1. **D.** Zadatak najbrže možemo riješiti tako da odredimo decimalne zapise svih šest racionalnih brojeva (zaokružene na dvije decimale ako je decimalan zapis beskonačan periodičan decimalan broj). Dobivamo:

$$\frac{1}{4} = 0.25,$$
$$\frac{1}{3} \approx 0.33,$$
$$\frac{1}{5} = 0.2,$$
$$\frac{1}{7} \approx 0.14,$$
$$\frac{3}{8} = 0.375,$$
$$\frac{3}{10} = 0.3$$

Između decimalnih brojeva 0.25 i 0.33 očito se nalazi jedino decimalan broj 0.3, pa je rješenje zadatka $\frac{3}{10}$.

2. **B.** Pretpostavimo da je tražena kvadratna jednadžba $x^2 + b \cdot x + c = 0$. Primijenimo Vietèove formule. One kažu da je suprotna vrijednost koeficijenta uz x (tj. parametra b) jednaka zbroju obaju rješenja jednadžbe, a vrijednost koeficijenta c jednaka umnošku tih rješenja. Tako odmah dobivamo:

$$b = -(-1) = 1, \quad c = 3,$$

pa tražena kvadratna jednadžba glasi:

$$x^2 + x + 3 = 0.$$

3. **A.** Imamo redom:

$$t = \frac{1}{r} - \frac{m}{h},$$
$$\frac{m}{h} = \frac{1}{r} - t, \qquad / \cdot h$$
$$m = h \cdot \left(\frac{1}{r} - t\right).$$

4. **C.** Prvi, najveći, zupčanik se okrene 9 puta, a svaki sljedeći dvostruko više u odnosu na neposredno prethodni zupčanik (jer ima dvostruko manje zubaca u odnosu na njega). Stoga brojevi okretaja zupčanika tvore geometrijski niz kojemu je prvi član $g_1 = 9$, a količnik $q = 2$. Tražimo prirodan broj n takav da je $g_n = 1152$. Primijenimo formulu:

$$g_n = g_1 \cdot q^{n-1}, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Tako dobivamo eksponencijalnu jednadžbu:

$$9 \cdot 2^{n-1} = 1152.$$

Riješimo tu jednadžbu na uobičajen način:

$$\begin{aligned} &9 \cdot 2^{n-1} = 1152 \quad / : 9 \\ &2^{n-1} = 128, \\ &2^{n-1} = 2^7, \\ &n - 1 = 7, \\ &n = 8. \end{aligned}$$

Dakle, u nizu je spojeno točno 8 zupčanika.

5. **C.** Primijenimo trigonometrijsku funkciju kosinus. Označimo li traženu mjeru kuta s β, onda je $\cos\beta = \frac{4.2}{11}$. Odatle je β = 67.55364941855° = 67°33'13".

6. **B.** Točka $E(t)$ za koju je sin t strogo negativan, a tangens strogo pozitivan nužno se nalazi u trećem kvadrantu pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini. Dakle, u obzir dolaze slike označene s **B** i **C**. Budući da znamo vrijednost sin t, pogledajmo druge koordinate točaka $E(t)$ na tim slikama jer je druga koordinata svake od tih točaka upravo sin t. Druga koordinata točke $E(t)$ na slici **B** je očito strogo veća od $-\frac{1}{2}$, dok je druga koordinata točke $E(t)$ na slici **C** strogo manja od $-\frac{1}{2}$. (Grubo i neprecizno možemo reći da je druga koordinata točke na slici **C** „vrlo blizu“ –1.) Budući da je $\sin t = -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$, rješenje zadatka je točka na slici **B**.

7. **D.** Zadani vektori su okomiti ako i samo ako je njihov skalarni umnožak jednak nuli. Izračunamo:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1) \cdot k + 7 \cdot 4 = -k + 28.$$

Vrijednost toga izraza bit će jednaka nuli ako i samo ako je $-k + 28 = 0$. Odavde lagano slijedi $k = 28$.

8. **C.** Bilo koja eksponencijalna funkcija nije ni parna, ni neparna, pa funkcija pod **A** nije ni parna ni neparna.
Funkcija pod **B** je parna jer je $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.
Funkcija pod **D** nije ni parna, ni neparna jer je zbroj parne funkcije $\log(x^2)$ i neparne funkcije $2 \cdot x$.
Funkcija pod **C** je neparna jer je $f(-x) = (-x)^3 \cdot \cos(-x) =$ (zbog parnosti funkcije kosinus) $= -x^3 \cdot \cos x = -(x^3 \cdot \cos x) = -f(x)$. Isti zaključak smo mogli izvesti i koristeći činjenicu da je umnožak neparne i parne funkcije uvijek neparna funkcija.

9. C. Koristimo binomni poučak. Koeficijent uz peti član u binomnom razvoju je $\binom{n}{4}$, a koeficijent uz osmi član $\binom{n}{7}$. Tako dobivamo jednadžbu $\binom{n}{4}=\binom{n}{7}$. Ova dva binomna koeficijenta imaju jednake „brojnike“ (to je n), ali različite „nazivnike“. Zbog svojstva simetrije binomnih koeficijenata $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, jednakost će vrijediti ako i samo ako vrijedi $4 = n - 7$ (ili, ekvivalentno, $n - 4 = 7$). Odatle je $n = 11$.

Napomena: Zadatak se može riješiti i bez korištenja svojstva simetrije binomnih koeficijenata, ali uz poznavanje teorije o cjelobrojnim rješenjima algebarske jednadžbe. Naime, iz $\binom{n}{4}=\binom{n}{7}$ raspisivanjem prema alternativnoj definiciji binomnoga koeficijenta $\binom{n}{k}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ dobivamo redom:

$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)}{7!},$$
$$\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}=\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)}{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7},\quad /:\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{4!}$$
$$1=\frac{(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)}{5\cdot 6\cdot 7},$$
$$(n-4)\cdot(n-5)\cdot(n-6)=5\cdot 6\cdot 7,$$
$$(n^2-9\cdot n+20)\cdot(n-6)=210,$$
$$n^3-15\cdot n^2+74\cdot n-120=210,$$
$$n^3-15\cdot n^2+74\cdot n-330=0.$$

Prema uvjetu zadatka je $n\in\mathbb{N}$. Svi kandidati za prirodna rješenja dobivene jednadžbe su svi prirodni djelitelji broja 330. Rastavimo li taj broj na proste faktore, dobit ćemo: $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$. Stoga svi prirodni djelitelji broja 330 tvore skup $S = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 11, 15, 22, 30, 33, 55, 66, 110, 165, 330\}$. Izravnom provjerom (svaki od navedenih elemenata uvrštavamo u jednadžbu i provjeravamo je li lijeva strana tako dobivenoga izraza jednaka nuli) utvrđujemo da je jedino prirodno rješenje dobivene jednadžbe $n = 11$.

