TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – OSNOVNA RAZINA

I. ZADATCI VIŠESTRUKOGA IZBORA

1. D. Pomnožimo li nejednakost A s 5, znak nejednakosti se neće promijeniti jer se pri množenju bilo koje nejednakosti sa strogo pozitivnim realnim brojem znak nejednakosti ne mijenja. Tako se dobije ekvivalentna nejednakost $5 \cdot 5 < 24$, odnosno $25 < 24$, što je očito netočno.
Pomnožimo li nejednakost B s 6, znak nejednakosti se neće promijeniti. Tako se dobije ekvivalentna nejednakost $2 \cdot 2 < 1 \cdot 3$, odnosno $4 < 3$, što je očito netočno.

Budući da vrijedi jednakost $1\frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$, nejednakost C je ekvivalentna nejednakosti $\frac{3}{2} < \frac{3}{2}$ koja je očito netočna.

Budući da vrijedi jednakost $0.7 = \frac{7}{10}$, nejednakost D pomnožimo s 20, pa dobijemo ekvivalentnu nejednakost $7 \cdot 2 < 3 \cdot 5$, odnosno $14 < 15$, što je očito istinita nejednakost.

2. B. Imamo redom:

$$0.3825 = \frac{0.3825 \cdot 100}{100} = \frac{38.25}{100} = 38.25\%.$$

3. A. Pomnožimo zadanu jednakost s 2, pa dobijemo redom:

$$x + \frac{y}{2} = 2,$$
$$x = 2 - \frac{y}{2},$$
$$x = 2 - \frac{1}{2} \cdot y.$$

4. D. Imamo redom:

$$3 \cdot x - \frac{1}{2} \geq 2 - x \quad / \cdot 2$$
$$6 \cdot x - 1 \geq 4 - 2 \cdot x$$
$$6 \cdot x + 2 \cdot x \geq 4 + 1$$
$$8 \cdot x \geq 5 \quad / : 8$$
$$x \geq \frac{5}{8}$$

Svi realni brojevi koji nisu manji od $\frac{5}{8}$ tvore interval $\left[\frac{5}{8}, +\infty\right\rangle$.

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – OSNOVNA RAZINA

5. **A.** Pomnožimo drugu jednadžbu s 3. Dobijemo:

$$6 \cdot x + 3 \cdot y = 3.$$

Zbrajanjem dobivene jednadžbe i prve jednadžbe sustava slijedi:

$$7 \cdot x = 2 \cdot a + 3.$$

Odatle dijeljenjem s 2 dobivamo

$$x = \frac{2 \cdot a + 3}{7} = \frac{3 + 2 \cdot a}{7}.$$

6. **A.** Rastavimo brojnik u faktore koristeći formulu za razliku kvadrata, dok nazivnik rastavimo u faktore izlučivši $2 \cdot y$ iz svakoga njegovoga člana. Dobijemo:

$$y^2 - 4 = y^2 - 2^2 = (y - 2) \cdot (y + 2);$$
$$2 \cdot y^2 - 4 \cdot y = 2 \cdot y \cdot (y - 2).$$

Stoga je

$$\frac{y^2 - 4}{2 \cdot y^2 - 4 \cdot y} = \frac{(y-2) \cdot (y+2)}{2 \cdot y \cdot (y-2)} = \frac{y+2}{2 \cdot y}.$$

7. **C.** Iz slike najprije očitamo koordinate svake pojedine točke:

$$K(4, 3), L(-2, 2), M(-4, -4), N(3, -3).$$

Preostaje uvrstiti koordinate svake pojedine točke u jednadžbu pravca i utvrditi u kojim slučajevima se dobiju identiteti. Konkretno:

- za točku K uvrstimo $x = 4$, $y = 3$, pa dobijemo: $7 \cdot 4 - 8 \cdot 3 - 4 = 28 - 24 - 4 = 0$, pa točka K pripada zadanom pravcu;
- za točku L uvrstimo $x = -2$, $y = 2$, pa dobijemo: $7 \cdot (-2) - 8 \cdot 2 - 4 = -14 - 16 - 4 = -34 \neq 0$, pa točka L ne pripada zadanom pravcu;
- za točku M uvrstimo $x = -4$, $y = -4$, pa dobijemo: $7 \cdot (-4) - 8 \cdot (-4) - 4 = -28 + 32 - 4 = 0$, pa točka M pripada zadanom pravcu;
- za točku N uvrstimo $x = 3$, $y = -3$, pa dobijemo: $7 \cdot 3 - 8 \cdot (-3) - 4 = 21 + 24 - 4 = 41 \neq 0$, pa točka N ne pripada zadanom pravcu.

