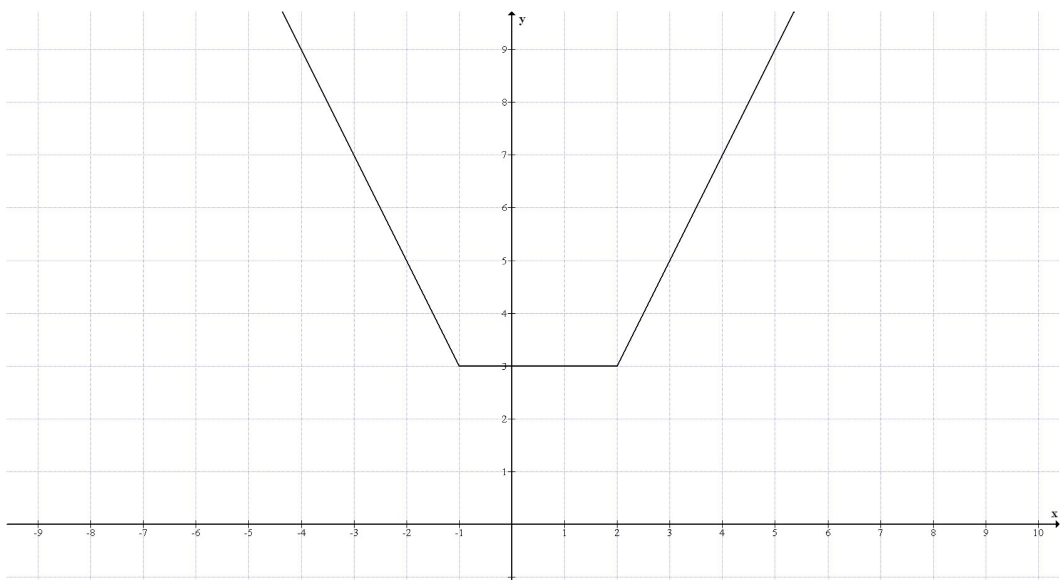
$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{za } x \geq 1, \\ 1-x, & \text{inače} \end{cases}, \quad |2-x| = \begin{cases} x-2, & \text{za } x \geq 2, \\ 2-x, & \text{inače.} \end{cases}$$

Stoga funkciju razmatramo na intervalima ⟨–∞, –1], ⟨–1, 2] i ⟨2, +∞⟩. Dobivamo:

$$f(x)=\begin{cases} 1-x+2-x, \text{ za } x\le -1; \\ x-1+2-x, \text{ za } x\in\langle -1,2]; \\ x-1+x-2, \text{ za } x\in\langle 2,+\infty\rangle; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} 3-2\cdot x, \text{ za } x\le -1; \\ 3, \text{ za } x\in\langle -1,2]; \\ 2\cdot x-3, \text{ za } x\in\langle 2,+\infty\rangle. \end{cases}$$

Skiciramo li graf funkcije f u pravokutnom koordinatnom sustavu u ravnini, dobit ćemo Sliku 4.



Slika 4.

Tako vidimo da će zadana jednadžba imati dva rješenja ako i samo ako vrijedi $a^2 - 1 > 3$ jer svaki pravac $y = a$ presijeca graf zadane funkcije u točno dvije točke ako i samo ako je $a > 3$. Odatle slijedi

$$a^2 - 4 > 0,$$

odnosno, analogno kao u rješenju zadatka 18.2.,

$$a \in \mathbf{R}\setminus[-2, 2] = \langle -\infty, -2\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle.$$

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, dipl.ing., predavač