10. B. Označimo sa r polumjer nacrtane kružnice. Promotrimo njezinu tetivu $\overline{AB}$. Spojimo krajnje točke te tetive sa središtem kružnice S. U trokutu ABS je $|\overline{SA}|=|\overline{SB}|=r$, a prema pretpostavci je $|\overline{AB}|=r$. Stoga je trokut ABS jednakostraničan, pa je mjera središnjega kuta nad tetivom $\overline{AB}$ jednaka 60°. Traženi kut α je obodni kut nad istom tetivom $\overline{AB}$. Prema poučku o obodnom i središnjem kutu, njegova je mjera dvostruko manja od mjere središnjega kuta. Dakle, $\alpha=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$.

11. B. Obujam akvarija jednak je obujmu kvadra čije su dimenzije 45 cm, 25 cm i 25 cm. Taj obujam je jednak $V = 45 \cdot 25 \cdot 25 = 28\ 125\ \text{cm}^3$.
U akvarij je naliveno ukupno 19 litara = 19 dm^3 = 19 · 1000 cm^3 = 19 000 cm^3, pa je obujam preostaloga prostora jednak $V_1 = 28\ 125 - 19\ 000 = 9\ 125\ \text{cm}^3$.
Tražena udaljenost jednaka je visini kvadra čiji je obujam 9 125 cm^3, a duljine dvaju bridova 45 cm i 25 cm. Ta visina iznosi:

$$h=\frac{9\ 125}{45\cdot 25}=\frac{365}{45}=\frac{73}{9}\approx 8.1\ \text{cm}.$$

12. A. Neka su g i h redom polazni broj stabala graba, odnosno polazni broj stabala hrasta. Iz podatka da se ti brojevi odnose kao 11 : 14 zaključujemo da postoji $k > 0$ takav da vrijede jednakosti $g = 11 \cdot k$ i $h = 14 \cdot k$.

Nakon što se posiječe $\frac{4}{11}$ svih stabala graba, preostaje ukupno $11 \cdot k - \frac{4}{11} \cdot (11 \cdot k) = 11 \cdot k - 4 \cdot k = 7 \cdot k$ stabala graba.

Nakon što se sadnjom za $\frac{1}{6}$ poveća broj svih stabala hrasta, u šumi će biti ukupno $14 \cdot k + \frac{1}{6} \cdot (14 \cdot k) = 14 \cdot k + \frac{14}{6} \cdot k = 14 \cdot k + \frac{7}{3} \cdot k = \left(14 + \frac{7}{3}\right) \cdot k = \frac{14 \cdot 3 + 7}{3} \cdot k = \frac{42 + 7}{3} \cdot k = \frac{49}{3} \cdot k$ stabala hrasta. Stoga je traženi omjer jednak

$$\frac{7 \cdot k}{\frac{49}{3} \cdot k} = \frac{7 \cdot 3}{1 \cdot 49} = \frac{3}{7} = 3 : 7 .$$

13. A. Odredimo najprije pravilo funkcije $h = f \circ g$. Imamo redom:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f\left[g(x)\right] = f\left[\log(x^2 + 1)\right] = 3 \cdot \log(x^2 + 1) - 2 .$$

Riješimo jednadžbu $h(x) = 1$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot \log(x^2 + 1) - 2 = 1, \\
&3 \cdot \log(x^2 + 1) = 1 + 2, \\
&3 \cdot \log(x^2 + 1) = 3, \quad / : 3 \\
&\log(x^2 + 1) = 1, \\
&x^2 + 1 = 10^1, \\
&x^2 + 1 = 10, \\
&x^2 = 10 - 1, \\
&x^2 = 9.
\end{aligned}$$

Odatle je $x_1 = -3$ i $x_2 = 3$. Lako se vidi da je prirodno područje definicije (domena) funkcije h skup **R** (jer je $x^2 + 1 > 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$), pa su x_1 i x_2 doista rješenja promatrane jednadžbe. Njihov je zbroj jednak $x_1 + x_2 = -3 + 3 = 0$.

14. D. Koristimo formulu $\sin^2 x = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot x)\right]$. Zbog nje zadanu jednadžbu transformiramo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
&3 \cdot \cos(2 \cdot x) + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \cos(2 \cdot x)\right] = 0, \\
&3 \cdot \cos(2 \cdot x) + 1 - \cos(2 \cdot x) = 0, \\
&2 \cdot \cos(2 \cdot x) = -1, \\
&\cos(2 \cdot x) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odatle je $2\cdot x=\pm\frac{2}{3}\cdot\pi+k\cdot 2\cdot\pi$, odnosno $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\cdot\pi=\left(k\pm\frac{1}{3}\right)\cdot\pi$, pri čemu je $k\in\mathbb{Z}$.

Iz zahtjeva $x\in[0, 2\cdot\pi]$ slijedi:

$$0\le\left(k\pm\frac{1}{3}\right)\cdot\pi\le 2\cdot\pi,\quad /:\pi$$

$$0\le k\pm\frac{1}{3}\le 2.$$

Ako u gornjoj jednakosti uzmemo predznak +, dobivamo nejednadžbu $0\le k+\frac{1}{3}\le 2$, odnosno nejednadžbu $-\frac{1}{3}\le k\le\frac{5}{3}$ koja u skupu cijelih brojeva ima točno dva rješenja: $k = 0$ i $k = 1$. Svaki od tih cijelih brojeva generira točno jedno rješenje polazne jednadžbe, pa ovaj slučaj daje dva različita rješenja polazne jednadžbe.

Uzmemo li, pak, predznak –, dobivamo nejednadžbu $0\le k-\frac{1}{3}\le 2$, odnosno nejednadžbu $\frac{1}{3}\le k\le\frac{7}{3}$ koja u skupu cijelih brojeva ima točno dva rješenja: $k = 1$ i $k = 2$. Svaki od tih cijelih brojeva generira točno jedno rješenje polazne jednadžbe, pa ovaj slučaj daje još dva različita rješenja polazne jednadžbe.

Dakle, zadana jednadžba u intervalu $[0, 2\cdot\pi]$ ima ukupno 2 + 2 = 4 različita rješenja.