Dakle, zadanom pravcu pripadaju točke K i M.

8. **B.** Označimo s x traženi kut, a s y treći (preostali) kut trokuta. Iz podatka da se ti kutovi odnose kao 2 : 5 dobivamo razmjer:

$$x : y = 2 : 5.$$

Umnožak vanjskih članova razmjera treba biti jednak umnošku unutrašnjih članova, pa slijedi:

$$5 \cdot x = 2 \cdot y.$$

Odatle dijeljenjem s 2 dobivamo:

$$y = \frac{5}{2} \cdot x\ .$$

Zbroj kutova x, y i 138° treba biti jednak 180° jer je zbroj svih triju unutrašnjih kutova u svakom trokutu jednak 180°. To znači da mora vrijediti jednakost:

$$x + y + 138° = 180°,$$

odnosno

$$x + y = 180° - 138°,$$

odnosno

$$x + y = 42°.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} y = \frac{5}{2} \cdot x \\ x + y = 42° \end{cases}$$

Taj sustav riješimo metodom zamjene (supstitucije) tako da prvu jednadžbu sustava uvrstimo u drugu:

$$\begin{aligned} & x + \frac{5}{2} \cdot x = 42° \quad / \cdot 2 \\ & 2 \cdot x + 5 \cdot x = 84° \\ & 7 \cdot x = 84° \quad /:7 \\ & x = 12° \end{aligned}$$

Dakle, traženi kut iznosi 12°.

9. **D.** 1 kilogram ima točno $1000 = 10^3$ grama. Stoga $9.1094 \cdot 10^{-31}$ kilograma ima $9.1094 \cdot 10^{-31} \cdot 10^3 = 9.1094 \cdot 10^{-28}$ grama.

10. **C**. Izračunajmo ukupnu promjenu cijene, tj. za koliko je postotaka krajnja cijena kišobrana veća u odnosu na njegovu početnu cijenu. Primijenit ćemo formulu za strukturnu promjenu osnovne veličine:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{p_1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{p_2}{100}\right) - 100\,,$$

pri čemu su R rezultantna promjena osnovne veličine, p_1 prva promjena i p_2 druga promjena. U ovu jednakost uvrstimo $p_1 = +20$ (jer se cijena najprije poveća za 20%) i $p_2 = -30$ (jer se nova cijena potom snizi za 30%). Dobivamo:

$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{-30}{100}\right) - 100$$
$$R = 100 \cdot \left(1 + \frac{20}{100}\right) \cdot \left(1 - \frac{30}{100}\right) - 100$$
$$R = 100 \cdot 1.2 \cdot 0.7 - 100$$
$$R = 84 - 100$$
$$R = -16$$

Dakle, krajnja je cijena za 16% manja u odnosu na početnu. Označimo li s C traženu (početnu) cijenu kišobrana, onda je krajnja cijena kišobrana

$$C_1 = C - \frac{16}{100} \cdot C = C \cdot \left(1 - \frac{16}{100}\right) = C \cdot (1 - 0.16) = 0.84 \cdot C .$$

Prema uvjetu zadatka, cijena C_1 mora iznositi 126 kn, pa dobivamo jednadžbu:

$$0.84 \cdot C = 126.$$

Dijeljenjem ove jednadžbe s 0.84 dobiva se $C = 150$. Dakle, početna cijena kišobrana je 150 kn.

11. B. Svaki učenik u promatranom razredu dobio je točno jednu ocjenu: *odličan*, *vrlo dobar*, *dobar*, *dovoljan* ili *nedovoljan*. Označimo s x ukupan broj učenika u tom razredu. Prema podatcima iz zadatka, broj učenika koji su dobili ocjenu *odličan* jednak je $\frac{1}{5} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *vrlo dobar* jednak je $\frac{1}{3} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *dobar* jednak je $\frac{3}{10} \cdot x$, broj učenika koji su dobili ocjenu *dovoljan* jednak je $\frac{1}{10} \cdot x$, a broj učenika koji su dobili ocjenu *nedovoljan* jednak je 2. Zbroj svih tih brojeva mora biti jednak ukupnom broju učenika u tom razredu, tj. x, pa dobivamo jednadžbu:

$$\frac{1}{5} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot x + \frac{3}{10} \cdot x + \frac{1}{10} \cdot x + 2 = x .$$