15. A. Neka su a duljina osnovnoga brida piramide, b duljina bočnoga brida piramide, h duljina visine piramide i v duljina visine bilo koje pobočke. Uočimo pravokutan trokut kojemu je jedna kateta visina piramide, a druga kateta jedna trećina visine osnovke, a hipotenuza visina pobočke. U tom je trokutu kut između hipotenuze i druge katete jednak 68°. Budući da je duljina visine osnovke jednaka $v_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$, primjenom funkcija sinus i kosinus dobivamo:

$$\begin{cases}\frac{h}{v}=\sin 68^\circ,\\ \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}{v}=\cos 68^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=v\cdot\sin 68^\circ,\\ \frac{\sqrt{3}\cdot a}{6\cdot v}=\cos 68^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=v\cdot\sin 68^\circ,\\ a=\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot v\cdot\cos 68^\circ\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}h=v\cdot\sin 68^\circ,\\ a=2\cdot\sqrt{3}\cdot v\cdot\cos 68^\circ.\end{cases}$$

Preostaje uočiti pravokutan trokut kojemu je jedna kateta visina piramide, hipotenuza bočni brid, a druga kateta dvije trećine visine osnovke. Označimo li traženi kut s β, primjenom funkcije tangens dobijemo:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{\frac{2}{3}\cdot v_1}=\frac{h}{\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}=\frac{3\cdot h}{\sqrt{3}\cdot a}=\frac{\sqrt{3}\cdot h}{a}=\frac{\sqrt{3}\cdot v\cdot\sin 68^\circ}{2\cdot\sqrt{3}\cdot v\cdot\cos 68}=\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}68^\circ.$$

Odatle je $\beta=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\cdot\operatorname{tg}68^\circ\right)=51.059970622^\circ\approx 51^\circ 3'36''$.

16. 7.39. Odmah imamo:

$$\sqrt{3}+4^{1.25}=1.7320508+5.6568542=7.388905\approx 7.39\,.$$

17. 1 986 600. 55% od 84% nekoga broja tvori $\frac{55}{100}\cdot\frac{84}{100}=\frac{11}{20}\cdot\frac{21}{25}=\frac{231}{500}$ toga broja. Stoga je traženi broj jednak

$$\frac{231}{500}\cdot 4\ 300\ 000=1\ 986\ 600\,.$$

18. 1.) $3.6\cdot 10^{11}$. Budući da 1 minuta ima 60 sekundi, 20 minuta ima $20\cdot 60=1200=1.2\cdot\cdot 1000=1.2\cdot 10^3$ sekundi. Stoga je traženi put jednak

$$s=v\cdot t=3\cdot 10^8\ \text{m/s}\ \cdot 1.2\cdot 10^3\ \text{s}\ =(3\cdot 1.2)\cdot 10^{8+3}=3.6\cdot 10^{11}\ \text{m}.$$

2.) $\frac{12}{7}\cdot\pi$**.** Prema de Moivrèovoj formuli za potenciranje kompleksnoga broja zapisanoga u trigonometrijskom obliku, argument potencije jednak je umnošku argumenta baze i eksponenta (pri čemu taj umnožak treba svesti na kut u intervalu $[0,\ 2\cdot\pi\rangle$ ako je to potrebno). U ovome je slučaju argument baze, tj. argument polaznoga kompleksnoga broja jednak $\frac{2\cdot\pi}{7}$, eksponent jednak 6, pa odmah dobivamo:

$$\varphi=\frac{2\cdot\pi}{7}\cdot 6=\frac{12}{7}\cdot\pi\,.$$

19. 1.) $x^{\frac{7}{8}}=x^{0.875}$**.** Primjenom pravila za množenje potencija s istim bazama i potenciranje potencije dobivamo:

$$\left(x^{1.5}\cdot\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(x^{1.5}\cdot x^{\frac{1}{4}}\right)^{0.5}=\left(x^{1.5}\cdot x^{0.25}\right)^{0.5}=\left(x^{1.5+0.25}\right)^{0.5}=\left(x^{1.75}\right)^{0.5}=x^{1.75\cdot 0.5}=x^{0.875}=x^{\frac{875}{1000}}=x^{\frac{7}{8}}\,.$$

2.) $\frac{3\cdot a-1}{3\cdot a}$**.** Imamo redom:

$$\left(3\cdot a-\frac{6\cdot a-1}{3\cdot a}\right)\cdot\frac{1}{3\cdot a-1}=\frac{(3\cdot a)\cdot(3\cdot a)-(6\cdot a-1)}{3\cdot a}\cdot\frac{1}{3\cdot a-1}=\frac{9\cdot a^2-6\cdot a+1}{3\cdot a}\cdot\frac{1}{3\cdot a-1}=$$
$$=\frac{(3\cdot a)^2-2\cdot(3\cdot a)\cdot 1+1}{3\cdot a}\cdot\frac{1}{3\cdot a-1}=\frac{(3\cdot a-1)^2}{3\cdot a}\cdot\frac{1}{3\cdot a-1}=\frac{3\cdot a-1}{3\cdot a}.$$

20. 1.) Vidjeti Sliku 1. U zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtamo točke $A=(5,\ 0)$ i $B=(-4,\ -2)$, pa ih spojimo jednim pravcem. Dobivamo pravac prikazan na Slici 1.

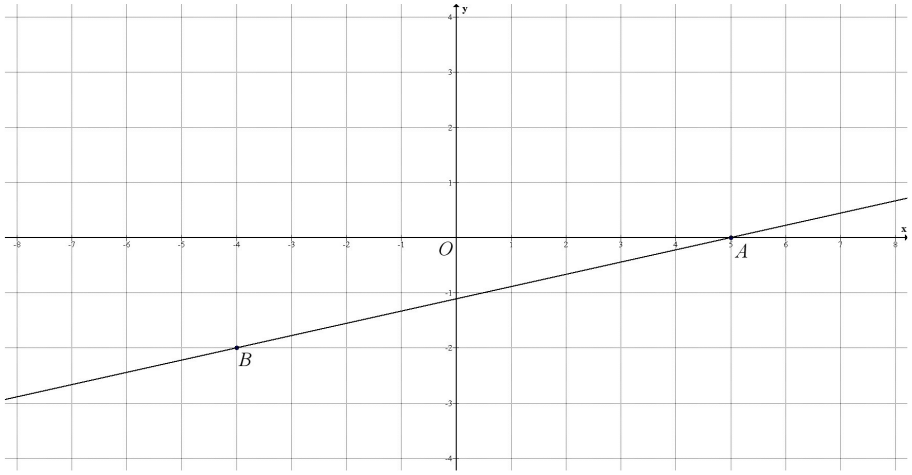
2.) –2; 0. Svaka točka na osi apscisa im drugu koordinatu jednaku nuli. Prva koordinata tražene točke dobiva se tako da u jednadžbu pravca uvrstimo y = 0. Time zapravo treba riješiti jednadžbu

$$\frac{3}{2}\cdot x+3=0\,.$$

Nju riješimo na standardan način:

$$\frac{3}{2}\cdot x+3=0,$$
$$\frac{3}{2}\cdot x=-3,\quad /:\frac{3}{2}$$
$$x=(-3):\frac{3}{2}=(-3)\cdot\frac{2}{3}=-2.$$

Dakle, traženo sjecište je točka $S = (-2, 0)$.



Slika 1.

21. 1.) $\frac{1}{2}$**;** $-\frac{3}{5}$ **.** Zadani sustav je najjednostavnije riješiti metodom zamjene (supstitucije). Uvrstimo prvu jednadžbu sustava u drugu jednadžbu sustava, pa redom dobivamo:

$$x+10\cdot\left(\frac{2\cdot x-4}{5}\right)=-\frac{11}{2},$$
$$x+2\cdot(2\cdot x-4)=-\frac{11}{2},$$
$$x+4\cdot x-8=-\frac{11}{2},$$
$$5\cdot x=-\frac{11}{2}+8,$$
$$5\cdot x=\frac{-11+2\cdot 8}{2},$$
$$5\cdot x=\frac{-11+16}{2},$$
$$5\cdot x=\frac{5}{2}.$$

Odavde dijeljenjem s 5 slijedi $x=\frac{1}{2}$. Dobiveni rezultat uvrstimo u prvu jednadžbu sustava:

$$y=\frac{2\cdot\frac{1}{2}-4}{5}=\frac{1-4}{5}=-\frac{3}{5}.$$

Dakle, rješenje sustava je uređeni par $(x,y)=\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{5}\right)$.

2.) $x_1 = 4, x_2 = -1$ (ili obratno). Razlikujemo dva slučaja:

a) Ako je $3 \cdot x - 2 \geq 0$, onda je $|3 \cdot x - 2| = 3 \cdot x - 2$, pa dobivamo jednadžbu $3 \cdot x - 2 = x + 6$. Nju riješimo standardnim postupkom:

$$\begin{aligned}
&3\cdot x-2=x+6,\\
&3\cdot x-x=6+2,\\
&2\cdot x=8,\quad /:2\\
&x=4.
\end{aligned}$$

Lako se vidi da za $x = 4$ vrijedi nejednakost $3 \cdot x - 2 \geq 0$, pa je taj realan broj rješenje polazne jednadžbe.

b) Ako je $3 \cdot x - 2 < 0$, onda je $|3 \cdot x - 2| = -(3 \cdot x - 2) = -3 \cdot x + 2$, pa dobivamo jednadžbu $-3 \cdot x + 2 = x + 6$. Nju riješimo standardnim postupkom:

$$\begin{aligned}
&-3\cdot x+2=x+6,\\
&-3\cdot x-x=6-2,\\
&(-4)\cdot x=4,\quad /:(-4)\\
&x=-1.
\end{aligned}$$

Lako se vidi da za $x = -1$ vrijedi nejednakost $3 \cdot x - 2 < 0$, pa je taj realan broj rješenje polazne jednadžbe.

Dakle, polazna jednadžba ima točno dva realna rješenja: $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$.

22. 1.) $\left\langle -\infty, \frac{7}{2}\right]$**.** Zadana funkcija je kvadratna funkcija čiji su koeficijenti $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$ i $c=-1$. Koeficijent uz x^2 jednak je $-\frac{1}{2}$ i on je strogo negativan. To znači da zadana funkcija ima globalni maksimum. Vrijednost toga maksimuma iznosi:

$$f_{\max}=\frac{4\cdot a\cdot c-b^2}{4\cdot a}=\frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-1)-(-3)^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2-9}{-2}=\frac{-7}{-2}=\frac{7}{2}.$$

Dakle, zadana funkcija poprima sve realne vrijednosti jednake ili manje od $\frac{7}{2}$. Te vrijednosti tvore skup $\left\langle -\infty, \frac{7}{2} \right]$ i taj je skup tražena slika zadane funkcije.

2.) Vidjeti Sliku 2. Graf zadane funkcije je parabola. Svaka parabola je jednoznačno određena zadavanjem bilo koje tri svoje različite točke. Mi ćemo odrediti sjecišta parabole s koordinatnim osima i tjeme parabole, pa na temelju dobivenih rezultata nacrtati graf parabole.

Sjecišta parabole s osi apscisa (osi x) je točka čija je druga koordinata jednaka 0 (jer svaka točka na osi apscisa ima drugu koordinatu jednaku 0), a prva koordinata realna nultočka funkcije f. Stoga trebamo riješiti jednadžbu $f(x) = 0$. Imamo redom:

$$f(x) = 0,$$

$$-\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x - 1 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-1)}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-2}}{-1} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{-1} = 3 \mp \sqrt{7}.$$

Dakle, sjecišta tražene parabole s osi apscisa su točke $S_1 = \left(3 - \sqrt{7}, 0\right)$ i $S_2 = \left(3 + \sqrt{7}, 0\right)$. Prve koordinate tih točaka su iracionalni brojevi, pa je navedene točke relativno teško ucrtati u pravokutni koordinatni sustav u ravnini.

Sjecište parabole s osi ordinata (osi y) je točka čija je prva koordinata jednaka 0 (jer svaka točka na osi ordinata ima prvu koordinatu jednaku 0), a druga koordinata jednaka $f(0)$. Stoga računamo $f(0)$:

$$f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 - 1 = -\frac{1}{2} \cdot 0 + 0 - 1 = 0 + 0 - 1 = -1.$$

Dakle, sjecište tražene parabole s osi ordinata je točka $S_3 = (0, -1)$.

Odredimo tjeme tražene parabole. Druga koordinata te točke jednaka je najvećoj vrijednosti funkcije f, a nju smo izračunali u **1.)**. Dakle, druga koordinata tjemena je $\frac{7}{2}$. Izračunajmo prvu koordinatu:

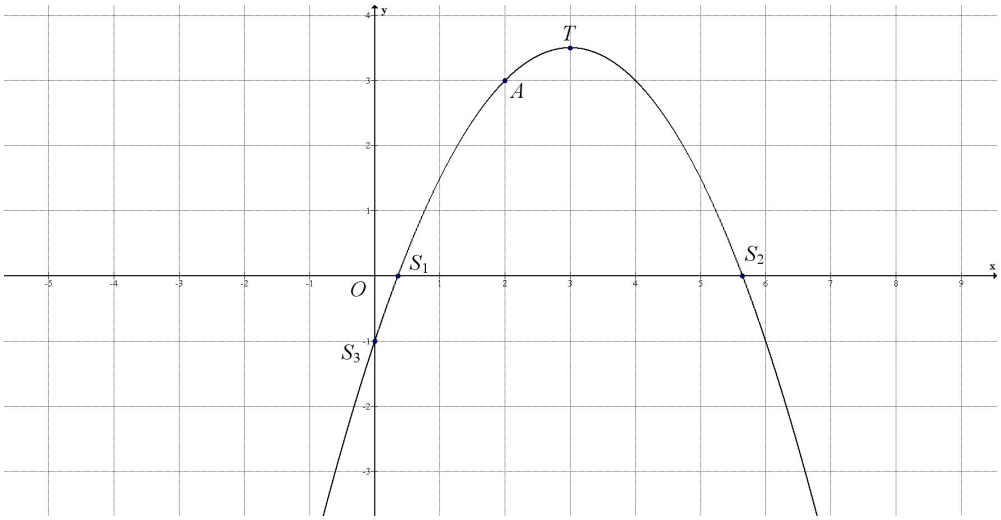
$$x_T = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{3}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-3}{-1} = 3.$$

Dakle, tjeme parabole je točka $T = \left(3, \frac{7}{2}\right)$.