Pomnožimo tu jednadžbu najmanjim zajedničkim višekratnikom brojeva 5, 3 i 10, tj. s 30. Dobivamo redom:

$$6 \cdot x + 10 \cdot x + 9 \cdot x + 3 \cdot x + 60 = 30 \cdot x,$$
$$6 \cdot x + 10 \cdot x + 9 \cdot x + 3 \cdot x - 30 \cdot x = -60,$$

$$(-2) \cdot x = -60, \quad /:(-2)$$
$$x = 30.$$

Dakle, u razredu je ukupno 30 učenika, pa broj učenika koji su dobili ocjenu *odličan* iznosi $\frac{1}{5} \cdot 30 = 6$.

12. C. Označimo s r_1 polumjer prvoga, a s r_2 polumjer drugoga kruga. Tada je opseg prvoga kruga $O_1 = 2 \cdot r_1 \cdot \pi$, a opseg drugoga kruga $O_2 = 2 \cdot r_2 \cdot \pi$. Prema uvjetu zadatka vrijedi jednakost

$$O_1 = 2 \cdot O_2.$$

Uvrštavanjem izraza za O_1 i O_2 dobivamo:

$$2 \cdot r_1 \cdot \pi = 2 \cdot (2 \cdot r_2 \cdot \pi), \quad /:(2 \cdot r_2 \cdot \pi),$$
$$\frac{2 \cdot r_1 \cdot \pi}{2 \cdot r_2 \cdot \pi} = 2,$$
$$\frac{r_1}{r_2} = 2.$$

Površina prvoga kruga jednaka je $P_1 = r_1^2 \cdot \pi$, a površina drugoga $P_2 = r_2^2 \cdot \pi$. Dijeljenjem tih dvaju izraza dobijemo:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r_1^2 \cdot \pi}{r_2^2 \cdot \pi} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Preostaje uvrstiti $\frac{r_1}{r_2} = 2$ i dobiti:

$$\frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 2^2 = 4.$$

Dakle, površina prvoga kruga je četiri puta veća od površine drugoga kruga.

13. C. Izračunajmo zasebno vrijednost svakoga broja:

$$a = 2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8,$$
$$b = \sqrt[3]{64} : \frac{1}{3} = \sqrt[3]{2^6} \cdot 3 = 2^{\frac{6}{3}} \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12,$$
$$c = \left|-\frac{2}{3}\right| \cdot |2| + 1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + 1 = \frac{4}{3} + 1 = \frac{4+3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Zadatak traži da izračunamo vrijednost izraza $a \cdot c + b$. Ta je vrijednost jednaka:

$$a \cdot c + b = 8 \cdot \frac{7}{3} + 12 = \frac{56}{3} + 12 = \frac{56 + 12 \cdot 3}{3} = \frac{56 + 36}{3} = \frac{92}{3}.$$

14. **A.** Uočimo pravokutan trokut ABD s pravim kutom kod vrha A. Duljine njegovih kateta su $|AB| = a$ cm i $|AD| = |BC| = 5.3$, a duljina njegove hipotenuze je $|BD| = a + 3$ cm. Prema Pitagorinu poučku mora vrijediti jednakost:

$$|AB|^2 + |AD|^2 = |BD|^2,$$

pa uvrštavanjem gore navedenih veličina dobijemo jednadžbu:

$$a^2 + 5.3^2 = (a + 3)^2.$$

Nju riješimo na uobičajen način primjenom formule za kvadrat zbroja:

$$\begin{aligned} a^2 - (a + 3)^2 &= -(5.3^2), \\ a^2 - (a^2 + 2 \cdot 3 \cdot a + 9) &= -28.09, \\ a^2 - a^2 - 6 \cdot a - 9 &= -28.09, \\ -6 \cdot a &= -28.09 + 9, \\ -6 \cdot a &= -19.09, \ /:(-6) \\ a &= \frac{19.09}{6} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Stoga je površina pravokutnika jednaka

$$P = |AB| \cdot |AD| = a \cdot 5.3 = \frac{19.09}{6} \cdot 5.3 = \frac{19.09 \cdot 5.3}{6} = \frac{101.177}{6} = 16.8628\dot{3} \approx 16.86 \text{ cm}^2.$$