Budući da nam nedostaje još jedna točka s cjelobrojnim (ili eventualno racionalnim) koordinatama, izračunajmo npr. drugu koordinatu točke parabole čija je prva koordinata jednaka 2. Ta druga koordinata jednaka je $f(2)$, pa izračunajmo $f(2)$:

$$f(2) = -\frac{1}{2}\cdot 2^2 + 3\cdot 2 - 1 = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 6 - 1 = -2 + 6 - 1 = 3.$$

Dakle, paraboli pripada i točka $A = (2, 3)$. Stoga u zadani pravokutni koordinatni sustav u ravnini ucrtajmo točke S_3, T i A, pa ih spojimo parabolom. Dobivamo krivulju prikazanu na Slici 2.



Slika 2.

23. 1.) ≈ 4.16. Pravokutni trokut s katetom duljine 3 i hipotenuzom duljine 5.6, te pravokutni trokut s katetom duljine a i hipotenuzom duljine 6.3 imaju zajedničku drugu katetu. Stoga primjena Pitagorina poučka na oba trokuta daje:

$$\begin{aligned}
&6.3^2 - a^2 = 5.6^2 - 3^2,\\
&-a^2 = 5.6^2 - 3^2 - 6.3^2, \quad /:(-1)\\
&a^2 = 6.3^2 + 3^2 - 5.6^2 = 39.69 + 9 - 31.36 = 17.33,\\
&a = \sqrt{17.33} = 4.1629316593 \approx 4.16.
\end{aligned}$$

2.) ≈ 26.86. Primjenom kosinusova poučka dobivamo:

$$c = \sqrt{12^2 + 17^2 - 2\cdot 12\cdot 17\cdot \cos 135^\circ} = \sqrt{144 + 289 - 408\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \sqrt{433 + 204\cdot\sqrt{2}},$$

$c \approx 26.860744 \approx 26.86$ cm

24. 1.) ⟨–5, 2⟩. Razlikujemo dva slučaja:

I. $\begin{cases} x+5>0 \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5 \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \langle -5, 2\rangle.$ **II.** $\begin{cases} x+5<0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-5 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow$ nema rješenja.

Dakle, skup svih rješenja jednadžbe je interval ⟨–5, 2⟩.

2.) $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 4, +\infty\rangle$. Iz zadanih podataka zaključujemo:

- budući da funkcija ima lokalni minimum u točki A, ona strogo pada na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$;
- budući da funkcija ima lokalni maksimum u točki C, a lokalni minimum u točki A, ona strogo raste na intervalu $\langle -1, 1\rangle$;
- budući da funkcija ima lokalni maksimum u točki C, a lokalni minimum u točki B, ona strogo pada na intervalu $\langle 1, 4\rangle$;
- budući da funkcija ima lokalni minimum u točki B, ona strogo raste na intervalu $\langle 4, +\infty\rangle$.

Dakle, traženi intervali rasta su $\langle -1, 1\rangle$ i $\langle 4, +\infty\rangle$.

Napomena: **Skup $\langle -1, 1\rangle \cup \langle 4, +\infty\rangle$ nije interval, pa taj skup nije točno rješenje zadatka.**

25. 1.) $\dfrac{3}{\cos^2(3\cdot x)}$**.** Koristimo pravilo deriviranja složene funkcije. Najprije deriviramo funkciju tangens (pri čemu je argument derivacije jednak argumentu tangensa, tj. $3 \cdot x$), a potom dobiveni izraz pomnožimo s derivacijom argumenta tangensa. Iz tablica derivacija elementarnih funkcija znamo da je $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, pa dobivamo:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot(3\cdot x)' = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot 3\cdot(x)' = \frac{1}{\cos^2(3\cdot x)}\cdot 3\cdot 1 = \frac{3}{\cos^2(3\cdot x)}.$$

2.) $y = 5 \cdot x - 1$. Odredimo najprije drugu koordinatu točke krivulje u kojoj povlačimo tangentu. Budući da je prva koordinata te točke jednaka 1, druga koordinata jednaka je vrijednosti $f(1)$. Stoga računamo $f(1)$:

$$f(1) = 1^3 + 2\cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Dakle, tangentu povlačimo u točki $D = (1, 4)$.

Izračunajmo koeficijent smjera tangente. On je jednak vrijednosti prve derivacije funkcije f u točki $x_0 = 1$. Stoga imamo:

$$f'(x) = (x^3)' + (2\cdot x)' + (1)' = 3\cdot x^{3-1} + 2\cdot(x)' + 0 = 3\cdot x^2 + 2\cdot 1 = 3\cdot x^2 + 2,$$
$$f'(1) = 3\cdot 1^2 + 2 = 3\cdot 1 + 2 = 5.$$

Dakle, koeficijent smjera tangente jednak je $k = 5$. Stoga jednadžba tangente glasi:

$$y - 4 = 5\cdot(x-1),$$
$$y = 5\cdot x - 5 + 4,$$
$$y = 5\cdot x - 1.$$

26. 1.) 2. Iz slike vidimo da krivulja prolazi točkom $(0, -1)$. Ako u jednadžbu krivulje uvrstimo $x = 0$ i $y = -1$, dobit ćemo:

$$A \cdot \sin(B \cdot 0) + D = -1,$$
$$A \cdot \sin 0 + D = -1,$$
$$A \cdot 0 + D = -1.$$
$$0 + D = -1,$$
$$D = -1.$$

Najveća vrijednost izraza $\sin(B \cdot x)$ jednaka je 1. Stoga je najveća vrijednost funkcije f jednaka $A \cdot 1 + D = A + D$. Iz slike se vidi da je najveća vrijednost funkcije f jednaka 1, pa slijedi:

$$A + D = 1.$$

Tako rješavanjem sustava dviju linearnih sustava s dvije nepoznanice

$$A + D = 1,$$
$$D = -1$$

dobivamo $(A, D) = (2, -1)$. Dakle, $A = 2$.

Napomena: Zadatak se alternativno može riješiti korištenjem činjenice da je u ovom slučaju amplituda A jednaka polovici razlike najveće i najmanje vrijednosti zadane funkcije. Najmanja vrijednost funkcije f jednaka je –3, a najveća vrijednost te funkcije jednaka je 1. Stoga je $A = \frac{1}{2} \cdot [1 - (-3)] = \frac{1}{2} \cdot (1 + 3) = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$

2.) 3. Koristit ćemo činjenicu da je temeljni period funkcije f dan izrazom $T = \frac{2 \cdot \pi}{B}$.

Uočimo da funkcija u točkama $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2} \cdot \pi$ poprima istu vrijednost (ta vrijednost je jednaka 1), te da između tih dviju točaka još dvaput poprima tu vrijednost. To znači da se točka x_2 dobije tako da se točki x_1 doda trostruki temeljni period T:

$$x_2 = x_1 + 3 \cdot T.$$

U ovaj izraz uvrstimo $T = \frac{2 \cdot \pi}{B}$, $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2} \cdot \pi$, pa dobijemo:

$$\frac{3}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi}{2} + 3 \cdot \frac{2 \cdot \pi}{B},$$
$$\frac{6 \cdot \pi}{B} = \frac{3}{2} \cdot \pi + \frac{\pi}{2},$$
$$\frac{6 \cdot \pi}{B} = 2 \cdot \pi, \quad / \cdot \frac{B}{2 \cdot \pi}$$
$$B = \frac{6 \cdot \pi}{2 \cdot \pi} = 3.$$

27. 1.) $\frac{8}{81}$. Prvi član niza je $g_1 = \frac{3}{4}$, a količnik niza $q = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{1 \cdot 4}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}$. Stoga je šesti član niza jednak $g_6 = g_1 \cdot q^{6-1} = g_1 \cdot q^5 = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{2^5}{3^5} = \frac{2^3}{3^4} = \frac{8}{81}$.

2.). $\frac{3}{5}=0.6$. Neka je q traženi količnik reda. Iz formule za zbroj konvergentnoga geometrijskoga reda $S=\frac{a_1}{1-q}$ izrazimo q:

$$S=\frac{a_1}{1-q} \quad /\cdot\frac{1-q}{S}$$
$$1-q=\frac{a_1}{S},$$
$$-q=\frac{a_1}{S}-1, \quad /:(-1)$$
$$q=1-\frac{a_1}{S}.$$

U ovu jednakost uvrstimo $a_1 = 0.5$ i $S = 1.25$, pa konačno dobivamo:

$$q=1-\frac{0.5}{1.25}=1-0.4=0.6.$$

3.) 540. Ubačene dnevne svote tvore aritmetički niz čiji je prvi član $a_1 = 1$, a razlika $d = 0.5$ (jer je 50 lp = 0.5 kn). Tražena svota jednaka je zbroju prvih 45 članova toga niza. U formulu za zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza $S_n=\frac{n}{2}\cdot\left[2\cdot a_1+(n-1)\cdot d\right]$ uvrstimo $a_1 = 1$, $n = 45$ i $d = 0.5$, pa dobivamo:

$$S_{45}=\frac{45}{2}\cdot\left[2\cdot 1+(45-1)\cdot 0.5\right]=\frac{45}{2}\cdot(2+44\cdot 0.5)=\frac{45}{2}\cdot(2+22)=\frac{45}{2}\cdot 24=540.$$

28. 1.) $2^{-9}=\frac{1}{512}$**.** Prema definiciji logaritma slijedi:

$$\log_x 8=-\frac{1}{3},$$
$$x^{-\frac{1}{3}}=8, \quad /^{-3}$$
$$\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^{-3}=8^{-3},$$
$$x^{\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot(-3)}=(2^3)^{-3},$$
$$x^1=2^{3\cdot(-3)},$$
$$x=2^{-9}=\frac{1}{2^9}=\frac{1}{512}.$$

2.) $-\frac{3}{2}$. Uvedimo zamjenu $t:=0.25^x$. Tada su

$$0.25^{x-1}=0.25^x\cdot 0.25^{-1}=t\cdot 4=4\cdot t,$$
$$0.5^{2\cdot x-1}=0.5^{2\cdot x}\cdot 0.5^{-1}=(0.5^2)^x\cdot 2=0.25^x\cdot 2=t\cdot 2=2\cdot t,$$

pa dobivamo linearnu jednadžbu:

$$2 \cdot t + 4 \cdot t = 48,$$

odnosno

$$6 \cdot t = 48.$$

Dijeljenjem s 6 slijedi $t = 8$. Tako dalje imamo:

$$\begin{aligned}
&0.25^x = 8,\\
&\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^3,\\
&\left(\frac{1}{2^2}\right)^x = 2^3,\\
&(2^{-2})^x = 2^3,\\
&2^{(-2)\cdot x} = 2^3.
\end{aligned}$$

Izjednačavanjem eksponenata dobivamo linearnu jednadžbu $(-2) \cdot x = 3$ čije je jedino rješenje $x = -\frac{3}{2}$.

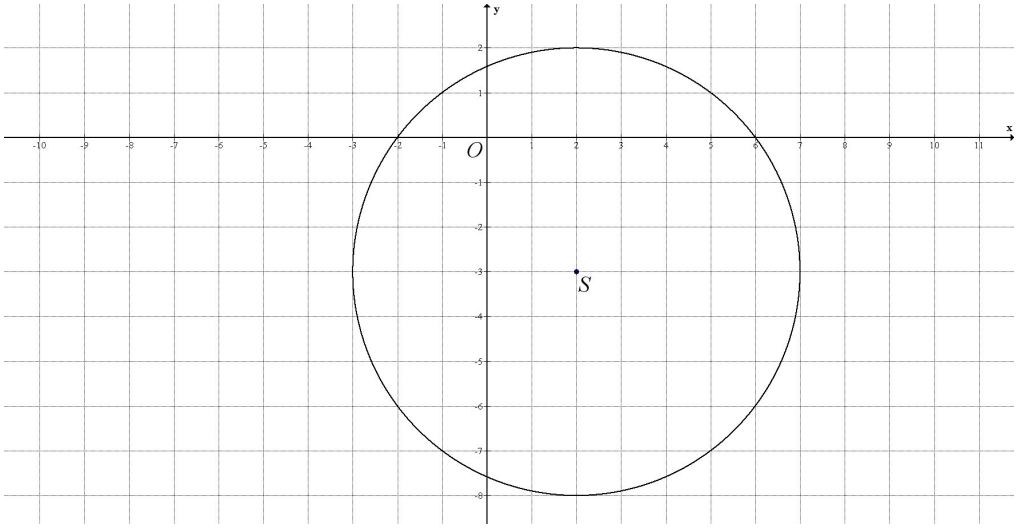
3.) ≈ 5.64 sati. Trebamo riješiti nejednadžbu $K(t) < 1$. Imamo redom:

$$\begin{aligned}
&K(t) < 1,\\
&2.5 \cdot 0.85^t < 1, \quad /:2.5\\
&0.85^t < 0.4 \quad / \log\\
&\log(0.85^t) < \log(0.4)\\
&t \cdot \log(0.85) < \log(0.4) \quad / : \log(0.85)\\
&t > \frac{\log 0.4}{\log 0.85} = 5.63805542.
\end{aligned}$$

(Znak nejednakosti se promijenio jer je $\log(0.85) < 0$.) Ovaj rezultat zaokružimo naviše, i to na dvije decimale, pa dobijemo $t \approx 5.64$ sati = 5 sati 38 minuta 24 sekunde.