15. **C.** Označimo s p cijenu jednoga plavoga kamenčića, a s $ž$ cijenu jednoga žutoga kamenčića. Tada je cijena 56 plavih i 6 žutih kamenčića jednaka $56 \cdot p + 6 \cdot ž$ kn, a cijena 12 plavih i 37 žutih kamenčića jednaka $12 \cdot p + 37 \cdot ž$ kn. Obje cijene trebaju biti jednake 400 kn, pa dobivamo sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} 56 \cdot p + 6 \cdot ž = 400, \\ 12 \cdot p + 37 \cdot ž = 400. \end{cases}$$

Oduzimanjem tih dviju jednadžbi dobijemo:

$$\begin{aligned} 44 \cdot p - 31 \cdot ž &= 0, \\ 44 \cdot p &= 31 \cdot ž. \end{aligned}$$

Odatle dijeljenjem s 31 slijedi

$$ž = \frac{44}{31} \cdot p.$$

Budući da je $\frac{44}{31} > 1$, razabiremo da je $ž > p$, pa tražimo iznos

$$ž - p = \frac{44}{31} \cdot p - p = \left(\frac{44}{31} - 1\right) \cdot p = \left(\frac{44-31}{31}\right) \cdot p = \frac{13}{31} \cdot p \, .$$

Njega ćemo izračunati tako da iz formiranoga sustava odredimo vrijednost nepoznanice p. Uvrštavanjem jednakosti $ž = \frac{44}{31} \cdot p$ npr. u prvu jednadžbu sustava dobivamo redom:

$$\begin{aligned}
&56 \cdot p + 6 \cdot \frac{44}{31} \cdot p = 400, \\
&56 \cdot p + \frac{264}{31} \cdot p = 400, \quad / \cdot 31 \\
&1736 \cdot p + 264 \cdot p = 12400, \\
&2000 \cdot p = 12400, \quad / : 2000 \\
&p = \frac{12400}{2000} = \frac{12400 : 400}{2000 : 400} = \frac{31}{5}
\end{aligned}$$

Stoga je traženi iznos razlike cijena jednak

$$ž - p = \frac{13}{31} \cdot p = \frac{13}{31} \cdot \frac{31}{5} = \frac{13}{5} = 2.6 \text{ kn.}$$

16. A. Iz podatka da je diskriminanta kvadratne funkcije negativna zaključujemo da ta kvadratna funkcija nema realnih nultočaka, odnosno da njezin graf ne siječe os x. Iz podatka da je koeficijent c strogo pozitivan zaključujemo da graf kvadratne funkcije siječe os y u točki $(0, c)$ koja se nalazi na pozitivnom dijelu osi y. (Graf svake kvadratne funkcije oblika $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ siječe os y u točki $(0, c)$.) Jedina krivulja koja ne siječe os x i koja os y siječe u točki na pozitivnom dijelu te osi jest parabola A. (Parabole B i C sijeku os x u točno jednoj točki, a parabola D siječe os y u točki koja se nalazi na negativnom dijelu te osi.)

II. ZADATCI KRATKIH ODGOVORA

17. 287; 18. Traženi iznos jednak je:

S = 8.17 kn/litra · 35.15 litra = 287.1755 kn = (dobiveni broj zaokružujemo na dvije decimale jer tisućiti, desettisućiti itd. dio kune ne postoje i pritom koristimo načelo: ako je treća decimala 5 ili znamenka veća od 5, drugu decimalu povećavamo za 1, a u suprotnom drugu decimalu prepisujemo) = 287.18 kn.

18. $\boldsymbol{3 \cdot a - 5 \cdot b}$**.** Imamo redom:

$a + 3 \cdot b + 2 \cdot (a - 4 \cdot b) = a + 3 \cdot b + 2 \cdot a - 8 \cdot b = 3 \cdot a - 5 \cdot b.$

TEHNIČKO VELEUČILIŠTE U ZAGREBU

POLYTECHNICUM ZAGRABIENSE

ELEKTROTEHNIČKI ODJEL

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – OSNOVNA RAZINA

19. **2.** Pomnožimo zadanu jednadžbu s najmanjim zajedničkim višekratnikom svih razlomaka koji se pojavljuju u njoj, tj. s $2 \cdot x$. Tako redom dobivamo:

$$(2 \cdot x + 1) \cdot x = (x^2 - 1) \cdot 2,$$
$$2 \cdot x^2 + x = 2 \cdot x^2 - 2,$$

a odavde poništavanjem člana $2 \cdot x^2$ koji se nalazi na objema stranama posljednje jednakosti izravno slijedi $x = -2$.