<u>Napomena</u>: **Zaokruživanje na 5.63 ne daje ispravan rezultat jer je $K(5.63) \approx 1{,}00131$, a taj broj je strogo veći od 1. Također, $t > 5.63805542$ sati daje $t > 5$ sati 38 minuta 16.99 sekundi, pa je u tom slučaju $t \approx 5$ sati 38 minuta i 17 sekundi. Razlika od 7 sekundi nastala je zbog zaokruživanja na dvije decimale.**

29. 1.) 2; –3; vidjeti Sliku 3. Iz jednadžbe kružnice odmah očitamo koordinate središta: $S = (2, -3)$ i duljinu polumjera kružnice $r = \sqrt{25} = 5$. Stoga ucrtamo točku S u pravokutni koordinatni sustav u ravnini, šestarom uzmemo udaljenost $r = 5$, zabodemo šestar u točku S i oko te točke opišemo kružnicu polumjera $r = 5$. Ta kružnica je tražena kružnica. Ona je prikazana na Slici 3.



Slika 3.

2.) $\frac{1080}{41} \approx 26.341463 \text{ cm}^2$**.** Najprije dokažimo sljedeću tvrdnju:

<u>Tvrdnja 1.</u> Ako su ABC i $A'B'C'$ slični trokutovi s koeficijentom sličnosti k, onda su visine na korespondentne (s obzirom na sličnost) stranice trokuta slične s koeficijentom sličnosti k.

<u>Dokaz</u> : Znamo da za trokutove ABC i $A'B'C'$ koji su slični s koeficijentom sličnosti k vrijede jednakosti:

$$\left|\overline{A'B'}\right| = k \cdot \left|\overline{AB}\right|,$$
$$P_{A'B'C'} = k^2 \cdot P_{ABC}.$$

Budući da je $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot v_c$ i analogno $P_{A'B'C'} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{A'B'}\right| \cdot v_c'$, uvrštavanjem ove dvije jednakosti i prve jednakosti u drugu jednakost dobivamo:

$$\frac{1}{2} \cdot k \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot v_c' = \frac{1}{2} \cdot k^2 \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot v_c,$$

a odavde dijeljenjem s $\frac{1}{2} \cdot k \cdot \left|\overline{AB}\right|$ slijedi $v_c' = k \cdot v_c$, što smo i tvrdili. ■

U našem je zadatku $v_c' = \left|\overline{AB}\right| = 6,\ v_c = 4.1,$ pa iz dokaza Tvrdnje 1. slijedi $k = \frac{v_c'}{v_c} = \frac{6}{4.1} = \frac{60}{41}$. Stoga je tražena površina trokuta $A'B'C'$ jednaka:

$$P_{A'B'C'} = k^2 \cdot P_{ABC} = \left(\frac{60}{41}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{AB}\right| \cdot v_c = \left(\frac{60}{41}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4.1 = \frac{60^2}{41^2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{41}{10} = \frac{60 \cdot 60 \cdot 3}{41 \cdot 10} =$$
$$= \frac{6 \cdot 60 \cdot 3}{41} = \frac{1080}{41} \approx 26.341463 \text{ cm}^2$$

3.) $4\cdot\sqrt{2}$ **jediničnih dužina.** Odredimo najprije vrijednost b^2. Budući da točka T pripada krivulji, njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu krivulje. Stoga u jednadžbu krivulje uvrstimo $x = 2$ i $y = -6$. Dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{2^2}{16}+\frac{(-6)^2}{b^2}=1,\\
&\frac{4}{16}+\frac{36}{b^2}=1,\\
&\frac{1}{4}+\frac{36}{b^2}=1,\\
&\frac{36}{b^2}=1-\frac{1}{4},\\
&\frac{36}{b^2}=\frac{3}{4},\\
&3\cdot b^2=36\cdot 4,\\
&b^2=\frac{36\cdot 4}{3}=48.
\end{aligned}$$

Uočimo da je zadana krivulja elipsa. Jednadžba tangente (u segmentnom obliku) na elipsu $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ u točki $T = (x_T, y_T)$ glasi:

$$\frac{x\cdot x_T}{a^2}+\frac{y\cdot y_T}{b^2}=1.$$

U ovu jednakost uvrstimo $x_T = 2$, $a^2 = 16$, $y_T = -6$ i $b^2 = 48$, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\frac{x\cdot 2}{16}+\frac{y\cdot(-6)}{48}=1,\\
&\frac{x}{8}+\frac{y}{-8}=1.
\end{aligned}$$

Odavde slijedi da tangenta t prolazi točkama $A = (8, 0)$ i $B = (0, -8)$. Njezina udaljenost od ishodišta jednaka je duljini visine na hipotenuzu pravokutnoga trokuta čije katete imaju duljine 8 jediničnih dužina. Jedan vrh toga trokuta je ishodište O pravokutnoga koordinatnoga sustava u ravnini, a preostala dva vrha su točke A i B.

Trokut OAB je jednakokračan pravokutan trokut jer njegove katete imaju jednake duljine. Štoviše, on je zapravo polovica kvadrata čija je stranica duga 8 jediničnih dužina. Zbog toga je tražena udaljenost jednaka je polovici duljine dijagonale kvadrata čija je stranica duga 8 jediničnih dužina. Dakle,

$$d(O,t)=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\sqrt{2}=4\cdot\sqrt{2}\ \text{ jediničnih dužina.}$$

4.) 292.89. Trebamo izračunati opseg zadanoga trapeza. Da bismo to napravili, nedostaju nam duljine dviju stranica trapeza. Radi određenosti, neka su vrhovi trapeza A, B, C i D označeni tako da je $|AB| = 105$ m i $|CD| = 87.5$ m.

Iz vrhova C i D povucimo okomice na stranicu AB. Neka su E i F redom nožišta tih okomica. Budući da su stranice AB i CD usporedne, vrijede jednakosti:

$$|CE| = |DF| \quad \text{i} \quad |EF| = |CD|.$$

Primijetimo da vrijede sljedeće jednakosti:

$$\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{EF}\right| = \left|\overline{AF}\right| + \left|\overline{CD}\right| = \left|\overline{AF}\right| + 87.5,$$

$$\left|\overline{AE}\right| = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BE}\right| = 105 + \left|\overline{BE}\right|,$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ = \frac{|DF|}{|AF|} \Leftrightarrow |AF| = \frac{|DF|}{\operatorname{tg} 25^\circ} = |DF| \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - 145^\circ) = \frac{|CE|}{|BE|} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 35^\circ = \frac{|CE|}{|BE|} \Leftrightarrow |BE| = \frac{|CE|}{\operatorname{tg} 35^\circ} = |CE| \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ = |DF| \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ.$$

Iz tih jednakosti slijedi:

$$105 + |DF| \cdot \operatorname{ctg} 35^\circ = |DF| \cdot \operatorname{ctg} 25^\circ + 87.5.$$

Iz ove jednakosti lagano dobivamo:

$$|DF| = \frac{105 - 87.5}{\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 35^\circ} = \frac{17.5}{\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 35^\circ}.$$

Stoga je opseg trapeza $ABCD$ jednak:

$$O = \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right| + \left|\overline{CD}\right| + \left|\overline{AD}\right| = 105 + \frac{|\overline{CE}|}{\sin 35^\circ} + 87.5 + \frac{|\overline{DF}|}{\sin 25^\circ} = 192.5 + \frac{|\overline{DF}|}{\sin 35^\circ} + \frac{|\overline{DF}|}{\sin 25^\circ} =$$

$$= 192.5 + |\overline{DF}| \cdot \left(\frac{1}{\sin 35^\circ} + \frac{1}{\sin 25^\circ}\right) = 192.5 + \frac{17.5}{\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 35^\circ} \cdot \left(\frac{1}{\sin 35^\circ} + \frac{1}{\sin 25^\circ}\right).$$

Budući da je

$$\frac{17.5}{\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 35^\circ} \cdot \left(\frac{1}{\sin 35^\circ} + \frac{1}{\sin 25^\circ}\right) = 17.5 \cdot \frac{1}{\frac{\cos 25^\circ}{\sin 25^\circ} - \frac{\cos 35^\circ}{\sin 35^\circ}} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \sin 35^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ} =$$

$$= 17.5 \cdot \frac{\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ}{\sin 35^\circ \cdot \cos 25^\circ - \sin 25^\circ \cdot \cos 35^\circ} \cdot \frac{\sin 25^\circ + \sin 35^\circ}{\sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ} = 17.5 \cdot \frac{\sin 25^\circ + \sin 35^\circ}{\sin(35^\circ - 25^\circ)} =$$

$$= 17.5 \cdot \frac{2 \cdot \sin\left(\frac{25^\circ + 35^\circ}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{25^\circ - 35^\circ}{2}\right)}{\sin 10^\circ} = 17.5 \cdot \frac{2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos\left(-5^\circ\right)}{\sin 10^\circ} =$$

$$= 17.5 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 5^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{17.5 \cdot \cos 5^\circ}{\sin 10^\circ} = \frac{17.5 \cdot \cos 5^\circ}{2 \cdot \sin 5^\circ \cdot \cos 5^\circ} = \frac{8.75}{\sin 5^\circ},$$

konačno dobivamo:

$$O = 192.5 + \frac{8.75}{\sin 5^\circ} \approx 292.8949908996 \approx 292.89 \text{ metara.}$$

30. $\left[-1,\ -\frac{3}{4}\right\rangle$**.** Izrazi pod drugim korijenima (radikandi) nužno moraju biti nenegativni. Zbog toga moraju vrijediti nejednakosti:

$$\begin{cases} 4-3\cdot x\geq 0, \\ x+1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\cdot x\geq -4, \\ x\geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \frac{4}{3}, \\ x\geq -1 \end{cases}$$

Dakle, zadanu nejednadžbu rješavamo na intervalu $\left[-1,\ \frac{4}{3}\right]$. Zapišimo je u obliku:

$$\sqrt{4-3\cdot x}>2+\sqrt{x+1}\,.$$

Obje strane te nejednadžbe su nenegativni realni brojevi jer su oba druga korijena nenegativni realni brojevi. Zbog toga ovu nejednadžbu smijemo kvadrirati. Dobivamo:

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{4-3\cdot x}\right)^2>\left(2+\sqrt{x+1}\right)^2, \\ &4-3\cdot x>2^2+2\cdot 2\cdot\sqrt{x+1}+x+1, \\ &4\cdot\sqrt{x+1}<4-3\cdot x-4-x-1, \\ &4\cdot\sqrt{x+1}<-4\cdot x-1. \end{aligned}$$

Lijeva strana ove nejednadžbe je nenegativan realan broj, pa takva mora biti i desna strana. To daje novu nejednakost

$$-4\cdot x-1\geq 0,$$

iz koje je $x\leq -\frac{1}{4}$. Stoga polaznu nejednadžbu rješavamo na intervalu $\left[-1,\ -\frac{1}{4}\right]$. Sada su i lijeva i desna strana nejednadžbe $4\cdot\sqrt{x+1}\leq -4\cdot x-1$ nenegativni realni brojevi, pa smijemo kvadrirati izraz na lijevoj i izraz na desnoj strani te nejednadžbe:

$$\begin{aligned} &\left(4\cdot\sqrt{x+1}\right)^2<\left(-4\cdot x-1\right)^2, \\ &16\cdot(x+1)<(-4\cdot x)^2+(-4)\cdot x\cdot(-1)+(-1)^2, \\ &16\cdot x+16<16\cdot x^2+8\cdot x+1, \\ &16\cdot x^2-8\cdot x-15>0. \end{aligned}$$

Kvadratna jednadžba $16\cdot x^2-8\cdot x-15=0$ ima rješenja $x_1=\frac{5}{4}$ i $x_2=-\frac{3}{4}$. Stoga je rješenje kvadratne nejednadžbe $16\cdot x^2-8\cdot x-15>0$ skup $\left\langle -\infty,-\frac{3}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5}{4},+\infty\right\rangle$. Prema tome, skup rješenja polazne nejednadžbe je presjek intervala $\left[-1,\ -\frac{1}{4}\right]$ i intervala $\left\langle -\infty,-\frac{3}{4}\right\rangle\cup\left\langle\frac{5}{4},+\infty\right\rangle$. Taj presjek je interval $\left[-1,\ -\frac{3}{4}\right\rangle$.

pripremio:
mr.sc. Bojan Kovačić, viši predavač