20. **–2, –1, 0, 1 i 2.** Zadani interval sadrži sve realne brojeve koji su istodobno jednaki ili veći od –2, te strogo manji od 3. U tom se intervalu nalazi točno pet cijelih brojeva: –2, –1, 0, 1 i 2.

21. **22.** Svaku linearnu funkciju možemo zapisati u obliku $f(x) = a \cdot x + b$, gdje su $a, b \in \mathbf{R}$ konstante. Odredimo te konstante u ovom slučaju. Iz tablice je razvidno da je $f(1) = 1$, pa uvrštavanjem tih podataka u izraz $f(x) = a \cdot x + b$ dobivamo:

$$1 = a \cdot 1 + b,$$

odnosno

$$a + b = 1.$$

Nadalje, iz tablice je razvidno da je $f(2) = 4$, pa uvrštavanjem tih podataka u izraz $f(x) = a \cdot x + b$ dobivamo:

$$4 = 2 \cdot a + b,$$

odnosno

$$2 \cdot a + b = 4.$$

Tako smo dobili sustav dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice:

$$\begin{cases} a + b = 1, \\ 2 \cdot a + b = 4. \end{cases}$$

Oduzmemo li prvu jednadžbu od druge, odmah dobivamo $a = 3$, pa uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi $b = -2$. Dakle, $f(x) = 3 \cdot x - 2$, pa je konačno

$$f(8) = 3 \cdot 8 - 2 = 24 - 2 = 22.$$

22. $0, \frac{5}{2}$. Imamo redom:

$$2 \cdot x^2 - 5 \cdot x = 0,$$
$$x \cdot (2 \cdot x - 5) = 0.$$

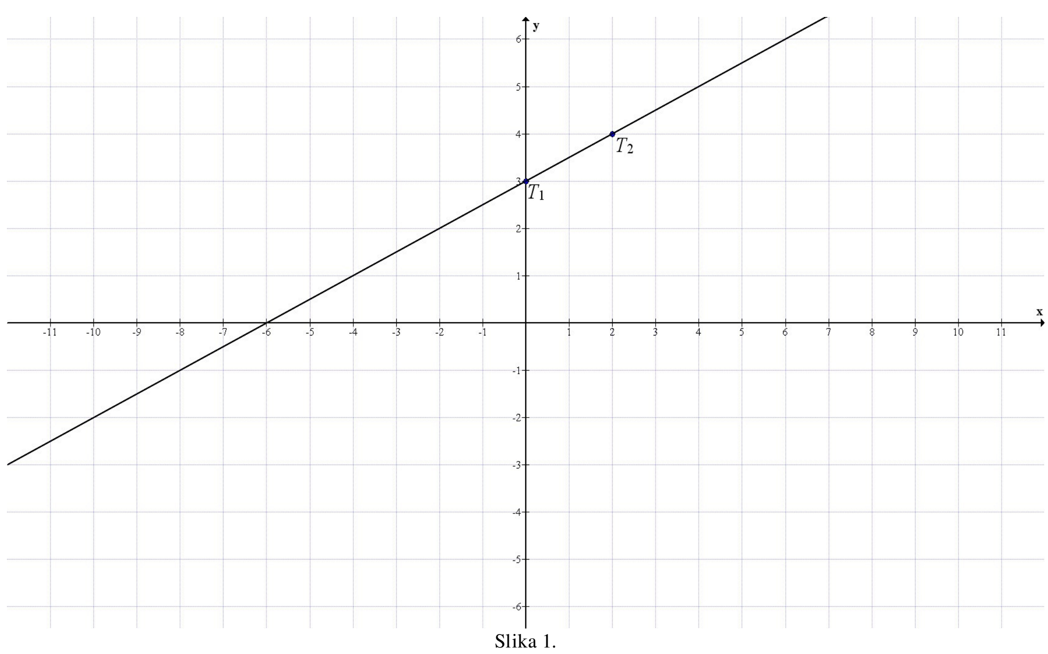
Umnožak dvaju realnih brojeva jednak je 0 ako i samo ako je barem jedan od tih brojeva jednak 0.

Tako je ili $x = 0$ ili $2 \cdot x - 5 = 0$, tj. ili $x = 0$ ili $x = \frac{5}{2}$. Stoga su sva rješenja zadane jednadžbe $x = 0$ i $x = \frac{5}{2}$.

23. Vidjeti Sliku 1 i Sliku 2. Krivulja zadana prvom jednadžbom je pravac. Da bismo ga nacrtali, dovoljno je odrediti neke dvije njegove međusobno različite točke. U jednadžbu pravca uvrstimo npr. $x = 0$ i $x = 2$, pa dobijemo:

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3,$$
$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 3 = 1 + 3 = 4.$$

Dakle, traženi pravac prolazi točkama $T_1(0, 3)$ i $T_2(1, 4)$. Ucrtamo te točke u pravokutni koordinatni sustav u ravnini i spojimo ih jednim pravcem. Tako dobijemo sljedeću sliku:



Slika 1.

Krivulja zadana drugom jednadžbom je parabola. Svaka je parabola jednoznačno određena zadavanjem bilo kojih triju njezinih međusobno različitih točaka.
Primijetimo da je slobodni član u jednadžbi parabole jednak 0, što znači da parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini.
Nadalje, koeficijent uz x u jednadžbi parabole jednak je 0, što znači da parabola ima tjeme u točki čija je apscisa jednaka 0. Već smo utvrdili da parabola prolazi ishodištem pravokutnoga koordinat-

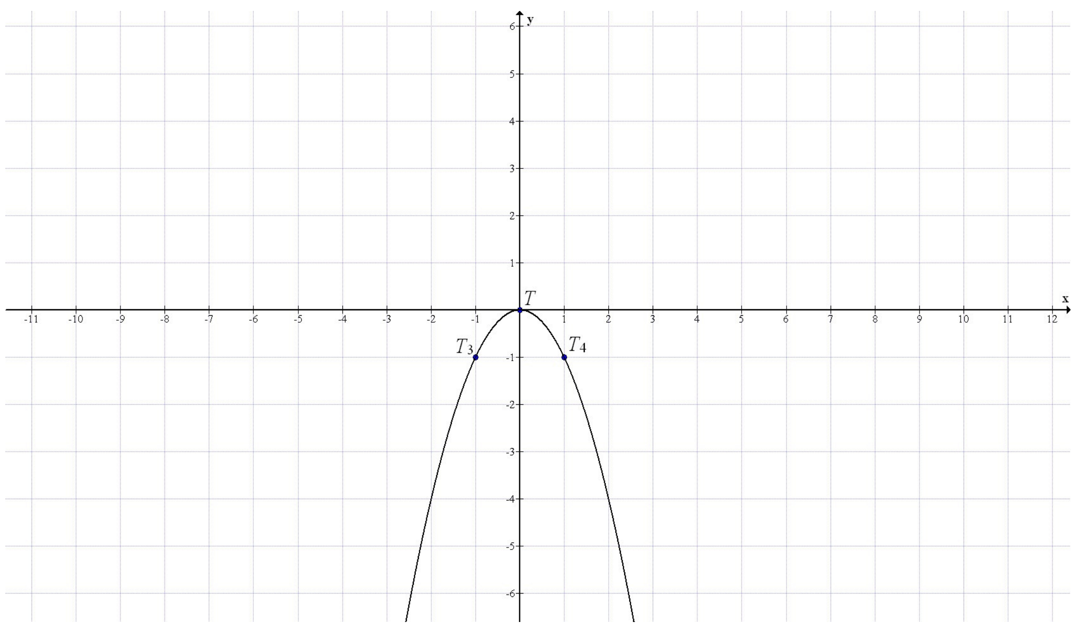
noga sustava u ravnini, pa zaključujemo da je tjeme parabole upravo ishodište pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, tj. točka (0, 0).
Koeficijent uz x^2 jednak je –1, pa parabola ima oblik naopakoga slova U, tj. oblik $\cap$.
Tako smo zaključili: parabola ima oblik $\cap$, te siječe os x u svojem tjemenu $T(0, 0)$. Drugih sjecišta s osi x zadana parabola nema, u što se lako možemo uvjeriti riješivši kvadratnu jednadžbu

$$-x^2 = 0$$

po nepoznanici x. Budući da zasad imamo točno jednu točku parabole, preostale dvije točke moramo odrediti sami. Uzmemo npr. $x = -1$ i $x = 1$, pa izračunamo:

$$y_1 = -(-1)^2 = -(1) = -1,$$
$$y_1 = -(1)^2 = -(1) = -1.$$

Dakle, parabola prolazi i točkama $T_4(-1, -1)$ i $T_5(1, -1)$. Ucrtamo točke T, T_4 i T_5 u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, pa ih spojimo parabolom kao na Slici 2.



Slika 2.

24. 41,2698; 21. Zadatak ćemo riješiti koristeći jednostavno pravilo trojno. Veličine su očito upravno razmjerne, tj. što je veći iznos galona, to je veći i iznos barela. Iz zadanih podataka najprije postavljamo shemu:

$$\begin{array}{lcl} \uparrow\ 100 \text{ galona} & & \uparrow\ 3.1746 \text{ barela} \\ \ \ 1300 \text{ galona} & & \quad x \ \text{ barela} \end{array}$$

Iz navedene sheme slijedi razmjer:

$$x : 3.1746 = 1300 : 100$$

iz kojega je

$$100 \cdot x = 1300 \cdot 3.1746,$$

odnosno

$$x = \frac{1300 \cdot 3.1746}{100} = 41.2698\,.$$

Dakle, 1300 galona jednako je 41.2698 barela.

Za drugi dio zadatka postavljamo shemu:

$$\begin{array}{ll} \uparrow\ 100 \text{ galona} & \uparrow\ 3.1746 \text{ barela} \\ \ \ y \text{ galona} & \ \ \frac{2}{3} \text{ barela} \end{array}$$

iz koje slijedi razmjer:

$$y : 100 = \frac{2}{3} : 3.1746.$$

Odatle je najprije

$$3.1746 \cdot y = 100 \cdot \frac{2}{3}\,,$$

a potom

$$y = \frac{100 \cdot \frac{2}{3}}{3.1746} = \frac{100 \cdot 2}{3 \cdot 3.1746} = \frac{200}{9.5238} = 21.\overline{000021} \approx 21\,.$$

Dakle, $\frac{2}{3}$ barela približno iznosi 21 galon.

25. 1.). **13.92.** Imamo redom:

$$\frac{m}{0.36} = \frac{10^{-1.3+2}}{0.36} = \frac{10^{0.7}}{0.36} = \frac{5.01187233627272285}{0.36} \approx 13.9218676 \approx 13.92\,.$$

2.) **1.** Ako je $m = 1000 = 10^3$, dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$10^{k+2} = 10^3,$$

a odavde izjednačavanjem eksponenata (jer su baze obiju potencija jednake) slijedi

$$k + 2 = 3,$$

odnosno $k = 1$.

26. Neka je n ukupan broj proizvedenih artikala. Izvedimo formulu koja opisuje zavisnost ukupnih troškova proizvodnje (označimo tu varijablu s t_u) o vrijednosti varijable n. n artikala uzrokuje trošak od $1.50 \cdot n$ kn, pa je ukupni trošak proizvodnje jednak zbroju fiksnoga troška od 300 kn i troškova proizvodnje svih artikala u iznosu od $1.50 \cdot n$ kn. Dakle,

$$t_u = t_u(n) = 300 + 1.50 \cdot n.$$

1.) 1200. U zadanu formulu za t_u uvrstimo $n = 600$. Dobivamo:

$$t_u = 300 + 1.50 \cdot 600 = 300 + 900 = 1200.$$

Dakle, radionica je imala trošak od 1200 kn.

2.) 1734. Tražimo najmanji $n \in \mathbf{N}$ za koji je $t_u \geq 2900$. Uvrštavanjem izraza za t_u u ovu nejednakost dobivamo nejednadžbu

$$300 + 1.50 \cdot n \geq 2900,$$

iz koje lagano slijedi

$$n \geq \frac{2900 - 300}{1.5} = 1733.\dot{3}\ .$$

Najmanji prirodan broj jednak ili veći od $1733.\dot{3}$ jest $n_{min} = 1734$. Dakle, radionica je proizvela najmanje 1734 artikla.

27. 1.) 115. Tražena vrijednost jednaka je

$$g = \frac{2.16 \cdot 10^6}{\frac{1}{3} \cdot 56542} = \frac{3 \cdot 2.16 \cdot 10^6}{56542} = \frac{6.48 \cdot 10^6}{56542} \approx 114.605072 \approx 115 \text{ stanovnika/km}^2.$$

2.). 143.52. Označimo traženu vrijednost s P. Prema definiciji gustoće naseljenosti mora vrijediti jednakost:

$$2160 = \frac{310000}{P}.$$

Otuda je

$$P = \frac{310000}{2160} \approx 143.5185185 \approx 143.52 \text{ km}^2.$$

RJEŠENJA ZADATAKA IZ MATEMATIKE NA DRŽAVNOJ MATURI U LIPNJU 2012. – OSNOVNA RAZINA

3.) 318 431. Gustoća naseljenosti na Grenlandu (označimo je s g_G) jednaka je omjeru broja ukupnoga broja stanovnika na Grenlandu (označimo taj broj s s_G) i površine Grenlanda (označimo taj broj s P_G). U zadatku je navedeno da je s_G = 57 000, P_G = 2 175 600 km^2, pa je gustoća naseljenosti na Grenlandu jednaka

$$g_G = \frac{s_G}{P_G} = \frac{57\ 000}{2\ 175\ 600} \text{ stanovnika/km}^2.$$

Prema podatcima u zadatku, gustoća naseljenosti na Islandu (označimo je s g_I) je 118 puta veća od gustoće naseljenosti na Grenlandu, pa je gustoća naseljenosti na Islandu jednaka

$$g_i = 118 \cdot g_g = 118 \cdot \frac{57000}{2175600} \text{ stanovnika/km}^2.$$

S druge je strane gustoća naseljenosti na Islandu (označimo je s g_I) , opet prema definiciji gustoće naseljenosti, jednaka omjeru ukupnoga broja stanovnika Islanda (označimo taj broj s s_I) i površine Islanda (označimo taj broj s P_I). Prema podatcima iz zadatka je P_I = 103 000 km^2, pa vrijedi jednakost:

$$g_I = \frac{s_I}{P_I} = \frac{s_I}{103\ 000}\ .$$

Tako smo dobili dva različita izraza za istu veličinu (g_I). Njihove lijeve strane su jednake, pa takve moraju biti i desne strane. Stoga slijedi da mora vrijediti jednakost

$$\frac{s_I}{103\ 000} = 118 \cdot \frac{57\ 000}{2\ 175\ 600}.$$

Odatle je

$$s_I = \frac{118 \cdot 57\ 000 \cdot 103\ 000}{2\ 175\ 600} = \frac{118 \cdot 57\ 000 \cdot 1\ 030}{21\ 756} = \frac{118 \cdot 4\ 750 \cdot 1\ 030}{1813} \approx 318\ 430.777716 \approx 318\ 431.$$

Dakle, na Islandu živi približno 318 431 stanovnik.

28. Primijetimo da točno jedan pomak u *bilo kojemu* smjeru usporednom s osi potencijala odgovara naponu od 10 V. Naime, jednim pomakom u bilo kojemu smjeru usporednom s osi potencijala dolazimo u točku čiji je potencijal za 10 V manji ili veći u odnosu na potencijal polazne točke. Budući da se napon definira upravo kao razlika potencijala, to znači da jedan pomak u bilo kojemu smjeru usporednom s osi potencijala odgovara razlici potencijala, tj. naponu od 10 V

1.) 30. Da bismo s razine potencijala na kojoj se nalazi točka C došli na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka F, moramo učiniti 3 pomaka prema dolje usporedno s osi potencijala. To znači da je napon između tih dviju točaka jednak $3 \cdot 10$ V = 30 V.

2.) A i D. Uočimo da se iz točke F u svaku od točaka C, D, E i G može doći s najviše 5 pomaka usporednih s osi potencijala, pa zaključujemo da napon između bilo kojih dviju različitih točaka iz skupa $\{C, D, E, F, G\}$ nije strogo veći od $5 \cdot 10 = 50$ V. Stoga jednu od traženih točaka nužno moramo birati iz skupa $\{A, B\}$.

Lako vidimo da iz točke B s točno 6 pomaka usporednih s osi potencijala prema gore nije moguće doći niti na jednu razinu na kojoj se nalazi barem jedna od svih preostalih točaka. Dakle, napon između točke B i bilo koje točke iz skupa $\{C, D, E, F, G\}$ je strogo veći od 60 V, a lako vidimo da je napon između točaka A i B jednak 20 V. (Trebaju nam točno dva pomaka prema gore usporedno s osi potencijala da s razine potencijala na kojoj se nalazi točka B dođemo na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka A.) Zbog toga niti jedna od traženih točaka ne može biti točka B.

Tako zaključujemo da je jedna od traženih točaka točka A. S točno 6 pomaka prema gore usporedno s osi potencijala dolazimo na razinu potencijala na kojoj se nalazi točka D. Stoga je napon između tih dviju točaka jednak 60 V.

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, dipl.ing.mat., predavač